MỤC LỤC

Chương 1

Các phép dời hình phẳng

§ 1 Đại cương về các phép biến hình và các phép dời hình phẳng

1 Khái niệm về phép biến hình

Cho hai tập hợp điểm $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}'$ ta gọi là một song ánh từ $\mathcal{T}$ vào $\mathcal{T}'$, mọi phép tương ứng f mà với mỗi điểm M của $\mathcal{T}$ đều được gắn với một điểm M' duy nhất của $\mathcal{T}'$, ký hiệu là $M' = f(M)$.

Như vậy, cho một song ánh $f : \mathcal{T} \mapsto \mathcal{T}'$ vào $\mathcal{T}'$ là cho một quy tắc để, với bất kỳ một điểm $M \in \mathcal{T}$ bao giờ ta cũng có một điểm $f(M)$ hoàn toàn xác định của $\mathcal{T}'$ sao cho

(i) Nếu M và N là hai điểm phân biệt của $\mathcal{T}$ thì $f(M)$ và $f(N)$ là hai điểm phân biệt của $\mathcal{T}'$; $M \neq N$ thì $f(M) \neq f(N)$.

(ii) Với $\forall M' \in \mathcal{T}'$ thì bao giờ cũng có một điểm $M \in \mathcal{T}$ sao cho $f(M) = M'$.

Điểm $M' = f(M)$ được gọi là ảnh, hay điểm tương ứng hoặc hình biến đổi của điểm M qya ánh xạ f. Ngược lại, điểm M được gọi là tạo ảnh của điểm $M' = f(M)$ qua ánh xạ f.

Nếu $M' = f(M)$ thì ta còn nói rằng ánh xạ f (ở đây là một song ánh rồi) biến điểm M của $\mathcal{T}$ thành điểm M' của $\mathcal{T}'$.

Khi hai tập hợp điểm $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}'$ là đồng nhất, cũng có nghĩa là trùng nhau, ký hiệu $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, ta nói rằng f là một phép biến hình trong $\mathcal{T}$ (hay từ $\mathcal{T}$ vào chính nó). Như vậy, ta có thể định nghĩa một phép biến hình trên đường thẳng, trong mặt phẳng hay trong không gian tuỳ theo $\mathcal{T}$ là tập các điểm của một đường thẳng Δ nào đó trong mặt phẳng, hay $\mathcal{T}$ là tập hợp tất cả các điểm của một mặt phẳng $\mathcal{P}$ hay $\mathcal{T}$ là tập hợp tất cả các điểm của không gian $\mathcal{K}$. Thậm chí $\mathcal{T}$ có thể là tập hợp tất cả các điểm của một hình $\mathcal{H}$ nào đó là một bộ phận (tập con) của đường thẳng Δ, hay một bộ phận của một mặt phẳng $\mathcal{P}$ hay một bộ phận của không gian; ký hiệu $\mathcal{H} \subset \Delta$, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}$ hay $\mathcal{H} \in \mathcal{K}$. Ta có định nghĩa sau đâu

2 Định nghĩa phép biến hình

Một song ánh $f : \Delta \to \Delta'$ hoặc $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ từ tập các điểm của đường thẳng Δ hay của mặt phẳng $\mathcal{P}$ lên chính nó được gọi là một phép biến hình trên đường thẳng Δ hay của mặt phẳng $\mathcal{P}$.

Như vậy chẳng hạn cho một phép biến hình của mặt phẳng $f : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$ là một quy tắc để với mọi điểm của $\mathcal{P}$ ta tìm được một điểm $M' = f(M)$ hoàn toàn xác định, thoả mãn hai điều kiện sau đây

(i) Nếu M và N đều thuộc $\mathcal{P}, M \neq N$ thì $f(M)$ và $f(N)$ đều thuộc $\mathcal{P}, f(M) \neq f(N)$

(ii) Với $\forall M' \in \mathcal{P}$ thì tồn tại duy nhất điểm $M \in \mathcal{P}$ sao cho $f(M) = M'$.

Nếu $\mathcal{H}$ là một hình nào đó của $\mathcal{P}$ thì ta có thể xác định được tập hợp điểm $\mathcal{H}' = f(\mathcal{H}) = \{f(M), M \in \mathcal{H}\}$; $f(\mathcal{H})$ là một hình phẳng được gọi là ảnh hay hình biến đổi hoặc hình tương ứng của hình $\mathcal{H}$ qua phép biến hình f; ngược lại hình $\mathcal{H}$ được gọi là tạo ảnh (hay hình nguyên của hình $f(\mathcal{H})$ qua phép biến hình f (*Hình 1*)

Hình 1

Chú thích. Phép biến hình định nghĩa như trên còn được gọi một cách chính xác hơn là phép biến hình điểm (vì nó biến đổi điểm thành điểm). Hai phép biến hình điểm f và f' là tương đương nếu với mọi điểm M của $\mathcal{T}$ đều có cùng một ảnh trong $\mathcal{T}$: $\forall M \in \mathcal{T}$ suy ra $M' = f(M) = f'(M)$, ta viết $f' = f$.

3 Thí dụ về phép biến hình

Thí dụ 1. Trong mặt phẳng cho một đường thẳng Δ và một điểm O cố định trên Δ. Với mỗi điểm $M \neq O$ trên Δ ta lấy điểm M' đối xứng với M qua O; điều đó cũng có nghĩa là M' được hoàn toàn xác định bởi đẳng thức véc tơ

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM} \tag{1}$$

Nếu M trùng O thì ta lấy $M' = O$. Thế thì rõ ràng là ánh xạ $f : M \mapsto M'$ từ $\Delta \to \Delta$ xác định như trên là một song ánh từ đường thẳng Δ vào chính nó, hay theo định nghĩa thì f là một phép biến hình của đường thẳng Δ. Đó chính là phép đối xứng tâm O của đường thẳng Δ, ta ký hiệu là $\mathcal{D}_O$ hay $\mathcal{D}(O)$. Vậy $\mathcal{D}(O) : M \mapsto M'$ từ $\Delta \to \Delta$ và $\mathcal{T} = \Delta$.

Chú thích. Trong trường hợp này ta cũng có $\mathcal{D}(O) : M \mapsto M$. Nếu $\mathcal{T} = \mathcal{P}$ và $M' = f(M)$ được xác định bởi (1) thì $f : M \mapsto M'$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ là một phép đối xứng tâm O của mặt phẳng $\mathcal{P}$.

Thí dụ 2. Gọi A_o, B_o và C_o lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB của một tam giác ABC cho trước trong mặt phẳng. Với mỗi điểm M của mặt phẳng ta lấy lần lượt các điểm A', B', và C' đối xứng với M theo thứ tự qua A_o, B_o, và C_o. Chứng tỏ rằng

1/ Các đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy ở một điểm M' nào đó;

2/ Ánh xạ $f : M \mapsto M'$ từ $\mathcal{P}$ vào chính nó là một phép biến hình của mặt phẳng.

Hình 2

Thật vậy, từ giả thiết dễ dàng suy ra điểm M là đỉnh thứ tư chung của ba hình bình hành $BA'CM, CB'AM$, và $AC'BM$. Từ đó suy ra $BCB'C', CAC'A'$ và $ABA'B'$ đều là những hình bình hành và mỗi hình này nhận hai trong ba đoạn thẳng AA', BB' và CC' làm các đường chéo. (*Hình 2*).

Do đó ba đường thẳng AA', BB' và CC' đôi một cắt nhau ỏ cùng một điểm; đó là trung điểm chung M' của cả ba đoạn thẳng đó. Như vậy với mỗi điểm M của mặt phẳng $\mathcal{P}$ đã chỉ ra một quy tắc f xác định hoàn toàn điểm $f(M) = M'$

như đã cho ở trên và do đó f là một *đơn ánh*.

Đảo lại, với mỗi điểm M' của mặt phẳng ta lấy các điểm A', B', C' theo thứ tự đối xứng với A, B, C qua M'. Thế thì rõ ràng M' là tâm chung của ba hình bình hành $BCB'C', CAC'A'$ và $ABA'B'$. Bây giờ ta lấy điểm M đối xứng với A' qua A_o; nói khác đi, M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BA'CM$. Từ đó suy ra M là đỉnh thứ tư chung của cả ba hình bình hành $BA'CM, CB'AM$ và $AC'BM$. Bởi vậy, M đối xứng với B' qua B_o, đồng thời cũng đối xứng với C' qua C_o. Nói khác đi là, A_oA', B_oB' và C_oC' đồng quy ở điểm M.

Như vậy là, với mỗi điểm M' bất kỳ của mặt phẳng $\mathcal{P}$ ta đã chỉ ra được cách xác định điểm M và điểm M này là duy nhất sao cho $f(M) = M'$. Và do đó, f là một *toàn ánh*.

Kết luận. Ánh xạ $f : M \mapsto M'$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh nên theo định nghĩa, f là một phép biến hình của mặt phẳng.

Chú thích. Nếu gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta còn chứng minh được rằng đường thẳng MM' đia qua G và cặp điểm M, M' thoả mãn hệ thức véctơ

$$\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM} \qquad (2)$$

Hệ thức (2) cũng nói lên rằng quy tắc $f : M \mapsto M'$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ chỉ ra trong thí dụ 2 tương đương với quy tắc (ánh xạ) f', trong đó với mỗi điểm M bất kỳ của $\mathcal{P}$ ta xác định được duy nhất điểm $M' \in \mathcal{P}$ theo (2). Ta sẽ trở lại thí dụ 2 này ở phần sau, § 4.

4 Bài tập về phép biến hình trong tập hợp điểm $\mathcal{T}$

1.1 Trong mặt phẳng cho một đường tròn (O) và hai tiếp tuyến a và b của nó. Một tiếp tuyến t thay đổi của (O) cắt a và b theo thứ tự ở M và N. Hỏi ánh xạ $f : M \mapsto N$ từ a đến b có phải là một song ánh không? Xét hai đường trường hợp a song song với b và a cắt b .

1.2 Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng phân biệt a và b. Gọi A và B theo thứ tự là các hình chiếu [1] trên a và b của một điểm M bất kỳ của một mặt phẳng; M' là điểm đối xứng với M qua trung điểm I của đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \mapsto M'$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ là một phép biến hình của mặt phẳng khi và chỉ khi a và b không vuông góc với nhau.

1.3 Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng a và Δ cắt nhau (nhưng không vuông góc) ở O và một điểm P cố định khác O sao cho O là hình chiếu của P

[1] Từ đây trở đi, nếu không có chú thích gì thêm, ta hiểu hình chiếu là hình chiếu vuông góc.

trên a. Với mỗi điểm M trên Δ, ta dựng đường tròn (OPM) cắt lại a ở C, rồi đường tròn tâm C đi qua M cắt lại Δ ở N

a) Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \mapsto N$ từ Δ vào chính nó là một phép biến hình của đường thẳng Δ.

b) Hãy chứng minh $\overrightarrow{MN}$ không đổi với mọi M trên Δ. Từ đó có thể gọi tên được phép biến hình f của Δ.

1.4 Giả sử M là một điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ của một tam giác ABC đã cho. Dựng các đường thẳng Ax, By và Cz tương ứng đối xứng với vác đường thẳng AM, BM, và CM lần lượt qua phân giác của các góc A, B và C của tam giác ABC.

a) Nếu M nằm trong tam giác ABC, chứng minh rằng Ax, By, Cz đồng quy ở một điểm M' cũng nằm trong tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \mapsto M'$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ không phải là một phép biến hình của mặt phẳng.

c) Chứng minh rằng quỹ tích những điểm M trong mặt phẳng sao cho $Ax \parallel By \parallel Cz$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

d) Tìm tập hợp điểm $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T} \subset \mathcal{P}$) để ánh xạ $f : M \to M'$ từ $\mathcal{T} \to \mathcal{T}$ là một phép biến hình của tập hợp điểm $\mathcal{T}$, một bộ phận của mặt phẳng $\mathcal{P}$.

5 Các phần tử bất biến trong một phép biến hình.

Một điểm M nào đó của tập điểm $\mathcal{T}$ mà trùng với ảnh $f(M)$ của nó trong một phép biến hình điểm f của $\mathcal{T}$ gọi là một điểm bất động hay điểm kép đối với phép biến hình f trong $\mathcal{T}$: $M \in \mathcal{T}$ mà $f(M) = M$, M là một điểm bất động của f trong $\mathcal{T}$. Phép biến hình của mặt phẳng mà mọi điểm của mặt phẳng đều là điểm bất động gọi là phép biến hình đồng nhất hay gọi tắt là phép đồng nhất, ký hiệu là Id hay e, $f = Id$ khi và chỉ khi $M = f(M)$, $\forall M \in \mathcal{P}$.

Mọi hình $\mathcal{H}$ (của $\mathcal{P}$) mà trùng với ảnh (hình biến đổi) $\mathcal{H}' = f(\mathcal{H})$ của nó trong phép biến hình f được gọi là một hình bất biến đối với phép biến hình f của $\mathcal{P}$.

Nếu một hình $\mathcal{H}$ bất biến đối với f trong $\mathcal{P}$ mà mọi điểm của nó đều bất động thì $\mathcal{H}$ được gọi là một hình cố định đối với f.

Chẳng hạn, trong phép đối xứng $\mathcal{D}(O)$ thì tâm đối xứng O là một điểm bất động duy nhất và mọi đường thẳng qua O đều là bất biến. Trong phép đối xứng $\mathcal{D}(\Delta)$ trục Δ thì trục đối xứng Δ là hình cố định còn mọi đường thẳng vuông góc với Δ đều là bất biến.

Trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ theo véctơ $\vec{v}$ khác véctơ không thì không có điểm bất động nào, nhưng mọi đường thẳng có phương của $\vec{v}$ (tức song song với $\vec{v}$) đều là bất biến.

6 Phép biến hình đảo ngược

Dễ thấy rằng mọi song ánh f từ $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ đều xác định một song ánh f' khác từ $\mathcal{T}' \to \mathcal{T}$, gọi là ánh xạ ngược của f và ký hiệu là $f^{-1}: f' = f^{-1}$. Khi $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ thì f^{-1} gọi là phép biến hình đảo ngược của f trong $\mathcal{T}$.

Dễ thấy rằng, phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ theo véctơ $\vec{v}$ khác véctơ không có phép biến hình đảo ngược cũng là một phép tịnh tiến, nhưng theo véctơ $-\vec{v}$

$$\mathcal{T}^{-1}(\vec{v}) = \mathcal{T}(-\vec{v})$$

còn phép đối xứng tâm $\mathcal{D}(O)$ hay phép đối xứng trục $\mathcal{D}(\Delta)$ thì phép đảo ngược trùng với chính nó: $\mathcal{D}^{-1}(O) = \mathcal{D}(O), \mathcal{D}^{-1}(\Delta) = \mathcal{D}(\Delta)$

Một phép biến hình f của $\mathcal{P}$ được gọi là phép biến hình đối hợp nếu mọi điểm $M \in \mathcal{P}$ trùng với ảnh của điểm tương ứng $M' = f(M)$ của nó: $\forall M \in \mathcal{P}: \ M' = f(M)$ thì $M = f(M')$.

Như vậy, f là phép biến hình đối hợp khi và chỉ khi $f = f^{-1}$. Phép đối xứng tâm và phép đối xứng tâm và phép đối xứng trục là những thí dụ về phép biến hình đối hợp trong mặt phẳng.

7 Tích các phép biến hình

Giả sử f_1 và f_2 là hai phép biến hình của mặt phẳng $f_1 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ và $f_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$; M là một điểm bất kỳ của $\mathcal{P}$. Thế thì, $\forall M \in \mathcal{P}$, $\exists! M_1 \in \mathcal{P}$ và $M' \in \mathcal{P}$ sao cho $M_1 = f_1(M)$ và $M' = f_2(M_1)$ và do đó, ánh xạ $f : M \mapsto M'$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ cũng là một song ánh, nghĩa là f trực tiếp biến M thành M' cũng là một phép biến hình của $\mathcal{P}$.

Như vậy, từ hai phép biến hình f_1 và f_2 của $\mathcal{P}$ ta đã xác định một phép biến hình f cũng của $\mathcal{P}$ gọi là tích của hai phép biến hình f_1 và f_2, ký hiệu là $f_2 \circ f_1$. Vậy ta có

$$M' = f(M) = f_2[f_1(M)], \ \forall M \ \text{khi và chỉ khi} \ \ M' = f_2 \circ f_1(M)$$

và do đó $f = f_2 \circ f_1$. Cũng vậy, tích $f_3 \circ f_2 \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ là tích của các phép biến hình $(f_2 \circ f_1)$ và f_3 theo thứ tự đó; tích $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ là tích của các phép biến hình $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)$ và f_4 theo thứ tự đó, v.v...

Cần lưu ý rằng phép biến hình $f = f_2 \circ f_1$ là kết quảả của việc thực hiện liên tiếp hai phép biến hình: phép biến hình thứ nhất là f_1 và phép biến hình thứ hai là f_2, còn $g = f_1 \circ f_2$ cũng là một phép biến hình nhưng được thực hiện theo thứ tự ngược lại. Nói chung, tích $f = f_2 \circ f_1$ và tích $g = f_1 \circ f_2$ là hai phép biến hình khác nhau.

Tích các phép biến hình có những tính chất sau đây

1/ Kết hợp, nghĩa là $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Như vậy, bao giờ cũng có thể thay hai hoặc nhiều phép biến hình liên tiếp bởi tích của chúng, hoặc ngược lại, có thể thay một phép biến hình nào đó bởi một tích tương đương.

2/ Nói chung, tích các phép biến hình không giao hoán; tích hai phép biến hình f_1 và f_2 gọi là giao hoán nếu $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$.

3/ Trong tập hợp các phép biến hình của điểm $\mathcal{P}$, phép đồng nhất Id là phần tử trung hoà trong các phép toán tích

$$\forall f:\ Id \circ f = f \circ Id = f$$

4/ Tích hai phép biến hình đảo ngược nhau là phép đồng nhất

$$f_{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id,\ (\forall f)$$

Từ đó suy ra $f \circ f = f^2 = Id$ khi và chỉ khi $f = f^{-1}$ khi và chỉ khi f là phép biến hình đối hợp. Ngoài ra, phép biến hình đảo ngược của tích $f_2 \circ f_1$ là tích $f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$, vậy

$$(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$$

Thật vậy ta có

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1) \circ (f_1^{-1} \circ f_2^{-1}) &= f_2 \circ (f_1 \circ f_1^{-1}) \circ f_2^{-1} \\ &= f_2 \circ Id \circ f_2^{-1} \\ &= f_2 \circ (Id \circ f_2^{-1}) \\ &= f_2 \circ f_2^{-1} \\ &= Id\end{aligned}$$

8 Đại cương về các phép dời hình phẳng

a) Định nghĩa phép dời hình

Một phép biến hình $f : \mathcal{P} \mapsto P$ được gọi là một phép dời hình của mặt phẳng, ký hiệu là $\mathcal{D}$ nếu bất cứ hai điểm M, N nào của $\mathcal{P}$ và các ảnh $M' = f(M)$ và $N' = f(N)$ của chúng ta đều có $M'N' = MN$. Nói một cách ngắn gọn, phép dời hình của mặt phẳng, hay gọi vắn tắt là phép dời hình phẳng, là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa bất cứ hai điểm nào của mặt phẳng. Vậy là

$$f \in \{\mathcal{D}\} \text{ của} \mathcal{P} \text{ khi và chỉ khi } f(M)f(N) = MN, \ (\forall M, N \in \mathcal{P})$$

$\{\mathcal{D}\}$ là ký hiệu tập các phép dời hình của mặt phẳng.

Chú thích. Chính vì phép dời hình bảo toàn khoảng cách giữa bất cứ hai điểm nào nên người ta gọi nó là phép biến hình đẳng cự hay gọi vắn tắt là *phép đẳng cự*.

Từ định nghĩa của phép dời hình ta suy ra các hệ quả.

a. Phép biến hình đồng nhất Id là một phép dời hình

b. Phép biến hình đảo ngược của một phép dời hình cũng là một phép dời hình.

c. Tích của hai hay nhiều phép dời hình là một phép dời hình.

d. Phép tịnh tiến, phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục là những phép dời hình.

b) Các tính chất của phép dời hình

Định lý 1. Phép dời hình bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm và thứ tự của chúng trên đường thẳng chứa ba điểm và thứ tự của chúng trên đường thẳng chưa ba điểm đó. Cụ thể là

Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng A, B, C thành ba điểm A', B', C' thẳng hàng cũng theo thứ tự đó. Phép chứng minh xem như là bài tập cho bạn đọc.

Hệ quả 1. Phép dời hình biến một đường thẳng thành một đường thẳng, biến một tia thành một tia, biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng nào đó.

Hệ quả 2. Phép dời hình biến một tam giác thành một tam giác bằng nó, biến một góc thành một góc bằng nó, biến một đường tròn thành một đường tròn bằng nó, trong đó tâm biến thành tâm.

Định lý 2. Một phép dời hình phẳng có ba điểm bất động không thẳng hàng là phép biến hình đồng nhất.

Chứng minh. Giả sử $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ là một phép dời hình phẳng có ba điểm bất động không thẳng hàng (*Hình 3.*): $A = A' = f(A), B = B' = f(B)$ và

$C = C' = f(C)$. Thế thì, theo tính chất của phép dời hình, bất cứ một điểm nào trên các đường thẳng $(BC), (CA)$ hoặc (AB) đều là điểm bất động (hãy chứng minh điều đó). Từ đó dễ dàng suy ra mọi điểm M của mặt phẳng (ABC) đều là điểm bất động, và do đó $f = Id$

Hình 3

Hệ quả 3. Một phép dời hình phẳng $\mathcal{D} \neq Id$ thì hoặc không có điểm bất động nào hoặc có một điểm bất động duy nhất, hoặc có một đường thẳng mà mọi điểm của nó đều là điểm bất động, tức là có một đường thẳng cố định.

9 Bài tập về đại cương các phép dời hình phẳng

1.5 Chứng minh rằng phép dời hình bảo toàn sự thẳng hàng của bất kỳ ba điểm nào, do đó, biến đường thẳng thành đường thẳng (Định lý 1).

1.6 Chứng minh rằng phép dời hình bảo toàn quan hệ song song của hai đường thẳng và khoảng cách giữa chúng, nghĩa là, nếu $a \parallel b, a' = \mathcal{D}(a), b' = \mathcal{D}(b)$ thì $a' \parallel b'$ và $d(a', b') = d(a, b)$, trong đó $d(x, y)$ chỉ khoảng cách giữa hai đường thẳng song song x và y.

1.7 Hãy sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, chứng minh tính chất nêu trong Định lý 2 của phép dời hình phẳng.

1.8 Chứng minh chi tiết hơn Hệ quả 2 của Định lý 1 về tính chất của $\mathcal{D}$, tức là Phép dời hình biến một tam giác thành một tam giác bằng nó, trong đó trọng tâm G, trực tâm H, các tâm I và O của các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác tạo ảnh ABC theo thứ tự biến thành các tâm tương ứng G', H', I' và O' của tam giác ảnh $A'B'C'$.

1.9 Chứng minh rằng trong một phép tịnh tiến, ảnh d' của một đường thẳng d thì, hoặc song song với d hoặc trùng d. Từ đó suy ra tập hợp tất cả các đường thẳng bất biến trong một phép tịnh tiến.

1.10 Chứng minh rằng phép đối xứng tâm $\mathcal{D}(O)$ biến một véctơ $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ thành một véctơ đối $\overrightarrow{MN}$ với nó, tức là $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{M'N'} = -\vec{a}$. Từ đó suy ra rằng phép đối xứng - tâm bảo toàn phương của mọi đường thẳng; đồng thời tìm được tập hợp tất cả những đường thẳng bất biến qua phép đối xứng - tâm.

1.11 Chứng minh rằng phép đối xứng - trục $\mathcal{D}(\Delta)$ biến một đường thẳng a thành đường thẳng a' đối xứng với a qua trục Δ. Từ đó tìm được những phương đường thẳng bất biến trong một phép đối xứng - trục.

1.12 Hãy tìm những phép dời hình $\mathcal{D}$ biến một tam giác đều ABC thành chính nó.

1.13 Tìm những phép dời hình $\mathcal{D}$ biến một hình vuông $ABCD$ thành chính nó.

1.14 Tìm những phép dời hình $\mathcal{D}$ biến một hình bình hành $ABCD$ thành chính nó.

1.15 Tìm những phép dời hình $\mathcal{D}$ biến một hình chữ nhật $ABCD$ thành chính nó.

1.16 Chứng minh rằng tích của hai phép đối xứng trục có các trục vuông góc ở điểm O là phép đối xứng tâm $D(O)$. Ngược lại, một phép đối xứng tâm $\mathcal{D}(O)$ có thể phân tích bằng vô số cách thành tích của hai phép đối xứng trục $\mathcal{D}(\Delta_1)$ và $\mathcal{D}(\Delta_2)$ miễn là hai trục Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau ở O.

§ 2 Sự xác định và dạng chính tắc của một phép dời hình phẳng

Khi chúng ta nói cho một phép dời hình $\mathcal{D}$ mà tổng quát hơn là cho một phép biến hình f của $\mathcal{P}$ (mặt phẳng) tức là chỉ ra đầy đủ các yếu tố để xác định hoàn toàn phép dời hình (hay phép biến hình) đó của $\mathcal{P}$. Điều đó có nghĩa là

Với mỗi điểm M bất kỳ của $\mathcal{P}$ ta phải chỉ ra cách (quy tắc) dựng, cũng là cách xác định được điểm tương ứng (ảnh) M' của nó qua phép dời hình (hay phép biến hình) này.

Về phép dời hình, ta đã biết rằng một phép dời hình biến một tam giác ABC thành một tam giác $A'B'C'$ bằng nó, trong đó các cạnh tương ứng bằng nhau, các góc tương ứng bằng nhau. Mệnh đề sau đây khẳng định điều ngược lại

1 Về sự xác định một phép dời hình phẳng

Định nghĩa 3. Cho ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác bằng nhau cho trước trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ với $B'C' = BC, C'A' = CA, A'B' = AB$. Bao giờ ta cũng có một và chỉ một phép dời hình $\mathcal{D} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ biến A thành A', B thành B' và C

thành C'. Đồng thời, phép dời hình $\mathcal{D}$ này có thể phân tích thành tích của không quá ba phép đối xứng trục.

Chứng minh. Trước hết, để trình bày được gọn gàng ta quy ước ký hiệu như sau: $t[MN]$ là trung trục của đoạn thẳng MN; $\mathcal{D}\Delta_i$ hoặc $\mathcal{D}(\Delta_i)$ chỉ phép đối xứng trục có trục là Δ_i, trong đó i là chỉ số $1, 2, 3$.

Hình 4

Tồn tại. Nếu A và A' là hai điểm phân biệt, ta gọi $\Delta_1 = t[AA']$. Qua phép $\mathcal{D}(\Delta_1)$ tam giác ABC biến thành tam giác $A'B_1C_1$ bằng nó nên $\triangle A'B_1C_1 = \triangle A'B'C'$, do đó $A'B_1 = A'B'$, (*Hình 4.*)

Nếu $B_1 \neq B'$, ta gọi $\Delta_2 = t[B_1B']$ thì theo chứng minh trên, $A' \in \Delta_2$. Bởi vậy, qua phép $\mathcal{D}(\Delta_2)$ tam giác $A'B_1C_1$ biến thành tam giác $A'B'C_2$ bằng nó, nên $\triangle A'B'C_2 = \triangle A'B'C'$ và do đó $A'C_2 = A'C', B'C_2 = B'C'$. Đến đây, nếu $C_2 \neq C'$, ta gọi $\Delta_3 = t[C_2, C']$ thì A' và B' đều thuộc Δ_3. Và cuối cùng phép đối xứng trục $\mathcal{D}(\Delta_3)$ biến tam giác $A'B'C$ thành tam giác $A'B'C'$. Như vậy là, thực hiện liên tiếp ba phép đối xứng trục $\mathcal{D}(\Delta_i)$ với $i = 1, 2, 3$ thì tích $f = \mathcal{D}(\Delta_3) \circ \mathcal{D}(\Delta_2) \circ \mathcal{D}(\Delta_1)$ là một phép dời hình $\mathcal{D}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ trong đó $A' = \mathcal{D}(A)$, $B' = \mathcal{D}(B)$ và $C' = \mathcal{D}(C)$.

Trong quá trình chứng minh, chúng ta đã ba lần sử dụng đến từ \nếu" (cũng có nghĩa là \giả sử rằng") và mỗi lần như thế đều xuất hiện một phép đỗi xứng trục $\mathcal{D}(\Delta_i)$ theo thứ tự $i = 1, 2, 3$ Với nhận xét này, ta thấy rằng nếu $A' = A$ thì không phải thực hiện $\mathcal{D}(\Delta_1)$. Nếu $B_1 = B'$ thì không phải sử dụng đến $\mathcal{D}(\Delta_2)$ và nếu $C_2 = C'$ thì cũng không phải sử dụng đến $\mathcal{D}(\Delta_3)$.

Nói tóm lại, mỗi lần có một cặp điểm trong ba cặp điểm chỉ ra ở trên mà trùng nhau thì số phép đối xứng trục cần phải thực hiện giảm đi một.

Duy nhất. Giả sử rằng có hai phép dời hình $\mathcal{D}_1 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ và $\mathcal{D}_2 : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

cùng biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Thế thì phép biến hình (dời hình) tích $\mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1$ cũng là một phép dời hình $\mathcal{D}$ biến A thành A, B thành B và C thành C. Như vậy là phép dời hình $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1$ có ba điểm bất động không thẳng hàng là A, B và C. Theo Định lý 2, phép dời hình $\mathcal{D}$ này phải là phép đồng nhất ($\mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1 = Id$) và do đó

$$\mathcal{D}_2 \circ (\mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1) = \mathcal{D}_2 \circ Id = \mathcal{D}_2 \tag{1}$$

Mặt khác, nhờ tính chất kết hợp của tích các phép biến hình ta lại có

$$\mathcal{D}_2 \circ (\mathcal{D}_2^{-1} \circ \mathcal{D}_1) = (\mathcal{D}_2 \mathcal{D}_2^{-1}) \circ \mathcal{D}_1 = Id \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1 \tag{2}$$

Đối chiếu (1) và (2) ta suy ra $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$. Và Định lý 3 đã được chứng minh.

Hệ quả 1. Tích của n ($1 \leq n$ là một số nguyên dương bất kỳ) phép đối xứng trục trong mặt phẳng bao giờ cũng phân tích được thành tích của không quá ba phép đối xứng trục.

Thật vậy, vì phép đối xứng trục là một phép dời hình nên tích của n tuỳ ý những phép đối xứng - trục, cũng là một phép dời hình $\mathcal{D}$ nào đó. Bởi vậy theo Định lý 3, ta có điều cần chứng minh.

Hệ quả 2. Mỗi phép dời hình $\mathcal{D}$ nếu không phải là phép đồng nhất thì, hoặc là một phép đối xứng - trục hoặc là (tương đương với) tích của ba phép đối xứng - trục.

2 Quan hệ giữa các phép tịnh tiến và các phép quay phẳng với các phép đối xứng - trục trong mặt phẳng

Chúng ta đã biết phép đối xứng - trục, phép tịnh tiến và phép quay xung quanh một điểm (bao gồm trong đó cả phép đối xứng - tâm) đều là những phép dời hình. Nhưng Định lý 3 (Hệ quả 2) ở trên lại cho biết bất kỳ phép dời hình phẳng $\mathcal{D}$ nào, khác Id đều hoặc bản thân là một phép đối xứng-trục, hoặc tương đương với tích của hai hay ba phép đối xứng-trục. Vì thế, chúng ta cần phải làm rõ mối quan hệ giữa hai loại tích các phép đối xứng trục này với các phép tịnh tiến và các phép quay. Ngoài ra, Định lý 3 và các Hệ quảả 1, Hệ quảả 2 của nó còn có ý nghĩa hết sức đặc biệt và quan trọng ở chỗ chỉ ra rằng: Các phép đối xứng-trục đóng vai trò nền tảng tròng việc tạo thành tất cả các phép dời hình phẳng. Cũng chính vì vậy người ta còn nói rằng phép đối xứng - trục phẳng là tập hợp phần tử sinh $\{\mathcal{D}\}$ các phép dời hình phẳng.

Tính chất sau đây của phép tịnh tiến phẳng làm rõ mối quan hệ giữa phép tịnh tiến phẳng và các phép đối xứng-trục trong mặt phẳng.

Định lý 4. Tích của hai phép đối xứng-trục (trong mặt phẳng) có trục song song song là một phép tịnh tiến phẳng theo véctơ vuông góc với hai trục và gấp đối véctơ của phép tịnh tiến biến trục thứ nhất Δ_1 thành trục thứ hai Δ_2 (*Hình 5.*)

Hình 5

Định lý 4'. (Định lý đảo của Định lý 4). Đảo lại, mọi phép tịnh tiến phẳng theo một véctơ $\vec{v}$ $(\neq \vec{0})$ đều có thể thể phân tích được bằng vô số cách thành tích của hai phép đối xứng - trục có trục song song và vuông góc với véctơ tịnh tiến $\vec{v}$, trong đó trục thứ hai Δ_2 được suy ra từ trục thứ nhất Δ_1 bởi phép tịnh tiến theo véctơ $\frac{1}{2}\vec{v}$. Chứng minh cả hai Định lý 4' và 4 xem như là bài tập.

Mối quan hệ giữa phép quay xung quanh một điểm, trong đó có phép đối xứng - tâm và các phép đối xứng trục, ta có định lý sau:

Định lý 5. Tích của hai phép đối xứng trục trong mặt phẳng qua hai trục cắt nhau điểm O là phép quay xung quanh tâm O mà góc quay φ gấp đôi góc quay θ của phép quay tâm O biến trục thứ nhất Δ_1 thành trục thứ hai Δ_2

Hình 6

$$\mathcal{D}(\Delta_2) \circ \mathcal{D}(\Delta_1) = Q(O, \varphi = 2\theta \mod 2\pi)$$
$$(\Delta_1 \cap \Delta_2 = O,\ (\Delta_1, \Delta_2) = \theta \pmod{\pi})$$

Định lý 5'. (Định lý đảo của Định lý 5). Đảo lại, mọi phép quay phẳng $Q(O, \varphi)$ đều có thể phân tích được bằng số vô cách thành tích của hai phép đối xứng trục qua hai đường thẳng cắt nhau ở tâm quay O, miễn là trục đối xứng thứ hai Δ_2 được suy ra từ trục thứ nhất Δ_1 bởi phép quay tâm O góc $\theta = \varphi/2$ bằng nửa góc quay φ của phép quay được xét.

Về mối quan hệ giữa phép đối xứng tâm (phép quay đặc biệt, góc π) và các phép đối xứng - trục trong mặt phẳng, ta có định lý sau:

Định lý 6. Tích của hai phép đối xứng - trục trong mặt phẳng qua hai đường thẳng vuông góc là một phép đối xứng tâm mà tâm đối xứng O là giao điểm của hai đường thẳng đó. Hơn nữa, tích này giao hoán được (*Hình 7*)

Đảo lại, mọi phép đối xứng - tâm trong mặt phẳng đều có thể xem là hai tích của hai phép đối xứng - trục qua hai đường thẳng vuông góc với nhau ở tâm đối xứng.

$$\Delta_1 \neq \Delta_2,\ \Delta_1 \cap \Delta_2 = O;\ \mathcal{D}(\Delta_2) \circ \mathcal{D}(\Delta_1) = \mathcal{D}(\Delta_1) \circ \mathcal{D}(\Delta_2) = \mathcal{D}(O)$$

Điều này tương đương với Δ_1 vuông góc với Δ_2 tại điểm O.

Hình 7

Tổng hợp cả ba Định lý 4,5 và 6 (khi xét phép dời hình $\mathcal{D} \neq Id$ là tích của hai phép đối xứng trục trong mặt phẳng ta đi đến kết luận phát biểu trong định lý sau:

Định lý 7. Mọi phép dời hình ($\neq Id$) tương đương với tích của hai phép đối xứng trục thì, hoặc là một phép tịnh tiến, hoặc là một phép quay xung quanh một điểm hay đặc biệt là phép đối xứng tâm tuỳ theo hai trục đối xứng song song với nhau hoặc cắt nhau, hay đặc biệt cắt nhau theo một góc vuông.

Bây giờ ta xét trường hợp phép dời hình là tích của ba phép đối xứng trục. Trước hết ta đề cập đến trường hợp đặc biệt ở đó hai trục đối xứng song song và trục thứ ba vuông góc với hai trục song song đó. Như vậy, trong trường hợp này phép dời hình là tích của một phép tịnh tiến và một phép đối xứng - trục có trục cùng phương với véctơ tịnh tiến theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại (*Hình 8*). Dễ thấy rằng tích này giao hoán được. Ta có định nghĩa sau đây

Định nghĩa phép đối xứng - trượt. Tích giao hoán của một phép đối xứng - trục $\mathcal{D}(\Delta)$ và một phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ theo phương của trục đối xứng Δ được gọi là một phép đối xứng - trượt của mặp phẳng, và Δ được gọi là trục đối xứng - trượt. Ký hiệu: $\mathcal{D}(\Delta, \vec{v})$

$$\mathcal{D}(\Delta, \vec{v}) = \mathcal{T}(\vec{v}) \circ \mathcal{D}(\Delta) = \mathcal{D}(\Delta) \circ \mathcal{T}(\vec{v})$$

Điều này tương đương với $\Delta \parallel \vec{v}$. Trường hợp ba trục đối xứng song song với nhau, hoặc đồng quy ở một điểm ta có kết qủa sau.

Định lý 8. Tích của ba phép đối xứng - trục có các trục song song với nhau hoặc đồng quy ở một điểm là một phép đối xứng - trục (có truc song song với ba trục đầu hoặc đi qua điểm chung của ba trục đó) Hãy chứng minh điều đó, xem là bài tập bắt buộc.

Hình 8

Tóm lại, ngoài hai trường hợp phép dời hình $\mathcal{D}$ là phép đối xứng- trục hay phép đối xứng - trượt mà nói ở trên, chúng ta chỉ còn phải xét trường hợp tổng quát, ở đó ba trục đối xứng không song song với nhau, cũng không đồng quy, tức là

a) Hoặc đôi một cắt nhau tạo thành một tam giác

b) Hoặc một trục nào đó cắt hai trục còn lại song song

Tuy nhiên, chỉ việc sử dụng các Định lý 5 và 5', chúng ta dễ dàng đưa được trường hợp b) về trường hợp a), hoặc ngược lại (xem *Hình 9a, 9b*). Đặc biệt, có thể đưa cả hai trường hợp này về trường hợp một trong hai trục thứ hai hoặc thứ ba vuông góc với trục thứ nhất Δ_1 (trục này vẫn được giữ nguyên từ đầu đến giờ) để tạo thành một tam giác ADH vuông góc ở H (Hình 9e). Như vậy chúng ta đã thay cặp trục ban đầu Δ_2, Δ_3 hoặc Δ'_2, Δ'_3, bằng cặp trục d_2, d_3 trong đó $d_3 \perp \Delta_1$ và $\Delta_2 \cap \Delta_3 = \Delta'_2 \cap \Delta'_3 = d_2 \cap d_3 = A$ miễn là các góc ở A là $(\Delta_2, \Delta_3) = (\Delta'_2, \Delta'_3) = (d_2, d_3) = \alpha + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ không đổi. Ta gọi quá trình biến đổi tương đương này là quá trình tương đương hoá phép dời hình $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Delta_3) \circ \mathcal{D}(\Delta_2) \circ \mathcal{D}(\Delta_1)$ nói trên (xem *Hình 9a, b, c*).

Cuối cùng, ta thấy cặp trục HA, HD vuông góc với nhau ở hình H bởi cặp trục $d_3' = \Delta$ và d_1 cũng vuông góc với nhau ở H trong đó $H \in d_1 \parallel d_2$ và $\Delta = (HK)$ vuông góc với d_1 ở H và d_2 ở K (*Hình 9d*). Đến đây ta đã đưa được tích $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Delta_3) \circ \mathcal{D}(\Delta_2) \circ \mathcal{D}(\Delta_1)$ của ba phép đối xứng - trục ở dạng tổng quát ($\mathcal{D}$ không phải là phép đối xứng trục) về trường hợp đặc biệt đã xét đến ở trên. Đó là trường hợp của phép đối xứng - trượt ở đó hai trục đối xứng song song còn trục thứ ba thì vuông góc với hai trục này (*Hình 9d* suy ra *Hình 8*).

Hình 9

3 Dạng chính tắc của một phép dời hình phẳng

Sau khi thực hiện việc biến đổi tương đương tích của ba phép đối xứng trục kết hợp với các Định lý 7 và 8 ta thu được kết qủa sau đây nói lên mối quan hệ giữa một phép dời hình bất kỳ với phép đối xứng - trục trong mặt phẳng và tích của chúng gọi là dạng chính tắc của một phép dời hình phẳng.

Định lý 9. (Về dạng chính tắc của một phép dời hình phẳng) Một phép dời hình phẳng nếu không phải là phép đồng nhất thì, hoặc là một phép đối xứng-trục, hoặc là một phép quay hay một phép tịnh tiến, hoặc là một phép đối xứng-trượt.

Chú thích. Các phép quay và tịnh tiến nói trong Định lý 9 có thể gọi là những phép quay hay tịnh tiến thực sự, tức là góc quay $\varphi \neq 0$, véctơ tịnh tiến $\vec{v} \neq \vec{0}$. Còn phép quay góc $\varphi = 0$ hay phép tịnh tiến theo $\vec{v} \neq \vec{0}$ đều là không thực sự và là phép đồng nhất: $Q(P, 0) = Id$, $\mathcal{T}(\vec{0} = Id$.

Có thể xem phép đối xứng-trục là trường hợp đặc biệt của phép đối xứng - trượt ở đó véctơ trượt (véctơ tịnh tiến) bằng $\vec{0}$ tức là: $\mathcal{D}(\Delta, \vec{0}) = \mathcal{D}(\Delta)$.

Phép quay (thực sự) có một điểm bất đồng duy nhất là tâm quay; phép tịnh tiến (thực sự) không có điểm bất động nào; phép đối xứng - trượt cũng không có điểm bất động nào. Tuy nhiên, phép đối xứng-trục có một đường thẳng cố định mà mọi điểm trên đó đều là điểm bất động, đó là trục đối xứng.

4 Phân loại các phép dời hình phẳng (Bài đọc thêm bổ sung vào các §1 và §2)

1. Sự cần thiết phải đưa vào khái niệm đường thẳng định hướng mặt phẳng định hướng và góc định hướng trong mặt phẳng định hướng

Như chúng ta đã biết, đối tượng hình học đầu tiên đề cập đến vấn đề hướng của một đoạn thẳng đó là khái niệm véctơ. Sau đó người ta đã đưa vào khái niệm trục, tức là đã định hướng một đường thẳng Δ nào đó bằng cách đưa vào đó một điểm O, gọi là điểm gốc của một véctơ đơn vị $\vec{e}$. Tia Ox cùng hướng với $\vec{e}$ được gọi là tia dương và do đó, xác định được hướng dương của trục $\overrightarrow{\Delta}$. Tia Ox' là tia đối của tia Ox, ngược hướng với $\vec{e}$ được gọi là tia âm và xác định hướng âm (hay hướng nghịch) của trục $\overrightarrow{\Delta}$. Tiếp đó người ta đưa vào khái niệm độ dài đại số của một véctơ trên một trục đó là một số (số đại số) mà nhân với véctơ đơn vị $\vec{e}$ của trục thì cho ta một véctơ bằng véctơ đó ($\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{e}$, $\overline{AB}$ gọi là độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$ trên trục $\overrightarrow{\Delta}$, trong đó AB cũng là ký hiệu độ dài thẳng thường của đoạn thẳng AB).

Đối tượng hình học thứ hai mà chúng ta đã đề cập đến ở các mục 2 và 3 cũng có liên quan đến vấn đề hướng, đó là hai phép dời hình phẳng là tích của hai phép đối xứng trục, phép tịnh tiến và phép quay xung quanh một điểm trong mặt phẳng. Phép tịnh tiến gắn liền với khái niệm véctơ tịnh tiến là một đối tượng hình học (đoạn thẳng) có hướng. Còn phép quay phẳng xung quanh một điểm (gọi là tâm quay) thì gắn với khái niệm góc lượng giác gọi là góc quay; đó là khái niệm góc định hướng của hai véctơ có điểm gốc chung là tâm quay. Trong trường hợp này, người ta bắt buộc phải sử dụng đến khái niệm góc định hướng của hai véctơ mà độ lớn đại số của nó (góc quay) được xác định sai khác một bội của $360°$ hay 2π tuỳ theo đơn vị góc là độ hay radian. Rõ ràng rằng nếu sử dụng cách thông thường thì một điểm M bất kỳ (không trùng với tâm quay O) trong mặt phẳng sẽ ứng hai điểm M'_1 và M'_2 phân biệt cùng thoả mãn các điều kiện:

$$OM'_1 = OM'_2 = OM, \text{ và } \angle MOM'_1 = \angle MOM'_2 = \alpha > 0, \text{ cho trước } (0 < \alpha \neq 2\pi)$$

Ngoài góc định hướng của hai véctơ được sử dụng đến trong phép quay người ta cũng cần đến và sử dụng góc định hướng của hai đường thẳng. Chẳng hạn, nếu phép quay $Q(O, \alpha)$ tâm O góc $\alpha \pmod{2\pi}$ biến véctơ $\overrightarrow{AB}$ thành véctơ $\overrightarrow{A'B'}$, thì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha \mod 2\pi$. Nếu xem $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$, là hai trục thì góc định hướng giữa hai trục $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cũng bằng góc giữa hai véctơ đó, và xác định sai khác $2k\pi$. Nhưng phép quay $Q(O, \alpha)$ đã biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{A'B'}$ thì cũng biến đường thẳng (AB) thành đường thẳng $(A'B')$ sao cho

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha + 2k\pi, \text{ và } ((AB), (A'B')) = \alpha + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

trong lúc góc thông thường của hai đường thẳng AB và $A'B'$, theo định nghĩa, thì bằng α hoặc $\pi - \alpha$ nếu $0 < \alpha < \pi/2$ hoặc $\pi/2 < \alpha < \pi$.

Lẽ tự nhiên, để thuận tiện cho việc nghiên cứu tính chất của các hình hình học trong mặt phẳng, người ta cũng còn đưa vào khái niệm mặt phẳng định hướng. Chúng ta không có điều kiện xây dựng chặt chẽ và thật chính xác toán học các khái niệm hình học liên quan đến vấn đề hướng như mặt phẳng định hướng, góc định hướng của hai véctơ hay của hai trục, góc định hướng của hai đường thẳng, tam giác đinh hướng, v.v... trong mặt phẳng định hướng. Chúng ta chỉ làm rõ những khái niệm một cách trực quan hình học, thông qua việc quan sát cụ thể một cách trực giác sự chuyển động của một điểm trên một đường tròn, hay trên một tam giác, một đa giác đơn (cũng tức là một đường gấp khúc khép kín không có điểm tự cắt) hay trên một đường cong kín.

Một điểm M chuyển động trên một đường tròn (v) có thể di chuyển theo hai hướng khác nhau. Một cách trực quan, chúng ta chấp nhận sự việc quan sát này trên mọi đường tròn (v) của mặt phẳng $\mathcal{P}$, tồn tại hai hướng đi. Ta có định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1. Định hướng đường tròn (v) là chọn một trong hai hướng đi trên (v).

Khi đã cho hai đường tròn định hướng (v) và (v') trên mặt phẳng $\mathcal{P}$, chúng ta có khả năng nhận biết rằng (v') được định hướng theo \cùng một hướng" với (v) hay theo hướng ngược lại.

Hình 10

Một nửa đường thẳng (cũng gọi là một tia) Oy có gốc trùng với tâm O của một đường tròn (v) quay xung quan điểm gốc O của nó theo hai hướng khác nhau như hướng chuyển động của điểm M, ở đó tia gốc Oz cắt (v) trên đường tròn (v) (*Hình 10*).

Định nghĩa 2. Định hướng mặt phẳng $\mathcal{P}$ là chọn cùng một hướng đi trên tất cả các đường tròn của mặt phẳng, hướng này gọi là hướng thuận. Thường thì người ta quy ước hướng thuận của phép quay trong mặt phẳng là hướng tương ứng với hướng ngược chiều quay của kim đồng hồ (*Hình 10*). Hướng ngược lại gọi là *hướng nghịch*.

Hướng thuận còn được gọi là hướng dương hay hướng lượng giác, hướng nghịch còn được gọi là hướng âm, và ký hiệu dương hay âm bởi dấu $+$ hay $-$.

Như vậy, mặt phẳng $\mathcal{P}$ gọi là đã được định hướng. Chiều đi thuận trên mọi đường cong kín không tự cắt và đặc biệt trên mọi đa giác đơn hoặc mọi đường tròn của mặt phẳng ứng với chiều thuận trong mặt phẳng.

Định nghĩa 3. Ta gọi là đường tròn lượng giác, một đường tròn cong bán kính bằng đơn vị dài (đường trong đơn vị) và được định lý theo hướng thuận.

Định nghĩa 4. Nếu chiều đi trên các cạnh AB, BC và CA của một tam giác ABC trong mặt phẳng định hướng $\mathcal{P}$ tương ứng với chiều thuận của mặt phẳng $\mathcal{P}$ thì ta nói tam giác ABC có hướng dương, hay được định hướng dương (*Hình 11a*). Trái lại nếu chiều đi trên tam giác đó ứng với chiều nghịch của $\mathcal{P}$ thì tam giác ABC có hướng âm, hay được định hướng âm (*Hình 11b*). Như vậy, hai tam giác có cùng ba đỉnh A, B và C thì tam giác ABC và BAC là hai tam giác trong mặt phẳng định hướng $\mathcal{P}$ có hướng ngược nhau. Ngoài ra cũng dễ thấy rằng trong $\mathcal{P}$ thì hướng của một tam giác định hướng ABC trùng với hướng của các góc định hướng ABC trùng với hướng của các góc định hướng $(AB, AC), (BC, BA)$ và (CA, CB)

Từ các nhận xét trên ta cũng thấy rằng hướng của một tam giác không thay đổi khi ta hoán vị vòng quanh các đỉnh của nó (phù hợp với Định nghĩa 4 ở trên). Cũng vì lẽ đó mà người ta ưa dùng định nghĩa sau

Định nghĩa 4'. Mộ bộ ba điểm sắp thứ tự $\{A, B, C\}$ của mặt phẳng định hướng $\mathcal{P}$ được gọi là một tam giác định hướng (hay có hướng) của mặt phẳng đó và ký hiệu là $\triangle ABC$ như thông thường (như chú thích đến cách viết) theo thứ tự các đỉnh.

Hình 11

Khi $\triangle ABC$ đã được định hướng thì diện tích của nó một cách tự nhiên trở thành diện tích đại số và ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 5. Ta gọi là diện tích đại số của tam giác định hướng ABC (trong mặt phẳng định hướng $\mathcal{P}$), một số đại số bằng diện tích của $\triangle ABC$ (không định hướng) về giá trị tuyệt đối, nhưng lấy dấu $+$ hay $-$ tuỳ theo tam giác ABC có hướng thuận hay hướng nghịch và ký hiệu là $\overline{s}(ABC)$ hay vắn tắt là $\overline{ABC}$. Vậy là $\overline{s}(ABC)$ hay $\overline{ABC} = \pm s(ABC)$.

2. Một số vấn đề bổ sung liên quan đến những đối tượng hình học có hướng và số đo đại số của chúng

Như ở mục 2, các Định lý 5 và 5, đã chỉ ra rằng tích của hai phép đối xứng trục (trong mặt phẳng) có trục cắt nhau là một phép quay phẳng xung quanh giao điểm O của hai trục đó. Bởi vậy, ta cũng có thể lấy nội dung Định lý 5 làm định nghĩa của phép quay như một số tác giả đã làm. Tuy nhiên, nếu đã đưa vào khái niệm mặt phẳng định hướng góc định hướng của hai tia cùng gốc hoặc góc giữa hai véctơ thì ta có thể đưa ra định nghĩa phép quay một cách trực quan hình học hơn như sau.

Định nghĩa phép quay phẳng. Trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ giả sử đã được định hướng cho một điểm O cố định và một góc định hướng (góc lượng giác) $\mathcal{P}$, xác định sai khác $2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ta gọi là phép quay tâm O với góc quay φ, trong mặt phẳng $\mathcal{P}$, ký hiệu là $Q(O, \varphi)$ hay $Q_{O,\varphi}$, một phép biến hình điểm O thành chính nó và biến mỗi điểm $M \neq O$ thuộc $\mathcal{P}$ thành điểm M', cũng thuộc $\mathcal{P}$, xác định bởi các hệ thức (*Hình 12*)

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \varphi, \text{ và } OM' = OM$$

Khi điểm M vạch nên một hình $\mathcal{H}$ thì điểm M', tương ứng của nó vạch lên hình tương ứng (hình biến đổi hay ảnh) của $\mathcal{H}$ trong phép quay đó, ký hiệu $\mathcal{H}' = Q_{O,\varphi}(\mathcal{H})$.

Hình 12

Theo định nghĩa trên, nếu φ và φ' là hai góc định hướng mà số đo đại số của chúng hơn kém nhau một bội số của 2π thì $Q(O, \varphi)$ và $Q(O, \varphi')$ là một. Bởi vậy, người ta thường chọn φ sao cho $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ hay đôi khi $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Cũng theo Định nghĩa trên thì $Q(O, \varphi = 0)$ là phép đồng nhất, và $Q(O, \pi)$ hoặc $Q(O, -\pi)$ là phép đối xứng $\mathcal{D}(O)$ quan tâm O.

Như chúng ta đã biết giữa ba điểm A, B, C bất kỳ trên một trục Δ ta có một hệ thức giữa các độ dài đại số của ba véctơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CA}$ trên trục đó như sau gọi là hệ thức Salờ (Chasles)

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{CA} \text{ hay là } \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = O, \ (\forall A, B, C \in \triangle)$$

Đối với số đo (độ lớn) đại số của các góc định hướng giữa hai phương trình định hướng (bao gồm các góc giữa hai tia, giữa hai véctơ, giữa hai trục) và góc định hướng giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng định hướng, ta cũng có những hệ thức tương tự.

Hệ thức Salờ (Chasles) về góc định hướng). Với bất cứ ba véctơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nào, hoặc ba đường thẳng a, b, c nào trong mặt phẳng, ta đều có những hệ thức sau

$$\begin{aligned}
&(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\
&(\vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}) \pmod{2\pi} \\
&(a, b) + (b, c) = (a, c) + k\pi \\
&(a, b) = -(b, a) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

Đối với diện tích đại số, ta cũng có hệ thức tương tự (hãy tự kiểm nghiệm)

Hệ thức Salờ về diện tích đại số của tam giác định hướng. Với mọi điểm M thuộc mặp phẳng định hướng của tam giác định hướng ABC cho trước, ta có hệ thức sau đây về diện tích đại số của tam giác.

$$\overline{s}(MBC) + \overline{s}(MCA) + \overline{s}(MAB) = \overline{s}(ABC), \ \forall M \in mp(ABC)$$

hay là

$$\overline{MBC} + \overline{MCA} + \overline{MAB} = \overline{MBC} + \overline{AMC} + \overline{ABM} = \overline{ABC}, \ \forall M \in mp(ABC)$$

Chú thích. Khi sử dụng góc định hướng giữa hai véctơ và góc định hướng giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng, cần lưu ý đặc biệt đến mối quan hệ giữa góc ở tâm và góc nối tiếp cùng chắn một cung trên đường tròn. Trong một đường tròn (v), một góc ở tâm và một góc nối tiếp định hướng được gọi là liên kết khi chúng chắn cùng một cung định hướng. Nếu để ý rằng số đo đại số của cung định hướng $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O) bằng số đo đại số của góc ở tâm $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA})$ thì khi so sánh các đại số của góc ở tâm và góc nối tiếp định hướng liên kết, ta có kết qủa sau (đề nghị tự chứng minh).

Định lý 10. Khi ba điểm A, B, M cùng thuộc một đường tròn tâm O thì ta có hệ thức

$$(MA, MB) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + k\pi$$

Định lý trên có thể được phát biểu lại như sau: Một góc định hướng (của hai đường thẳng) nội tiếp một đường tròn thì bằng một nửa góc ở tâm định hướng (của hai véctơ) liên kết.

Như vậy nếu $(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi}$ thì $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \widehat{AB} = 2\alpha, \pmod{2\pi}$.

Hình 13

Sau đây là một số hệ quả suy ra từ định lý cơ bản (Định lý 10) trên đây cần thiết cho việc ứng dụng vào giải toán (toán chứng minh cũng như quỹ tích)

Định lý 11. Muốn cho bốn điểm A, B, C, D (không thẳng hàng) cùng thuộc một đường tròn, điều kiện cần và đủ là

$$(CA, CB) = (DA, DB) = \varphi \neq 0; \quad \pmod{\pi}$$

Chú ý. Nếu $(CA, CB) = (DA, DB) = 0$ thì bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng

Định lý 12.

a) $\{M|(MA, MB) = \alpha \pmod{\pi)}\}$ là một đường tròn đi qua A và B, gọi là đường tròn chứa góc định hướng của các đường thẳng đi qua A và B

b) $\{M|(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \pmod{2)}\pi$ là một cung tròn $A\alpha B$ có hai đầu nút là A và B, gọi là cung chứa góc định hướng α của hai tia đi qua A và B.

c) Cơ sở của sự phân loại các phép dời hình phẳng.

Định lý 13. Phép đối xứng trục trong mặt phẳng biến một tam giác thành một tam giác bằng nó nhưng ngược hướng với nó.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh tính chất sau đây là đủ: phép đối xứng - trục biến một góc định hướng (giữa hai véctơ, hoặc giữa hai đường thẳng) trong mặt phẳng định hướng thành góc đối với nó (sai khác $2k\pi$, hoặc là $k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$)

Xét góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ và góc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ ảnh của nó trong phép đối xứng trục $\mathcal{D}(\Delta)$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{A'B'} = \vec{b'}\ \overrightarrow{AC'} = \vec{c'}$, và $\vec{e}$ là véctơ đơn vị chỉ phương của trục Δ.

Dễ thấy rằng

$$(\vec{e}, \vec{b'}) = -(\vec{e}, \vec{b}), \quad (\vec{e}, \vec{c'}) = -(\vec{e}, \vec{c}) \tag{i}$$

Lại theo hệ thức Salờ ta có

$$(\vec{b'}, \vec{c'}) = (\vec{e}, \vec{c'}) - (\vec{e}, \vec{b'}) \text{ và } -(\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{e}, \vec{c}) - (\vec{e}, \vec{b}) \tag{ii}$$

Hình 14

Do đó, từ các đẳng thức dạng (i) và (ii) ta được $(\vec{b'}, \vec{c'}) = -(\vec{b}, \vec{c})$, tức là $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Từ đây ta được điều phải chứng minh.

Cuối cùng vì hướng của tam giác ABC trùng với hướng của góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ cũng như hướng của tam giác $A'B'C'$ trùng với hướng của góc $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ ta suy ra tam giác $A'B'C' = \mathcal{D}_\Delta(ABC)$ ngược hướng với tam giác ABC, và do đó hai tam giác là phản bằng nhau, tức là $\triangle A'B'C' \doteqdot \triangle ABC$

Hệ quả. Phép đối xứng - trục là một phép dời hình, làm đảo ngược hướng của hình. Đến đây, chúng ta đã có cở sở để phân loại các phép dời hình (đẳng cự) phẳng.

Định nghĩa 1. Các phép dời hình phẳng được chia làm hai loại, loại một và loại hai tuỳ theo nó bảo toàn hướng hay đảo ngược hướng hình. Phép dời hình loại một cũng được gọi là phép dời hình thuận, hay gắn gọn là phép dời hình. Phép dời hình loại hai cũng gọi là phép dời hình nghịch, hay phép phản chiếu hoặc phép dời hình.

Định nghĩa 2. Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ là ảnh của nhau trong một phép dời hình thuận được gọi là hai hình bằng nhau thuận, hay ngắn gọn là hai hình bằng nhau; ký hiệu $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$

Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ là ảnh của nhau trong một phép dời hình nghịch được gọi là hình bằng nhau nghịch, hay phản bằng nhau, ký hiệuh $\mathcal{H}' \doteqdot \mathcal{H}$.

d) Dạng chính tắc của phép dời hình thuận và phép dời hình nghịch

Định lý 14. (Về dạng chính tắc của các phép dời hình và phản dời hình) Một phép dời hình thuận trong mặt phẳng thì, hoặc là phép biến hình đồng nhất, hoặc là một phép quay xung quanh một điểm, hoặc là một phép tịnh tiến.

Một phép dời hình nghịch (phản dời hình) trong mặt phẳng thì, hoặc là một phép đối xứng - trục, hoặc là một phép đối xứng - trượt.

Chú ý.

Phép quay thực sự ($\neq Id$) là phép dời hình thuận có một điểm bất đồng duy nhất là tâm quay.

Phép đối xứng trục là phép phản dời hình có một đường thẳng cố định gồm toàn những điểm bất động.

Phép tịnh tiến là phép dời hình và phép đối xứng - trượt thực sự là phép phản dời hình không có điểm bất động.

5 Bài tập về sự xác định và dạng chính tắc của phép dời hình phẳng

2.1 Chứng minh định lý: Trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB và $A'B'$ thế thì tồn tại hai và chỉ phép đẳng cự $f_i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $i = 1, 2$ của $\mathcal{P}$ biến A thành A', B thành B', trong đó một phép là dời hình (thuận) còn phép kia là dời hình nghịch (phản dời hình)

2.2 Trong mặt phẳng cho hai tam giác cân bằng nhau ABC và $A'B'C'$ và cân ở A và A'. Tìm các phép dời hình và phản dời hình biến tam giác thứ nhất thành tam giác thứ hai.

2.3 Cho hai tam giác đều, có cạnh băng nhau ABC và $A'B'C'$, hãy xác định tất cả các phép dời hình và phản dời hình phẳng biến tam giác thứ nhất thành tam giác thứ hai.

2.4 Trên mặt phẳng cho hai tam giác ABC, $A'B'C'$ nhau và cùng hướng nhưng không có hai cạnh tương ứng nào song song với nhau. Chứng minh rằng có một điểm O duy nhất cách đều cả ba cặp điểm $A, A'; B, B'$; và C, C'.

2.5 Trong mặt phẳng cho hai tam giác phản bằng nhau, $\triangle A'B'C' \doteqdot \triangle ABC$. Chứng minh rằng các điểm chung A_o, B_o và C_o của các đoạn thẳng AA', BB', và CC' nối các cặp định tương ứng mà ba điểm thẳng hàng.

2.6 Chứng minh Định lý 8

2.7 Trong mặt phẳng cho ba đường thẳng Δ_i, $(i = 1, 2, 3)$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng Δ_i, $(i = 1, 2, 3)$ đồng quy hoặc song song là tích $f = \mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ cũng là phép đối xứng - trục, trong đó $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}(\Delta_i)$, $i = 1, 2, 3$

2.8 Chứng minh rằng tích của hai phép quay $Q_1(O_1, \varphi_1)$ và $Q_2(O_2, \varphi_2)$ là một phép quay hay phép tịnh tiến tuỳ theo tổng $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ của một các góc quay không là bội của 2π (radian) hay là bội của 2π (cũng tức là $\varphi = 0$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

2.9 Chứng minh rằng tích của một phép quay và một phép tịnh tiến (theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại) là một phép quay.

2.10 Cho $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là hai tứ giác lồi của mặt phẳng $\mathcal{P}$. Chứng minh rằng nếu $A'B' = AB, B'C' = BC, C'A' = CA, A'D' = AD$ thì $B'D' = BD$ và $C'D' = CD$ và hai tứ giác đó bằng nhau (thuận hay nghịch: $A'B'C'D' = ABCD$ hoặc $A'B'C'D' \doteqdot ABCD$

2.11 Cho hanh hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có cạnh bằng nhau và có một đỉnh A chung. Tìm tất cả các phép dời hình và phản dời hình biến hình vuông thứ nhất thành hình vuông thứ hai.

2.12 Giả sử $A_1A_2A_3A_4$ là một tứ giác (lồi) nối tiếp một đường tròn (O) Gọi H_i là trực tâm của tam giác $A_iA_kA_l$ với $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4, \}$. Chứng minh rằng hai tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ và $H_1H_2H_3H_4$ bằng nhau thuận

$$\mathcal{H}'(H_1H_2H_3H_4) = \mathcal{H}(A_1A_2A_3A_4)$$

Hướng dẫn. Chứng minh rằng có một phép đối xứng tâm biến A_i thành $H_i\,(i = 1, 2, 3, 4,)$ do đó biến $\mathcal{H}(A_1A_2A_3A_4)$ thành $\mathcal{H}'(H_1H_2H_3H_4)$.

§ 3 Vận dụng phép dời hình vào việc giải một số bài toán hình học phẳng, Thí dụ minh hoạ và bài tập

1 Ứng dụng phép tịnh tiến và việc khảo sát tính chất của hình và dựng hình.

Thí dụ 1. Chứng minh tính chất sau đây của trực tâm tam giác. Trong mọi tam giác, khoảng cách từ mỗi đỉnh đến trực tâm gấp đôi khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đến cạnh đối diện.

Chứng minh. Ta cần chứng minh $d(A, H) = 2d(O, BC)$ hay $AH = 20A_o$, trong đó d là ký hiệu khoảng cách và A_o là trung điểm cạnh BC. Nhưng cả hai đoạn thẳng AH và OA_o đều vuông với BC, hơn nữa lại cùng hướng. Bởi vậy, ta nghĩ đến sử dụng véctơ và bài toán trở thành chứng minh $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA}_o = \overrightarrow{OO'}$, trong đó $O' = \mathcal{D}(O)$. Từ đó suy ra $AH = 2OA_o$.

Hình 15

Thật vậy, vì điểm H' đối xứng với trực tâm H của $\triangle ABC$ qua cạnh BC thuộc vào đường tròn ngoại tiếp tam giác (*Hình 15*) nên các đường tròn (ABC) tâm O và (HBC) tâm O' đối xứng nhau qua BC thì bằng nhau (có cùng bán kính). Và do đó, chúng lại còn tương ứng với nhau trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ theo véctơ $\vec{v} = \overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OA}_0$. Vì $\mathcal{T}(\vec{v})$ biến A thành H nên ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA}_o$.

Thí dụ 2. Tam giác ABC nội tiếp tròn (O) cho trước có hai đỉnh A, B cố định

a) Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng với mọi vị trí của C véctơ $\overrightarrow{CH}$ luôn được nhìn từ A dưới một góc định hướng (của các đường thẳng) không đổi (*Hình 16*)

Hướng dẫn giải.

a) Trước hết thiết lập hệ thức véctơ $\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OC_o}$, trong đó C_o là trung điểm cạnh AB (xem Thí dụ 1) từ đó suy ra, $\{H\}$ là đường tròn (O') được suy ra từ (O) bởi phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{v})$ theo $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{OC_o}$

b) Gọi B' là ảnh của B trong phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{OC_o}$, thế thì $B' = \mathcal{D}(B)$ là điểm xuyên tâm - đối của A trên đường tròn quỹ tích (O') của C. Từ đẳng thức $(\overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'H}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \pmod{2\pi}$ suy ra $(AB', AH) = (AB, AC)$, $(\bmod\ \pi)$ và sau đó áp dụng hệ thức Salờ, ta được

$$(AC, AH) = (AB, AB') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}), \text{ không đổi}, \quad (\bmod\ \pi)$$

Hình 16

Thí dụ 3. Dựng một hình thang biết độ dài một cạnh đáy, độ dài hai đường chéo và góc (góc nhọn) giữa chúng.

Hình 17

Phân tích. Giả sử hình thang $ABCD (AB \parallel CD)$ đã dựng được, có cạnh đáy $AB = a$, hai đường chéo $AC = m, BD = n$ và góc $(AC, BD) = \varphi \leq \pi/2$. Để làm xuất hiện một tam giác có một góc bằng φ hoặc $\pi - \varphi$ và hai cạnh góc đó bằng m và n, lẽ tự nhiên ta nghĩ đến sử dụng phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{DC}$. Và do đó, bài toán được quy về dựng tam giác ACE có $CA = m, CE = n$ và $\angle ACE = \pi - \varphi$ trong đó E được suy ra từ B trong phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{DC}$ (*Hình 17*) nghĩa là $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ hay E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBE$ và $\varphi \leq \pi/2$ là góc của hai đường chéo AC, BD. Từ đó ta suy ra cách dựng hình thang cần tìm theo trình tự sau. Trước hết dựng tam giác ACE như đã nói ở trên. Sau đó, trên tia $[AE)$ dựng điểm B xác định bởi $AB = a$. Cuối cùng, dựng điểm D xác định bởi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB}$, là đỉnh thứ tư của hình hành $CEBD$.

Biện luận. Bài toán có nghiệm hình khi và chỉ khi $a < a'$, trong đó $a' = AE = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn\cos\varphi}$ và do đó khi và chỉ khi $0 < \varphi < \varphi_0 = \arccos\frac{a^2-(m^2+n^2)}{2mn}$

2 Ứng dụng phép đối xứng tâm vào kho sát tính chất của hình và dựng hình .

Thí dụ 4. Chứng minh rằng nếu một tam giác có đường trung tuyến và đường phân giác phát xuất từ cùng một đỉnh mà trùng nhau thì tam giác đó là cân.

Hình 18

Thật vậy, giả sử tam giác có đường trung tuyến AD đồng thời là đường phân giác (*Hình 18*). Vì sẵn có D là trung điểm cạnh BC rồi, hay B và C đối xứng với nhau qua điểm D nên ta nghĩ đến phép đối xứng - tâm $\mathcal{D}(D)$. Phép này biến A thành A' và do đó, A' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $BACA'$ tâm D. Bởi vậy $AC = BA'$ và $\angle A'_2 = \angle A_2 = \angle A_1$; suy ra tam giác BAA' cân ở B và do đó $BA' = BA$ từ đó ta được $AB = AC$ và tam giác ABC cân ở A.

Thí dụ 5. (Vận dụng giải toán dựng hình) Qua giao điểm P của hai đường tròn cắt nhau (O_1) và (O_2) đã cho hãy kẻ một cát tuyến Δ sao cho nó định ra trên các đường tròn đó hai dây cung bằng nhau.

Phân tích. Giả sử đã dựng được cát tuyến Δ đi qua P cắt (O_1) ở A và (O_2) ở B sao cho $AP = PB$, cũng tức là A và B đối xứng nhau qua P. Ta nghĩ đến việc sử dụng phép đối xứng - tâm P để tìm ra tính chất của cát tuyến Δ cần dựng. Như vậy là đã có $A = \mathcal{D}_P(B)$ và $B \in (O_2)$ đã cho. Suy ra điểm A cần xác định phi thuộc đường tròn (O_2) đối xứng với đường tròn (O_2) qua điểm P. Bởi vậy, cát tuyến Δ cần dựng đi qua P và giao điểm thứ hai A của hai đường tròn (O_1) và (O_2). (*Hình 19*). Từ đó suy ra cách dựng Δ theo trình tự sau. Trước hết dựng $O'_2, = \mathcal{D}_P(O_2)$, rồi dựng đường tròn tâm O'_2 đi qua P, nó cắt lại (O_1) ở A, khác với P. Sau cùng, dựng giao điểm thứ hai B của tia $[BP)$ và đường tròn (O_2). Dễ thấy rằng $AP = PB$ và bài toán luôn có nghiệm duy nhất.

Hình 19

3 Những điều cần lưu ý khi vận dụng phưng pháp biến hình vào việc giải toán hình học

a) Phương pháp biến hình trong việc giải toán hình học.

Những bài toán hình học trình bày dưới dạng những thí dụ minh hoạ sắp đặt vào hai mục 1 và 2 ở trên đề cập tương đối đầy đủ các dạng toán hình học, chỉ thiếu dạng tính toán các đại lượng hình học. Dạng chứng minh tính chất hình học của các hình được đề cấp đến trong các thí dụ 1, thí dụ 2 phần b) và thí dụ 4. Thí dụ 2 phần a) đề cập đến dạng toán quỹ tích (tìm tập hợp điểm). Toán dựng hình đề cập đến trong các thí dụ 3 và thí dụ 5. Tuy nhiên điều muốn nói ở đây là cả năm bài toán trình bày trên đây đều có một đặc điểm chung về phương pháp giải . Phép tịnh tiến đã được sử dụng để giải các bài toán nêu trong ba thí dụ đầu và phép đối xứng - tâm đã được vận dụng vào hai thí dụ 4 và 5. Bởi vậy có thể gọi tên phương pháp giải các bài toán đó là phương pháp tịnh tiến và phương pháp đối xứng (cụ thể hơn là đối xứng - tâm) gắn với tên gọi của phép biến hình được sử dụng đến.

Những bài toán này đều có thể giải được về cơ bản chỉ cần kiến thức hình học thuộc các lớp trung học cơ sở, nhưng đã được chúng ta giải lại theo quan điểm biến hình. Như vậy là trong việc khảo sát tính chất của các hình học và nói đầy đủ hơn là trong việc giải toán hình học, ngoài phương pháp tổng hợp, phương pháp toạ độ và phương pháp véctơ mà chúng ta đã biết và đã sử dụng, còn có phương pháp biến hình. Đó là phương pháp vận dụng tính chất của các phép biến hình điểm thường gặp như dời hình, đồng dạng v.v... vào việc khảo sát tính chất hình học của các hình, tính toán các đại lượng hình học, tìm tập hợp điểm (quỹ tích) và vào việc giải cả toán dựng hình.

b) Cách nhận biết lớp các bài toán học có khả năng giải được bằng phương pháp biến hình.

Về mặt nguyên tắc, bất kỳ bài toán hình học nào cũng có thể giải bằng phương pháp toạ độ (cũng còn gọi là phương pháp đại số). Tuy nhiên, nhiều bài toán hình học giải bằng phương pháp tổng hợp thông thường lại đi đến kết quả nhanh chóng và gọn gàng cũng như đẹp hơn nhiều. Cũng vậy, nhiều bài toán hình học có thể giải được nhanh chóng và gọn gàng nếu biết sử dụng phương pháp véctơ.

Như chúng ta đã thấy, thường thì một bài toán hình học có thể giải được bằng nhiều cách khác nhau, chí ít là một cách, phương pháp tổng hợp hay phương pháp toạ độ. Tuy nhiên đứng trước một bài toán mới về hình học ta nên xem xét cẩn thận để lựa chọn phương pháp giải thích hợp sao cho đạt kết quả nhanh, gọn nhất.

Để có thể giải một bài toán hình học bằng phương pháp biến hình, trước hết phi nhận ra được dấu hiệu của lớp các bài toán có khả năng giải được bằng phương pháp này. Đương nhiên, không phải bài toán nào cũng giải được bằng phương pháp biến hình. Một câu hỏi được đặt ra là: làm thế nào để nhận biết được một bài toán hình học nào đó có khả năng giải được bằng phương pháp biến hình?

Muốn vậy, ta hãy trở lại phân tích từng thí dụ đã được chỉ ra ở trên. Cơ sở của việc có thể sử dụng phép biến hình này nọ vào mỗi bài toán (thí dụ) đã được chỉ ra. Thường thì trong dữ kiện của bài toán và (hoặc) trong tính chất của hình đòi hỏi phải thiết lập (chứng minh) hoặc trong điều kiện đỏi hỏi ở hình cần dựng đã xuất hiện những yếu tố có mỗi liện hệ đáng chú ý đến một phép biến hình cụ thể nào đó. Chẳng hạn, trong thí dụ khi thiết lập một tính chất của trực tâm tam giác, sau khi sử dụng một tính chất khác đã biết của trực tâm là các điểm đối xứng của nó qua mỗi cạnh đều nằm trong một đường tròn ngoại tiếp tam giác thì tức khắc làm xuất hiện hai đường tròn bằng nhau là (ABC) tâm (O) và (HBC) tâm (O') trong đó H là trực tâm tam giác ABC còn O' đối xứng với O qua BC. Hai đường tròn này vừa là tương ứng với nhau không nhưng trong phép đối xứng trục $\mathcal{D}(BC)$ và trong phép đối xứng - tâm $\mathcal{D}(A_o)$ trong đó A_o là chung điểm chung của BC và OO' mà còn tương ứng với nhau cả trong phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\overrightarrow{v})$ theo véctơ $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OO'}$. Chính mối liên hệ này của hai đường tròn bằng nhau đã giúp ra thiết lập được hệ thức véctơ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OA_o}$ (về phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OO'}$ không những biến O thành O' và (O) thành (O'), trong đó điểm A trên (O) biến thành điểm H trên (O').

Tóm lại, muốn nhận biết được một bài toán hình học nào đó có khả năng giải được bằng phương pháp biến hình (cụ thể là phương pháp dời hình, bao gồm tịnh tiến, đối xứng tâm, đối xứng - trục, quay hoặc phương pháp đồng dạng v.v...), trước hết chúng ta phải xem xét, phân tích nội dung bài toán để tìm ra yếu tố nào trong đó có mối liên hệ đáng chú ý đến một phép biến hình cụ thể nào đó. Sau đó, vận dụng các tính chất của phép biến hình này mà tìm ra lời giải hay đáp số của bài toán được xét.

Đặc biệt đáng chú ý là phương pháp biến hình cũng thường gặp và được sử dụng trong việc giải một bài toán quỹ tích và dựng hình, nhất là toán dựng hình . Theo quan điểm của lý thuyết tập hợp thì hình là một tập hợp điểm nào đó. Bởi vậy, việc sử dụng một hình học nào đó lại quy về dựng một số điểm hữu hạn để để xác định, cũng có nghĩa là đủ để tạo nên hình đó. Trong mặt phẳng thông thường một điểm được xác định bởi giao của hai đường, trong đó có đường thẳng và đường conic mà đường tròn là một elíp đặc biệt. Trong hai đường dùng để xác định điểm phải dựng là một trong các giao điểm của chúng, thường thì một đường đã có sẵn trong giữ kiện của bài toán còn đường thứ hai là quỹ tích của những điểm có một tính chất đặc trưng hình học nào đó và được suy ra từ một đường đã cho trong dữ kiện của bài toán bởi một phép biến hình nào đó. Phép biến hình này được phát hiện để sử dụng nhờ việc phân tích cụ thể nội dung bài toán hình học được đặt ra như đã nói ở trên. Các thí dụ 3 và 5 trình bày ở trên đã minh hoạ cho những nhận xét chung vừa nêu xoay quanh việc sử dụng phương pháp biến hình vào việc giải toán dựng hình. Bởi vậy, hãy trở lại các thí dụ 3 và 5 này, ta sẽ thấy sáng tỏ hơn trong việc vận dụng về sau.

4 Ứng dụng phép đối xứng - trục vào việc giải toán hình học phẳng

Thí dụ 6. Giả sử P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle PAC = 10^o, \angle PCA = 20^o, \angle PAB = 30^o$ và $\angle ABC = 40^o$. Hãy xác định độ lớn góc $\angle BPC$.

Hình 20

Nhận xét. Đây là một bài toán thuộc loại tính toán các đại lượng hình học, cụ thể là tính độ lớn (số đo) của một góc giữa hai tia. Bài toán này vì thế có thể có nhiều lời giải khác nhau, đặc biệt là hướng tính toán, dựa trên cách vận dụng định lý sin và cosin. Tuy nhiên, đối với trường hợp bài toán này, từ đặc điểm của tam giác ABC chúng ta lại nghĩ đến việc sử dụng một phép biến hình. Đó chính là phép đối xứng - trục.

Thật vậy, theo giả thiết của bài toán thì, rõ ràng là tam giác ABC cân ở C, có góc ở đỉnh $\angle C = 100^o$ (vì hai góc $\angle A$ và $\angle B$ mối góc 40^0). Do đó, đường cao hạ từ C trùng với trung trực $t[AB]$ là trục đối xứng của tam giác ABC. Gọi $\Delta = t[AB]$ $\Delta \ni C$. Dựng điểm $Q = \mathcal{D}_\Delta(P)$, ta được $CP = CQ$ và $\angle QCB = \angle PCA = 20^o$. Từ đó suy ra tam giác CPQ là đều (*Hình 20*) và tính được $\angle BQP = 150^o$. Vì vậy $\angle BQP = \angle BQC = 150^0$ và $\triangle BQC' = \triangle BQP$ (c.g.c). Bởi thế, BQ không những là phân giác của góc $\angle CBP$ mà còn là phân giác của góc $\angle CQP$ đồng thời phép đối xứng trục $\mathcal{D}(BQ)$ biến $\triangle BQC$ thành $\triangle BQP$, trong đó $BC \to BP, BP \to BC$ và $\angle BCP \to \angle BPC$. Vì vậy, $\angle BPC = \angle BCP = 20^0 + 60^0 = 80^0$ và do đó tam giác BCP cân ở B có góc ở đỉnh B bằng 20^o.
Trả lời: $\angle BPC = 80^o$

Thí dụ 7. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau ở O và một điểm P cố định nằm ngoài d_1, d_2. Một đường thẳng Δ quay xung quanh P cắt d_1 ở A và d_2 ở B. Các đường thẳng Δ_1, Δ_2 đối xứng với Δ lần lượt qua d_1 và d_2 cắt nhau ở M. Tìm hãy quỹ tích của M.

Nhận xét. Chúng ta nhận thấy các yếu tố đối xứng - trục đã xuất hiện ngay trong các dữ kiện của bài toán, vì vậy bài toán này đòi hỏi phải sử dụng tính chất của phép đối xứng - trục và góc định hướng của hai đường thẳng $\pmod \pi$ để tìm quỹ tích.

Hình 21

Gọi P_i là điểm đối xứng với P qua d_i, $i = 1, 2$ (*Hình 21*) Vì $P \in \Delta$ nên suy ra $P_i \in \Delta_i = \mathcal{D}_{d_i}(\Delta)$, từ đó ta ta được

$$(\Delta_1, \Delta) = 2(\Delta_1, d_1) = 2(d_1, \Delta), \quad (\text{mod } \pi)$$
$$(\Delta, \Delta_2) = 2(d_2, \Delta_2) = 2(\Delta, d_2), \quad (\text{mod } \pi)$$

Từ đó suy ra

$$(\Delta_1, \Delta_2) = 2(d_1, d_2) = 2\delta = \theta, \quad (\text{mod } \pi) \tag{1}$$

trong đó $(d_1, d_2) = \delta, \ (\text{mod } \pi)$. Vì $\Delta_1 \cap \Delta_2 = M$ và $P_i \in \Delta_i$, $(i = 1, 2)$ nên (1) được viết lại như sau

$$(MP_1, MP_2) = 2(d_1, d_2), \quad (\text{mod } \pi) \tag{i}$$

Mặt khác, vì $P_i = \mathcal{D}_{\alpha_i}(P), (i = 1, 2)$ và $O = d_1 \cap d_2$ nên ta có các đẳng thức

$$(OP_1, OP) = 2(\Delta_1, d_1) = 2(d_1, OP), \quad (\text{mod } \pi) \tag{2}$$
$$(OP, OP_2) = 2(d_2, OP_2) = 2(OP, d_2), \quad (\text{mod } \pi) \tag{3}$$

Từ (2) và (3), nhờ hệ thức Salờ ta được

$$(OP_1, OP_2) = 2(d_1, d_2), \quad (\text{mod } \pi) \tag{ii}$$

Đối chiếu (i) và (ii) ta suy ra

$$(MP_1, MP_2) = (OP_1, OP_2), \quad (\text{mod } \pi) \tag{iii}$$

Đẳng thức (iii) chứng tỏ bốn điểm O, P_1, P_2 và $M = \Delta_1 \cap \Delta_2$ cùng thuộc một đường tròn với vị trí của đường thẳng Δ quay quanh điểm P cố định. Vậy, ta đi đến kết luận

a) Nếu d_1 và d_2 không vuông góc với nhau ở O và do đó, O, P_1 và P_2 không thẳng hàng thì $\{M = \Delta_1 \cap \Delta_2\}$ là đường tròn ngoại tiếp tam giac OP_1P_2

b) Nếu d_1 vuông góc với d_2 thì $\{M\}$ là đường thẳng đi qua P_1 và P_2

Thí dụ 8. Tìm đường đi của một quả bi-a, sao cho sau khi chạm hai lần vào thành bàn, nó đi từ điểm A đến điểm B (*Hình 22*).

Hình 22

Trước hết, để ý rằng do tác động của lực đẩy bắn vào quả bi-a của người chơi, quả bi-a sau khi chạm vào thành bàn (bàn bi-a có dạng hình chữ nhất hoặc vuông $PQRS$) thì phản xạ trở lại theo quy luật như phản xạ ánh sáng, tức là góc phản xạ bằng góc tới tia phản xạ đối xứng với tia tới qua pháp tuyến của thành bàn tại điểm chạm (Hình 22). Như vậy, rõ ràng phép đối xứng trục đã phát huy tác dụng giúp ta giải bài toán dựng hình này.

Gọi M và N lần lượt là điểm chạm lần thứ nhất và lần thứ hai của quả bi-a với các thành bàn RS và SP sau khi xuất phát từ điểm A (gần điểm góc của bàn) trên mặt bàn để rồi trở lại điểm B (gần điểm góc P của bàn) cũng đã được định sẵn trên mặt bàn bi-a hình chữ nhật $PQRS$ (*Hình 22*). Thế thì, theo quy luật phản xạ nói trên, đường thẳng MN chứa tia phản xạ M và cũng là tia tới của N phải đi qua các điểm $A' = \mathcal{D}(A)$ và $B' = \mathcal{D}(B)$. Từ đó suy ra cách xác định các vị trí M và N của quả bi-a chạm vào các thành bàn RS và SP : $[A'B'] \cap \{[RS], [SP]\} = \{M, N\}$

Kết luận. Đường gấp khúc bốn đốt $AMNB$ là đường đi phải của quả bi-a sau khi chạm hai lần liên tiếp vào các thành bàn $[RS]$ và $[SP]$.

Chú ý. Biên luận về khả năng có lời giải của bài toán phụ thuộc vào vị trí của các điểm A và B (đã đặt sẵn trên mặt bàn bi-a).

5 Ứng dụng các phép quay và dời hình (nói chung) vào việc giải toán

Thí dụ 9. Trong mặt phẳng cho hai tam giác ABC, ADE có các góc ở đỉnh chung A bù nhau, đồng thời $AB \perp AD, AB = AD; AC \perp AE, AC = AE$ và hai tam giác đó không có điểm chung nào khác ngoài đỉnh A. Chứng minh rằng đường thẳng chứa trung tuyến phát xuất từ đỉnh chung A của tam giác này cũng chứa đường cao hạ từ A của tam giác kia.

Chứng minh. Thật vậy, theo giả thiết thì $AB \perp AD$ và $AC \perp AE$. Điều đó gợi ý chúng ta liên tưởng tới phép quay góc vuông xung quanh tâm A.

Hình 23

Gọi M là trung điểm cạnh BC, H là chân đường cao AH của tam giác ADE; ta chứng minh $AM \perp DE$. Muốn vậy, ta thực hiện phép quay $Q(A, \pi/2)$ (*Hình 23*). Khi đó, nếu tam giác ABC có hướng thuận thì phép quay này biến tam giác ADE thành tam giác ABF do $D \mapsto B$ và $E \mapsto F = \mathcal{D}(C)$. Vì $BF = Q(DE)$, trong đó $Q = Q(A, \pi/2)$ nên (theo tính chất của phép quay góc $+\pi/2$) thì $BF \perp DE$ và $BF = DE$, đồng thời $BF \parallel AM$ và $BF = 2AM$ (do AM là đường trung bình của $\triangle BCF$). Từ đó suy ra $AM \perp DE$, cũng tức là $(AM) = (AH)$. Đây là điều phải chứng minh.

Thí dụ 10. (Chứng minh định lý Pompiu) Nếu P là một điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng của một tam giác đều ABC cho trước thì bao giờ cũng tồn tại một tam giác $\mathcal{T}$ có độ dài ba cạnh bằng các khoảng cách từ điểm P đến các đỉnh củ tam giác đều đã cho đó, kể cả trường hợp khi $\mathcal{T}$ suy biến thành đoạn thẳng, ký hiệu $\mathcal{T} = \mathcal{T}(PA, PB, PC)$. Ngoài ra, hãy tìm quỹ tích của điểm P để $\mathcal{T}$ suy biến.

Nhận xét. Định lý Pompiu trên đây cho ta biết một tính chất đặc trưng của tam giác đều. Có nhiều cách chứng minh định lý Pompiu. Sau đây là cách chứng minh nhờ sử dụng phép quay góc 60^o.

Phân tích. Giả sử $PA = \max\{PA, PB, PC\}$. Nếu $\exists \mathcal{T}(PA, PB, PC)$ thì ắt phải tồn tại một điểm Q trong mặt phẳng sao cho $PQ = PB$ và $QA = PC$ (*Hình 24*). Thế thì, hai tam giác BAQ và BCP (đã có $BA = BC$ và $AQ = CP$) sẽ bằng nhau khi và chỉ khi $BQ = BP$ và do đó khi và chỉ khi $\angle PBQ = 60^o$. Sự phân tích này làm nảy sinh ý tưởng sử dụng phép quay góc 60^o xung quanh điểm B một cách hết sức tự nhiên.

Hình 24

Thật vậy, nếu tam giác đều ABC đã cho có hướng thuận thì, phép quay $Q(B, +60^o)$ giữ bất động điểm B, biến C thành A và biến P thành điểm Q (sao cho BPQ là một tam giác đều và cũng có hướng thuận) và do đó, biến tam giác BCP thành tam giác BAQ (*Hình 24*). Từ đó suy ra $PQ = QB = PB$ và

$QA = PC$. Nói khác đi là, QAP chính là một tam giác $\mathcal{T}(PA, PB, PC)$ đòi hỏi, được sinh ra từ điểm P do thực hiện phép quay $Q(B, 60^o)$. Đây là điều phải chứng minh.

Tam giác $\mathcal{T}$ này được sinh ra bởi điểm P tương ứng sẽ suy biến thành đoạn thẳng khi và chỉ khi P, Q, A thẳng hàng, nghĩa là $\mathcal{T}(PA, PB, PC)$ suy biến tương đương với $(QP, QA) = 0$, $(\mathrm{mod}\ 180^0)$ (1). Lại do tam giác BAQ bằng tam giác BCP nên ta có $(QB, QA) = (PB, PC)$ hay là $(QB, QP) + (QP, QA) = (PB, PC)$, $(\mathrm{mod}\ 180^0)$; $\forall P \in mp(ABC)$ (2). Mặt khác, do $\triangle BPQ$ là đều và cùng hướng với $\triangle BCA$ đều, nên ta có $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QP}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^0$, $(\mathrm{mod}\ 360^0)$ (3). Đối chiếu (1), (2) và (3) ta suy ra $\mathcal{T}(PA, PB, PC) = \triangle QAP$ suy biến khi và chỉ khi $(PB, PC) = (AB, AC)$ $(\mathrm{mod}\ 180^0)$ (4). Hệ thức (4) cho ta biết $\{P\}$ để $\mathcal{T}(PA, PB, PC)$ suy biến là đường tròn (ABC)

Thí dụ 11. (Ứng dụng tích của hai phép quay)

Dựng ra phía ngoài tam giác ABC (giả sử có hướng thuận) hai hình vuông $ACIM$ và $BCNP$. Chứng minh rằng nếu giữ hai đỉnh A, B cố định và cho C chạy khắp nửa mặt phẳng mở (nửa dương) có bờ là đường thẳng (AB) thì đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định. Hãy xác định điểm đó.

Hình 25

Lời giải. Thật vậy, khi giữ A và B cố định, C chuyển động sẽ kéo theo sự chuyển động của hai điểm M và P. Và ngược lại, điểm P chuyển động kéo theo C chuyển động, rồi M chuyển động nhờ thực hiện liên tiếp hai phép quay cùng một góc $\varphi = +\pi/2$ lần lượt xung quanh các điểm B và A. Điều đó nói lên rằng M được suy ra từ P bởi phép dời hình $\mathcal{D}$ là tích của hai phép quay $Q(B\pi/2)$ và $Q(A, \pi/2)$ theo thứ tự đó. Vậy $\mathcal{D}$ là một phép đối xứng - tâm, biến P thành M. Để xác định tâm O của $\mathcal{D}$, ta hãy phân tích mỗi phép quay $Q(B, \pi/2)$ và $Q(A, \pi/2)$ thành tích của hai phép đối xứng - trục để đưa $\mathcal{D}$ về dạng chính tắc (xem bài tập 2,8), ta được dạng phân tích sau

$$\mathcal{D} = [\mathcal{D}(Ax) \circ \mathcal{D}(AB)] \circ [\mathcal{D}(BA) \circ \mathcal{D}(BY)] = \mathcal{D}(Ax) \circ \mathcal{D}(BY)$$

trong đó Ax và By là hai trục đối xứng được xác định bởi: $(By, BA) =$

$(AB, Ax) = \pi/4, \pmod{\pi}$ (2). Gọi $O = Ax \cap By$, ta được OAB là một tam giác vuông cân ở O và có hướng thuận (*Hình 25*). Vậy O là một điểm cố định thuộc nửa mặt phẳng mở (dương) chứa C và có bờ là đường thẳng AB, hoàn toàn được xác định bởi các đẳng thức (2).

Kết luận. $\mathcal{D} = \mathcal{D}(Ax) \circ \mathcal{D}(By) = \mathcal{D}(O)$ biến P thành M và do đó, đoạn thẳng MP luôn nhận điểm O cố định làm trung điểm với mọi vị trí của C thuộc nửa mặt phẳng (mở) dương có bờ là (AB).

Thí dụ 12. Trong mặt phẳng cho một cung tròn $A\alpha B$. Một tia Ax quay xung quanh A, đồng thời một động tử M cũng chuyển động trên tia đó sao hễ Ax cắt cung $A\alpha B$ ở một điểm N nào đó thì luôn luôn ta có $AM = BN$. Tìm hình vạch nên bởi M khi N vạch nên cung tròn đã cho.

Đặt $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \varphi$ thì $\{N\} = \overset{\frown}{A\alpha B}$. Thế thì, $(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{AM}) = -\varphi \pmod{2\pi}$, $BN = AM$. Hai đẳng thức này hoàn toàn xác định một phép dời hình $\mathcal{D}$ (xem bài 2.1).

Hình 26

Để ý rằng khi $N = B$ thì $M = A$ và $\varphi \neq 0, \pmod{2\pi}$ nên $\mathcal{D}$ là phép quay. Dễ thấy rằng $\mathcal{D}$ có điểm bất động (tâm quay) duy nhất là trung điểm của cung $A\alpha B$ (ở đó $M = N = \omega$) và do đó $\mathcal{D}$ là phép quay $Q(\omega, -\varphi)$ tâm ω, góc quay $-\varphi, \pmod{2\pi}$. Phép quay này biến B thành A và A thành A', xác định bởi hệ thức $(\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega A'}) = -\varphi$ và $\omega A' = \omega A$. Nó còn cho ta biết $A' = \mathcal{D}(B)$ đối xứng với B qua $(A\omega)$ (*Hình 26*).

Kết luận. Quỹ tích của M là cung tròn $A\alpha A'$ được suy ra từ $\{N\} = \overset{\frown}{A\alpha B}$ bởi phép đối xứng trục $\mathcal{D}(A\omega)$.

6 Câu hỏi và Bài tập

A. Vận dụng phép tịnh tiến vào việc giải các bài toán sau đây

3.1 Chứng minh rằng tồn tại một tam giác ABC nào đó và diện tích của tam giác $\mathcal{T}$ mà các cạnh bằng các đường trung tuyến của một tam giác ABC nào đó và diện tích của $\mathcal{T}$ bằng $3/4$ diện tích tam giác ABC.

3.2 Hình bình hành $ABCD$ có đường chéo $AC = a$. Qua A kẻ các đường cao AE và AF xuống các cạnh BC và CD. Tính khoảng cách từ A đến trực tâm H của tam giác AEF, cho biếtg $EF = b\,(b < a)$.

3.3 Trong mặt phẳng cho một đường thẳng Δ và một điểm A cố định. Một đường tròn (v) có bán kính r cho trước chuyển động trong mặt phẳng nhưng luôn đi qua A. Tìn quỹ tích các tiếp điểm của các giao tiếp của (v) có phương của đường thẳng Δ đã cho.

3.4 Hai điểm M và N chuyển động trên đường thẳng chứa cạnh AB của một tam giác ABC sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của M trên (BC) và của N trên (CA); S là trung điểm của AN và Q là tâm đường tròn (CDE). Chứng minh SQ có độ dài không đổi; từ đó suy ra quỹ tích của Q khi véctơ $\overrightarrow{MN}$ trượt trên đường thẳng AB.

3.5 Cho đường tròn (O) đường kính CD và một dây cung AB không cắt CD. Tìm trên đường tròn một điểm P sao cho góc nội tiếp APB chắn trên đường kính CD một đoạn thẳng MN có độ dài bằng ℓ cho trước. Biên luận.

3.6 Cho hai đường tròn ngoài nhau (O) và (O') và một đường thẳng d. Hãy dựng một đường thẳng có phương của d cắt (O) và (O') sao cho tổng độ dài các dây cung của chúng định bởi đường thẳng có một độ dài ℓ cho trước. Biện luận.

B. Vận dụng phép đối xứng tâm vào việc giải các bài toán sau đây

3.7 Giả sử P là một điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng của hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D kẻ các đường thẳng theo thứ tự song song với CP, DP, AP, BP. Chứng minh rằng các đường thẳng vừa dựng đồng quy tại một điểm Q nào đó và đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P dời chỗ trong mặt phẳng.

3.8 Hình bình hành $MNPQ$ nội tiếp hình bình hành $ABCD$ sao cho M, N, P và Q lần lượt nằm trên các cạnh liên tiếp AB, BC, CD và DA của $ABCD$. Chứng minh rằng hai hình bình hành $MNPQ, ABCD$ nội, ngoại tiếp nhau có cùng tâm đối xứng.

3.9 Hai người chơi một trò chi \đặt đồng xu lên mặt bàn hình chữ nhật". Quy tắc chơi như sau: Đồng xu được phép đặt vào bất cứ chỗ trống nào, hai người lần lượt đặt các đồng xu lên mặt bàn. Ai đến lượt đi mà không thể đặt được đồng xu vào đâu thì bị thua. Chứng minh rằng nếu biết cách chơi thì người đầu luôn thắng cuộc.

3.10 Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh (hoặc một đường chéo) và vuông góc với cạnh đối diện (hoặc đường chéo kia) thì đồng quy.

3.11 Cho đường thẳng a, đường tròn (O) và một điểm P không nằm trên a và (O). Tìm trên a một điểm A và trên (O) một điểm B sao cho đoạn AB nhận P làm trung điểm.

3.12 Hãy cắt một tam giác ABC cho trước bằng ba đường thẳng song song với các cạnh của tam giác để thu được một lục giác (lồi) ngoại tiếp được một đường tròn.

3.13 Cho hai dây cung không cắt nhau AB và CD của một đường tròn (O) và một điểm P trên dây CD. Tìm trên đường tròn một điểm S sao cho góc nội tiếp $\angle ASB$ chắn trên dây CD một đoạn thẳng MN nhận P làm trung điểm.

C. Vận dụng phép đối xứng - trục vào việc giải các bài toán sau đây

3.14 Một đường tròn thứ ba (w) cắt hai đường tròn đồng tâm O lần lượt lên trên (w) ở các điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng nếu A, B, O thẳng hàng thì C, D, O cũng thẳng hàng.

3.15 Hai đường tròn bằng nhau (O_1) và (O_2) cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O) ở các điểm A_1 và A_2. Một điểm M tuỳ ý của (O) được nối tiếp với A_1 và A_2. Các đoạn thẳng MA_i cắt (O_i) ở các điểm B_i tương ứng $(i = 1, 2)$. Chứng minh rằng $B_1B_2 \parallel A_1A_2$.

3.16 Một điểm M chuyển động trên đường kính AB của một đường tròn (O). Dây cung CD đi qua M cắt AB và hợp với nó một gốc 45^0. Chứng minh rằng đại lượng $p = MC^2 + MD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của M trên AB (p không đổi với mọi M trên $[AB]$).

3.17 Cho tam giác ABC cân ở A một đường thẳng Δ quay quanh A. Gọi D là điểm đối xứng với C qua D. Tìm quỹ tích giao điểm M của đường thẳng BD và Δ.

3.18 Tính góc tạo bởi hai gương phẳng biết rằng một tia sáng bất kỳ sau bốn lần chiếu vào cả hai gương (mỗi gương đập vào hai lần) thì phản xạ theo hướng ngược lại hướng ban đầu.

3.19 Cho đường thẳng xy và hai điểm A, B nằm cùng phía với xy. Hãy tìm trên đường thẳng xy một điểm P sao cho góc $\angle APx$ bằng hai lần góc $\angle BPy$.

3.20 Chứng minh rằng

a) Diện tích của một tứ giác lồi bất kỳ không lớn hơn một nửa tổng của tích độ dài các cạnh đối diện $S(ABCD) \leq \frac{1}{2}(AB.CD + BC.DA)$. (*)

b) Dấu đẳng thức trong (*) đạt được khi và chỉ khi tứ giác nội tiếp được một đường tròn và hai đường chéo vuông góc với nhau.

D. Vận dụng phép quay và dời hình vào việc giải các bài toán sau

3.21 Cho hai đường tròn bằng nhau (O_1) và (O_2). Tìm tất cả các phép dời hình thuận và nghịch (dời hình và phản dời hình) biến đường tròn này thành đường tròn kia.

3.22 Trên đường thẳng a và b cắt nhau ở một điểm P có hai động tử chuyển động thẳng đều với cùng một vận tốc nhưng không gặp nhau ở P: M_1 trên a và M_2 trên b. Chứng minh rằng ở bất kỳ thời điểm nào, đường tròn ngoại tiếp tam giác M_1M_2P luôn đi qua một điểm cố định O nào đó, khác P.

3.23 Chứng minh rằng hai đường tròn bằng nhau và cắt nhau ở hai điểm thì tương ứng với nhau trong một phép quay mà tâm quay là một trong hai giao điểm và các đường thẳng nối các cặp điểm tương ứng trên hai đường tròn thì đồng quy ở giao điểm thứ hai.

3.24 Giả sử P là một điểm nằm trong hình vuông $A_1A_2A_3A_4$. Qua A_1 dựng đường thẳng A_1x vuông góc với A_2P, qua A_2 dựng A_2y vuông góc với A_3P qua A_3 dựng A_3z vuông góc với A_4P rồi qua A_4 dựng A_4t vuông góc với A_1P. Chứng minh rằng bốn đường thẳng A_1x, A_2y, A_3z và A_4t vừa dựng đồng quy ở một điểm Q nào đó.

3.25 Cho ba điểm A, C, B phân biệt và thẳng hàng theo thứ tự đó. Dựng hai tam giác đều BCM và CAN nằm về cùng một phía đối với đường thẳng AB. Gọi D và E lần lượt là trung điểm của BN và AM. Chứng minh rằng CDE là một tam giác đều.

3.26 Lấy các cạnh của một tam giác ABC bất kỳ làm đáy, dựng ra phía ngoài tam giác ABC ba tam giác đều BCA', CAB'và ABC'. Chứng minh rằng các tâm A_o, B_o, C_o của ba tam giác đều vừa dựng là các đỉnh của một tam giác đều (Bài toán Napoléon).

3.27 Cho một tam giác đều ABC. Tìm quỹ tích những điểm M trong mặt phẳng sao cho MA, MB và MC là độ dài các cạnh của một tam giác vuông nào đó.

Chương 2

Các phép đồng dạng phẳng

§ 4 Sự xác định và dạng chính tắc của một phép đồng dạng phẳng

1 Đại cương về các phép đồng dạng phẳng

a) Định nghĩa phép đồng dạng

Một phép biến hình $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ được gọi là một phép đồng dạng của mặt phẳng hay vắn tắt là phép đồng dạng phẳng, ký hiệu là $\mathcal{Z}$, nếu với bất cứ hai điểm M, N nào của $\mathcal{P}$ và các ảnh $M' = f(M)$ và $N' = f(N)$ của chúng ta đều có $M'N' = kMN$, trong đó k là một số dương xác định. Số k được gọi là tỷ số hay hệ số của phép đồng dạng, hay nói gọn hơn là tỷ số (hay hệ số) đồng dạng. Phép đồng dạng tỷ số k được ký hiệu bởi $\mathcal{Z}(k)$.

Nói một cách ngắn gọn, phép đồng dạng phẳng tỷ số k là phép biến hình của mặt phẳng, nhân khoảng cách giữa bất cứ hai điểm nào của nó với cùng một số lượng k xác định cho trước.

Rõ ràng là khi $k = 1$, phép đồng dạng trở thành phép dời hình, nghĩa là $\mathcal{Z}(1) = \mathcal{D}$ và do đó, dời hình là trường hợp đặc biệt của đồng dạng. Từ định nghĩa của phép đồng dạng, dễ dàng suy ra rằng phép đảo ngược của phép đồng dạng tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $1/k$ ta viết $\mathcal{Z}^{-1}(k) = \mathcal{Z}(1/k)$ hay $\mathcal{Z}(k) \circ \mathcal{Z}(1/k) = Id$.

Tích của hai phép đồng dạng có các tỉ số k_1, k_2 là phép đồng dạng với tỉ số $k = k_1.k_2$, nghĩa là, $\mathcal{Z}_2(k_2) \circ \mathcal{Z}_1(k_1) = \mathcal{Z}_{12}(k_1k_2)$, nhưng $\mathcal{Z}_1(k_1) \circ \mathcal{Z}_2(k_2) = \mathcal{Z}_{21}(k_2k_1)$. Phép biến hình đồng nhất Id là một phép đồng dạng.

b) Các tính chất của phép đồng dạng

Cũng từ định nghĩa của phép đồng dạng, ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của phép đồng dạng, trong đó có những tính chất của phép dời hình.

Định lý 15. Phép đồng dạng bảo toàn sự thẳng hàng của ba điểm và thứ tự của chúng trên đường thẳng chứa ba điểm đó. Cụ thể là: Phép đồng dạng biến ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó thành ba điểm A', B', C' thẳng hàng cũng theo thứ tự đó.

Hệ quả 1. Phép đồng dạng biến đường thẳng thành một đường thẳng biến một tia thành một tia, biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng có độ dài được nhân lên với hệ số (tỷ số) đồng dạng $(A'B' = kAB, \forall\{A, B\})$

Hệ quả 2. Phép đồng dạng biến một tam giác thành một tam giác đồng dạng với nó; biến một góc thành một góc bằng nó; biến một đường tròn thành một đường tròn, trong đó tâm biến thành tâm còn bán kính được nhân lên với hệ số (tỉ số) đồng dạng $(R' = kR)$

c) Phân loại các phép đồng dạng

Cũng giống như phép dời hình, phép đồng dạng chia làm hai loại, loại một và loại hai tuỳ theo nó bảo toàn hướng hay đảo ngược hướng của hình. Ta gọi là phép *đồng dạng thuận*, hay vắn tắt là phép đồng dạng, một phép đồng dạng phẳng bảo toàn hướng của hình. Ta gọi phép *đồng dạng nghịch* hay còn gọi là đống dạng gương, hoặc phản đồng dạng, một phép đồng dạng phẳng đảo ngược hướng của hình.

Chú thích. Phép đồng dạng tuy không bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm nhưng giống như phép dời hình, phép đồng dạng bảo toàn góc (nói đúng ra là bảo toàn độ lớn thông thường của góc, bao gồm góc giữa hai tia, giữa hai véctơ, giữa hai đường thẳng).Vì thế người ta còn nói phép đồng dạng là một phép biến hình bảo giác. Nói một cách chi tiết hơn thì: phép đồng dạng phẳng thuận còn bảo toàn cả hướng của góc, vì thế ta nói phép đồng dạng thuận bảo toàn độ lớn đại số của góc định hướng (giữa hai tia, giữa hai đường thẳng). Phép đồng dạng nghịch chỉ bào toàn độ lớn số học (cũng tức độ lớn thông thường) của góc định hướng (giữa hai tia, giữa hai đường thẳng) nhưng làm đảo hướng góc, tức là biến góc dương (độ lớn dương) thành góc âm (độ lớn âm) và ngược lại.

d) Khái niệm về hai hình đồng dạng

Định nghĩa. Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}$ gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng $\mathcal{Z}$ biến hình này thành hình kia: $\mathcal{Z}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'$.

Nếu phép đồng dạng $\mathcal{Z}$ biến hình $\mathcal{H}$ thành $\mathcal{H}'$, thì phép đồng dạng đảo ngược của $\mathcal{Z}$ biến $\mathcal{H}'$ thành $\mathcal{H}$. Ký hiệu hai hình đồng dạng bởi $\backsim$, chẳng hạn $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$.

Hình 27

Chú thích. Vì có hai loại phép đồng dạng, thuận và nghịch nên để phân biệt rõ hai hình nào đó là đồng dạng thuận hay đồng dạng nghịch nếu thấy cần thiết.

Sau đây, chúng ta đề cấp đến một phép đồng dạng đặc biệt, đó là phép vị tự.

2 Phép vị tự

[1]

a) Định nghĩa.
Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và k là một số thực khác không cho trước. Phép biến hình của mặt phẳng biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho (Hình 28). $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ (1) được gọi là một phép vị tự tâm O, hệ số (tỷ số) k và ký hiệu là V_O^k hay $V(O,k)$. Điểm O gọi là tâm vị tự và k gọi là hệ số hay tỉ số vị tự.

Hình 28

Một phép vị tự hoàn toàn được xác định nếu cho biết tâm O và tỷ số k. Nếu có đẳng thức (1) thì ta nói rằng M' là ảnh hay điểm tương ứng của điểm M qua phép vị tự $V(O,k)$ hoặc người ta cũng gọi M' là hình vị tự của điểm M. Nếu phép vị tự $V(O,k)$ biến một hình $\mathcal{H}$ thành một hình $\mathcal{H}'$ (gồm các ảnh M' của tất cả các điểm M thuộc hình $\mathcal{H}$) thì ta cũng nói $\mathcal{H}'$ là hình vị tự của hình $\mathcal{H}'$ hay $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ là hai hình vị tự với nhau.

[1]Trong mục này chúng ta chỉ nhắc lại định nghĩa và các tính chất của phép vị tự mà không chứng minh và có bổ sung một vài tính chất cần thiết cho việc trình bày và giải toán tiếp theo

Một phép biến hình điểm của mặt phẳng mà chúng ta đã gặp trong Thí dụ 2 của Bài 1 (mục 3) cho ta thí dụ đầu tiên về một phép vị tự phẳng. Thật vậy, hãy trở lại với thí dụ này, chúng ta thấy ngay rằng quy tắc $f : M \mapsto M'$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ chỉ ra trong thí dụ đó tương đương với quy tắc f', trong đó mỗi điểm M bất kỳ của $\mathcal{P}$ ta xác định được duy nhất điểm $M' \in \mathcal{P}$ thoả mãn hệ thức véctơ

$$\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM} \tag{2}$$

trong đó G là trọng tâm của tam giác ABC đề cập đến trong thí dụ đó. Vì vậy, phép biến hình f trình bày trong Thí dụ 2 của bài tập 1 (mục 3) đó chính là phép vị tự $V(G, -1/2)$ tâm G, tỉ số $k = -1/2$.

Ngoài ra, có hai trường hợp đặc biệt, đáng chú ý của phép vị tự, ứng với hai giá trị của hệ số k là $k = \pm 1$. Nếu $k = +1$, khi đó $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} (\forall M)$. Vậy trong trường hợp này, phép vị tự tỉ số 1 là phép đồng nhất. Nếu $k = -1$, thì $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$, $(\forall M)$ tức M' đối xứng với M qua điểm O. Vậy trong trường hợp này phép vị tự tỉ số -1 là phép đối xứng qua tâm O.

b) Các tính chất của phép vị tự

Định lý 16. Phép vị tự tỉ số k là một phép đồng dạng tỷ số $|k|$, trong đó nếu phép vị tự $V(O, k)$ biến M thành M', N thành N' thì $M'N' = kMN$.

Chú thích.

Hình 29

(i) Người ta còn nói, phép vị tự tỉ số k biến một véctơ $\overrightarrow{v}$ thành véctơ $\overrightarrow{v'}$ bằng k lần véctơ $\overrightarrow{v}$, nghĩa là $\overrightarrow{v'} = k\overrightarrow{v}$ hoặc nói gọn hơn là phép vị tự tỷ số k nhân một véctơ lên k lần.

(ii) Vì phép vị tự là một phép đồng dạng đặc biệt nên phép vị tự có mọi tính chất của phép đồng dạng. Tuy nhiên, phép vị tự còn có những tính chất đặc trưng riêng của nó.

Định lý 17. Trong một phép vị tự, tâm vị tự là điểm bất động duy nhất và một đường thẳng không đi qua tâm vị tự biến thành một đường thẳng song song với nó. Chùm đường thẳng có tâm ở tâm vị tự là tập hợp những đường thẳng bất biến duy nhất của phép vị tự. Phép vị tự phẳng gây nên một phép vị tự trên mọi đường thẳng (bất biến) đi qua tâm vị tự.

Định lý 18. Mọi phép vị tự phẳng tỉ số dương hay âm đều là một phép đồng dạng thuận.

Chú thích. Hệ số (hay tỉ số) vị tự k có thể dương hay âm. Vì thế, tuỳ theo k dương hay âm, người ta gọi phép vị tự $V(O,k)$ là phép vị tự dương hay phép vị tự âm. Dễ thấy rằng phép vị tự dương bảo toàn hướng của véctơ còn phép vị tự âm thì đổi hướng của véctơ (*Hình 30*). Tuy nhiên, dễ thấy rằng: $V(O,-k) = \mathcal{D}(O) \circ V(O,k) = V(O,k) \circ \mathcal{D}(O)$, trong đó $k > 0$. Từ đó suy ra phép vị dương hay âm đều bảo toàn hướng của góc định hướng giữa hai véctơ hay giữa hai đường thẳng và do đó, bảo toàn hướng của hình. *Hình 30* minh hoạ tính chất này.

Hình 30

c) Tâm vị tự của hai đường tròn

Định lý 19. Phép vị tự biến một đường tròn thành một đường tròn. Đảo lại, nếu (O_1, R_1) và (O_2, R_2) là hai đường tròn phân biệt của mặt phẳng thì, nói chung, có hai phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia mà tâm vị tự là các điểm chia trong và ngoài đoạn nối tâm theo tỷ số hai bán kính.

Gọi S là tâm vị tự, k là hệ số vị tự. Thế thì, nếu $S = O$ thì phép vị tự $V(O,k)$ biến đường tròn (O,R) thành đường tròn $(O,|k|R)$ đồng tâm O, bán kính $R' = |k|.R$.

Nếu $S \neq O$ thì $V(S,k)$ biến đường tròn (O,R) thành đường tròn (O,R') trong đó O' được xác định bởi $\overrightarrow{SO'} = k\overrightarrow{SO}$ và $R' = |k|R$ cũng tức là S chia $O'O$ theo tỉ số $(O'O,S) = \overline{SO'}/\overline{SO} = k$.

Đảo lại, giả sử (O_i, R_i), $i = 1,2$ là đường tròn không đồng tâm và cũng không cùng bán kính. Thế thì tồn tại hai và chỉ hai phép vị tự $V(S_i, k_i), i = 1,2$ tâm S_1 và S_2 theo thứ tự chia ngoài và chia trong đoạn nối tâm O_2O_1 theo các tỉ số dương tương ứng $k_1 = R_2/R_1$ và $k_2 = -R_2/R_1$ biến (O_1, R_1) thành (O_2, R_2) (*Hình 31*). Các điểm S_1 và S_2 theo thứ tự được gọi là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn (O_i, R_i). Có hai trường hợp đặc biệt

a) Hai đường tròn đồng tâm nhưng không cùng bán kính: $O_1 = O_2 = O, R_1 \neq R_2$. Khi đó, cả hai phép vị tự cùng tâm S trùng với O và tỉ số vị tự $k_i = \pm R_2/R_1$ đều biến đường tròn (O, R_1) thành đường tròn (O, R_2).

b) Hai đường tròn không đồng tâm nhưng cùng bán kính $O_1 \neq O_2$, $R_1 = R_2 = R$ (cũng tức là hai đường tròn bằng nhau (O_1, R) và (O_2, R). Trong trường hợp này, phép đối xứng tâm O là phép vị tự duy nhất (có hệ số $k = -1$) biến (O_1, R) thành (O_2, R), hoặc ngược lại, trong đó O là trung điểm đoạn O_1O_2.

Hình 31

Phép đối xứng tâm O là phép vị tự đặc biệt tâm O tỉ số $k = -1$: $\mathcal{D}(O) = V(O, -1)$.

Chú thích.

a) Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau ở A thì tiếp điểm A của chúng là một trong hai tâm vị tự $S_i, i = 1, 2$. A là tâm vị tự trong hay tâm vị tự ngoài của hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) tuỳ theo hai đường tròn đó tiếp xúc ngoài hay tiếp xúc trong với nhau ở điểm A (*Hình 32a* và *Hình 32b*). Còn tâm vị tự thứ hai là điểm chia ngoài hay chia trong $[O_2O_1]$ theo tỉ số $\pm R_2/R_1$.

b) Nếu hai đường tròn không đựng nhau, hoặc ngoài nhau thì giao điểm của (O_1O_2) và một tiếp tuyến chung ngoài hoặc một tiếp tuyến chung trong của chúng cũng xác định tâm vị tự ngoài S_1 hoặc tâm vị tự trong S_2 của hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) (*Hình 33a và Hình 32b*).

Hình 32a, *Hình 32b*

Hình 33a, *Hình 33b*

d) Tích của hai phép vị tự

Định lý 20. Tích của hai phép vị tự có tỉ số k_1 và k_2 là một phép vị tự. Tỉ số $k = k_1k_2$ có tâm thẳng hàng với tâm của phép vị tự đó hoặc một phép tịnh tiến tùy theo $k_1k_2 \neq 1$ hoặc $k_1k_2 = 1$.

Chứng minh. Giả sử $V_1(O_1, k_1)$ và $V_2(O_2, k_2)$ là hai phép vị tự. Dễ thấy rằng nếu $O_1 = O_2 = O$ thì $V_2(O, k_2) \circ V_1(O, k_1) = V(O, k_1k_2)$ nếu $k_1k_2 \neq 1$.

Nếu $O_2 \neq O_1$, lược đồ của tích là $M \xrightarrow{V_1} M_1 \xrightarrow{V_2} M'$. Theo định nghĩa, với mọi M, thì $\overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M}$ và $\overrightarrow{O_2M'} = k_2\overrightarrow{O_2M_1}$ (*Hình 34*). Khử điểm trung gian M_1 nhờ quy tắc cộng véctơ

$$\overrightarrow{O_2M_1} = \overrightarrow{O_1M_1} = -\overrightarrow{O_1O_2}$$

Hệ thức trên trở thành

$$\forall M\, \overrightarrow{O_2M'} = k_2\{k_1\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_1O_2}\} \tag{1}$$

Vậy điểm O phải tìm, nếu tồn tại thì được xác định bởi (1) [bằng cách cho $M' = M = O$]:

$$\overrightarrow{O_2O} = k_2\{k_1\overrightarrow{O_1O} - \overrightarrow{O_1O_2}\} \tag{2}$$

nghĩa là

$$(1 - k_1k_2)\overrightarrow{O_1O} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2} \qquad (2')$$

Hình 34

Trường hợp tổng quát $k_1k_2 \neq 1$. Đẳng thức (2) xác định một điểm O duy nhất, thẳng hàng với O_1, O_2. Bằng cách lấy (1) trừ (2) vế đối vế, ta đi đến

$$\forall M,\ \overrightarrow{OM'} = k_1k_2\overrightarrow{OM} \qquad (3)$$

Hệ thức này xác định phép vị tự $V(O, k_1k_2)$ tâm O tỉ số $k = k_1k_2(\neq 1)$.

Trường hợp đặc biệt $k_1k_2 = 1$. Không có một điểm bất động nào, nhưng với $k_2 = 1/k_1$ thì đẳng thức (1) trở thành

$$\forall M,\ \overrightarrow{O_2M'} = \overrightarrow{O_1M} - k_2\overrightarrow{O_1O_2}$$

mà ta viết lại dưới dạng

$$\forall M,\ \overrightarrow{MM'} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2} \qquad (4)$$

Hệ thức (4) này xác định phép tịnh tiến theo véctơ $\overrightarrow{v} = (1, k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$. Đây là điều phải chứng minh.

3 Sự xác định một phép đồng dạng phẳng

Định lý 21. Cho ABC và $A'B'C'$ là hai tam giác đồng dạng cho trước trong mặt phẳng $\mathcal{P}$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$$

Bao giờ cũng có một và chỉ một phép đồng dạng $\mathcal{Z} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ biến A, B, C theo thứ tự thành A', B', C'.

Chứng minh. Xét phép vị tự $V(A, k)$; nó biến tam giác ABC thành tam giác AB_1C_1 trong đó $AB_1 = kAB$, $C_1A = kCA$ (*Hình 35*). Như vậy phép vị tự $V(A, k)$ biến tam giác ABC thành tam giác $\triangle AB_1C_1 = \triangle A'B'B'$. Theo định lý 3 thì có một phép dời hình $\mathcal{D}$ duy nhất biến A, B_1, C_1 theo thứ tự thành A', B', C'. Do đó, tích $\mathcal{D} \circ V(A, k)$ là một phép đồng dạng $\mathcal{Z}(|k|)$ tỉ số $|k|$ biến A thành A', B thành B' và C thành C'.

Hình 35

Bây giờ giả sử có hai phép đồng dạng $\mathcal{Z}_1$ và $\mathcal{Z}_2$ đều biến ABC thành $A'B'C'$ thì phép $\mathcal{Z}_2^{-1} \circ \mathcal{Z}_1$ là một phép đồng dạng tỉ số 1, tức là một phép dời hình $\mathcal{D}$ biến tam giác ABC thành chính nó, trong đó biến A thành A, B thành B và C thành C. Vì vậy, theo định lý 2, $\mathcal{Z}_2^{-1} \circ \mathcal{Z}_1 = Id$ và do đó $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_1$. Định lý đã được chứng minh.

Hệ quả 1. Một phép đồng dạng phẳng bao giờ cũng có thể phân tích được thành tích của một phép vị tự và một phép đẳng cự (dời hình hoặc phản dời hình) theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại.

Chú thích.

a) Đối với các phép đẳng cự thì phép đối xứng - trục đóng vai trò phần tử sinh còn đối với các phép đồng dạng thì đóng vai trò phần tử sinh là phép vị tự và phép đối xứng - trục, trong đó phép vị tự đóng vao trò nổi bật, phân biệt sự khác nhau giữa $\mathcal{Z}$ và $\mathcal{D}$ ở tỉ số $|k| \neq 1$.

b) Nếu $\mathcal{Z}(|k|) = \mathcal{D} \circ V(A, k)$ thì $\mathcal{Z}^{-1}(|k|) = V(A, 1/k) \circ \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{Z}(|\frac{1}{k}|)$

c) Sự phân tích nói trên là không duy nhất.

Hệ quả 2. Một phép đồng dạng thuận trong mặt phẳng tương ứng với tích của một phép vị tự và một phép quay hay một phép tịnh tiến (theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại).

Hệ quả 3. Một phép đồng dạng nghịch trong mặt phẳng tương ứng với tích của một phép vị tự và một phép đối xứng - trục hay một phép đối xứng - trượt (theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại).

4 Điểm bất động và dạng chính tắc của một phép đồng dạng phẳng

a) Dạng chính tắc của một phép đồng dạng thuận

Định lý 22 và Định nghĩa Mọi phép đồng dạng thuận trong mặt phẳng khác với phép tịnh tiến đều có một điểm bất động duy nhất O và tương đương với tích giao hoán của một phép vị tự và một phép quay cùng tâm O. Tích giao hoán này được gọi là phép vị tự - quay và là dạng chính tắc của phép đồng dạng (thực sự [2]) thuận trong mặt phẳng.

Chứng minh. Thật vậy, nếu $\mathcal{Z}$ là một phép vị tự V thì tâm vị là điểm bất động duy nhất của nó. Giả sử $\mathcal{Z} \neq V$ và giả sử O là điểm bất động cần tìm của phép đồng dạng thuận $\mathcal{Z}$ được xác định bởi hai tam giác đồng dạng (thuận) tương ứng ABC và $A'B'C'$, trong đó $A', A; B', B; C', C$ là các cặp điểm tương ứng. Vì $\mathcal{Z} \neq V$ nên $A'B' \not\parallel AB$ (*Hình 36*). Từ $\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$ ta được

$$\angle OAP = \angle OA'P,\ \angle OBP = \angle OB'P,\ \angle AOB = \angle A'OB'$$

trong đó các góc xét ở đây đều là góc định hướng $\pmod{\pi}$ của các đường thẳng. Từ đó suy ra $AA'OP$ và $BB'OP$ là những tứ giác nội tiếp. Vậy điểm bất động O là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $(AA'P)$ và $(BB'P)$.

Đồng thời, từ đẳng thức $(\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$, theo hệ thức Salờ, ta được

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \varphi \pmod{2\pi} \quad \text{(i)}$$

Ngoài ra, cũng từ $\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$, ta còn có

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k \quad \text{(ii)}$$

Vậy, các đẳng thức (i) và (ii) còn nói lên rằng một phép đồng dạng thuận $\mathcal{Z}$ trong mặt phẳng bao giờ cũng phân tích được một cách duy nhất thành tích giao hoán của một phép vị tự tâm O tỉ số k và một phép quay góc $\varphi \pmod{2\pi}$ xung quanh O, trong đó O là điểm bất động của $\mathcal{Z}$.

[2] tức là tỉ số đồng dạng $k \neq 1$ và do đó $\mathcal{Z} \neq \mathcal{D}$

Tích giáo hoán này được gọi là phép tự quay và góc φ cũng được gọi là góc đồng dạng.

Phép đồng dạng thuận tâm O góc φ và tỉ số k được ký hiệu là $\mathcal{Z}(O, \varphi, k)$. Như vậy,

$$\mathcal{Z}(O\varphi, k) = Q(O, \varphi) \circ V(O, k) = V(O, k) \circ Q(O, \varphi)$$

Hình 36

Chú thích. Trên hình 36 ta không vẽ cặp điểm tương ứng thứ ba C, C' của $\mathcal{Z}$ vì thực ra chỉ cần hai cặp điểm tương ứng A, A' và B, B' là đủ để xác định một phép đồng dạng phẳng. Tuy nhiên, cần đến một cặp điểm thứ ba C, C' nữa để xác định hướng, cũng tức là để xác định $\mathcal{Z}$ là thuận hay nghịch tùy theo hai tam giác đồng dạng ABC và $A'B'C'$ là cùng hướng hay khác hướng.

b) Dạng chính tắc của một phép đồng dạng nghịch (phẳng)

Định lý 23 và Định nghĩa. Mọi phép đồng dạng nghịch trong mặt phẳng không phải là một phép dời hình nghịch đều có một điểm bất động duy nhất O và tương ứng với tích giao hoán của một phép vị tự dương tâm O tỉ số k và một phép đối xứng qua một đường thẳng Δ đi qua O (hoặc một phép vị tự âm tâm O tỉ số $-k$ và một phép đối xứng - trục Δ' cũng đi qua O và vuông góc với Δ ở O). Tích giao hoán này được gọi là phép vị tự - đối xứng và trục đối xứng Δ được gọi là trục đồng dạng, O được gọi là tâm đồng dạng. Phép đồng dạng nghịch tâm O, trục Δ và tỉ số k được ký hiệu là $\mathcal{Z}(O, \Delta, k)$.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $\mathcal{Z} \neq \mathcal{D}(\Delta), \mathcal{Z} \not{\mathcal{D}}(\Delta, \overrightarrow{v})$ và giả sử O là điểm bất động cần tìm của phép đồng dạng nghịch $\mathcal{Z}$ trong mặt phẳng xác định bởi hai tam giác đồng dạng ABC và $A'B'C'$. Vì tam giác $OA'B$ đồng dạng nghịch với tam giác OAB nên ta có (*Hình 37*)

$$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \tag{1}$$

Hình 37

Từ đó suy ra hai cặp đường thẳng OA, OA' và OB, OB' có chung nhau hai đường thẳng phân giác đồng thời cũng là hai trục đối xứng Os, Os', vuông góc với nhau ở O.

Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của trục Os với các đoạn thẳng AA' và BB' ta được

$$\frac{PA'}{PA} = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{QB'}{QB} = k \tag{2}$$

Mặt khác, gọi $A_1 = \mathcal{D}_{Os}(A)$ và $B_1 = \mathcal{D}_{Os'}(B)$ và nếu $AB \nparallel Os$ thì $(A'A_1) \cap (B'B_1) = O$. Từ đó suy ra điểm bất động O là giao điểm của hai trong ba đường thẳng đồng quy: $PQ, A'A_1$ và $B'B_1$:

$$O = (PQ) \cap (A'A_1) = (PQ) \cap (B'B_1) = (A'A_1) \cap (B'B_1)$$

Chú thích.

a) Nếu để ý rằng vì $k \neq 1$ nên không những (AA') và (BB') cắt Os tại P và Q mà (AA') và (BB') còn cắt cả Os' theo thứ tự các điểm P' và Q' và ta cũng có các hệ thức (2) trong đó P và Q được thay đổi bởi P' và Q', chỉ khác là trong trường hợp này thì P' và Q' đều chia ngoài các đoạn $A'A$ và BB' theo tỉ số số học k. Bởi vậy, điểm bất động O còn là điểm đồng quy của bốn đường thẳng $PQ, P'Q', A'A_1$ và $B'B_1$, trong đó các cặp điểm P, Q và P', Q' theo thứ tự là các điểm chia trong và chia ngoài các đoạn thẳng $[A'A]$ và $[B'B]$ theo tỉ số học k, trong đó k là tỉ số đồng dạng của $A'B'C'$ và ABC, cũng tức là tỉ số đồng dạng của $\mathcal{Z}$ nghịch.

b) Trên đây là trường hợp $A'B' \not\parallel AB$. Ta còn phải trường hợp $A'B' \parallel AB$. Nếu $A'B' \parallel AB$, thì khi đó, theo định lý Talét ta cũng có, $PQ \parallel AB \parallel A'B'$ đồng thời đường thẳng PQ đi qua giao điểm của AB' và $A'B$. Giao điểm này chính là điểm bất động O của $\mathcal{Z}$ nghịch cần tìm (*Hình 38*): $O = AB' \cap A'B \in (PQ)$. (PQ) chính là trục Os của phép đồng dạng nghịch.

Hình 38

Cũng từ các đẳng thức (1) và (2) ta suy ra phép đồng dạng nghịch $\mathcal{Z}$ trong mặt phẳng không những có điểm bất động duy nhất O xác định như trên mà còn phân tích được một cách duy nhất thành tích giao hoán của một phép vị tự tâm O tỉ số k (hoặc $-k$) và một phép đối xứng trục Δ đi qua O (hoặc Δ' vuông góc với Δ ở O). Trên *Hình 38* $(PQ) = \Delta, (P'Q') = \Delta'$. Tích giao hoán này được gọi là vị tự đối xứng và ký hiệu vắn tắt là $\mathcal{Z}(O, \Delta, k)$. Hai dạng $\mathcal{Z}(O, \varphi, k)$ và $\mathcal{Z}(O, \Delta, k)$ - phép vị tự - quay và phép vị tự - đối xứng gọi là hai dạng chính tắc của phép đồng dạng phẳng.

5 Bài tập về xác định và dạng chính tắc của một phép đồng dạng phẳng

4.1 Chứng minh định lý: Trong mặt phẳng cho hai đoan thẳng AB và $A'B' = kAB$, $(0 < k \neq 1)$. Thế thì có hai và chỉ hai phép đồng dạng $\mathcal{Z}_i : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ $(i = 1, 2)$ của $\mathcal{P}$ biến A thành A', B thành B', trong đó một phép là đồng dạng thuận còn phép kia là đồng dạng nghịch (đồng dạng gương hay phản đồng dạng).

4.2 Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các cạnh tương ứng song song với nhau nhưng không bằng nhau là hai tam giác vị tự với nhau. [Nói một cách khác, các đường thẳng AA', BB', CC' nối các cặp đỉnh tương ứng đồng quy ở một điểm O nào đó. Điểm O chính là tâm của phép vị tự biến tam giác này thành tam giác kia.

4.3 Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD. Chứng minh rằng có thể chia hình thang đó thành hai hình thanh nhỏ đồng dạng (thuận) với nhau

$(DCNM \backsim MNBA)$ bằng một đoạn thẳng MN song song với hai đáy, M trên AD và N trên BC.

4.4 Hai đường chéo A_1A_2 và B_1B_2 của một tứ giác (lồi) nội tiếp $A_1A_2B_1B_2$ cắt nhau ở điểm P. Gọi A_o, và B_o lần lượt là trung điểm của PA_1 và PB_1, chứng minh rằng $A_oA_1B_2$ và $B_oB_1A_2$ là hai tam giác đồng dạng nghịch.

4.5 Một hình chữ nhật mà mỗi cạnh (hoặc cạnh kéo dài của nó) chứa một đỉnh của một tứ giác (lồi) $ABCD$ gọi là hình chữ nhật ngoại tiếp tứ giác đó, ngược lại, $ABCD$ gọi là tứ giác nội tiếp hình chữ nhật. Chứng minh rằng có vô số hình chữ nhật $MNPQ$ ngoại tiếp một tứ giác (lồi) $ABCD$ có hai đường chéo AC, BD vuông góc, và tất cả các hình chữ nhật đó đều đồng dạng với nhau.

4.6 Cho AA_1, BB_1 và CC_1 là ba đường cao của một tam giác ABC. Gọi A', B', và C' là các hình chiếu (vuông góc) của một điểm M bất kỳ nằm trong mặt phẳng lần lượt trên AA_1, BB_1 và CC_1. Chứng minh tam giác $A'B'C'$ đồng dạng nghịch với tam giác ABC.

4.7 Cho hai tam giác đều (không bằng nhau) ABC và $A'B'C'$. Hỏi bao nhiêu phép đồng dạng (thuận và nghịch) biến tam giác thứ nhất thành tam giác thứ hai.

4.8 Chứng minh rằng trong một phép đồng dạng thuận thì tâm đồng dạng, hai điểm tương ứng M, M' và giao điểm P của hai đường thẳng tương ứng a và a' xuất phát từ hai điểm tương ứng đó cùng nằm trên một đường tròn.

4.9 Chứng minh rằng tâm của phép vị tự - quay biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{A'B'}$ cũng là tâm của phép vị tự - quay thứ hai biến $\overrightarrow{AA'}$ thành $\overrightarrow{BB'}$ (hai phép đồng dạng thuận có tâm chung).

4.10 Gọi C là giao điểm của hai đường thẳng AA' và BB', C' là giao điểm của hai đường thẳng AB và $A'B'$. Chứng minh rằng bốn đường tròn $(AA'C'), (BB'C')$ và $(A'B'C)$ đồng quy ở một điểm O nào đó.

4.11 Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') cắt nhau ở hai điểm P và Q. Chứng minh rằng chúng tương ứng với nhau trong một phép đồng dạng thuận (vị tự quay) có tâm ở giao điểm thứ nhất P (hoặc Q) và hai điểm tương ứng M, M' thì thẳng hàng với giao điểm thứ hai Q (hoặc P)

4.12 Giả sử P là một điểm nằm trong đoạn thẳng $[AB]$. Về cùng một phía của đường thẳng AB ta dựng hai hình vuông $APEF$ và $PBCD$, chứng minh rằng

a) Ba đường thẳng AD, BE và CF đồng quy ở một điểm Q nào đó.

b) Khi P chuyển động trên đoạn thẳng $[AB]$ thì đường thẳng (PQ) luôn đi qua một điểm cố định S, cách đều A và B. Tìm quỹ tích của điểm Q.

4.13 Cho một tam giác (lồi) $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau ở O nhưng không vuông góc với nhau. Gọi A' và C' lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của A và C trên BD; B' và D' lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của B và D trên AC. Chứng minh rằng tứ giác $A'B'C'D'$ đồng dạng nghịch với tứ giác $ABCD$.

4.14 Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau ở một điểm C. Với mỗi điểm M trong mặt phẳng ta cho liên kết với một điểm mới M' bằng cách sau đây. Qua M kẻ một cát tuyến m cắt a ở A và b ở B sao cho M là trung điểm của đoạn $[AB]$ (m là duy nhất). Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên b, B' là hình chiếu vuông góc của B trên a và M' là trung điểm của đoạn $[A'B']$.

a) Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \mapsto M$, từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ là một phép biến hình của mặt phẳng.

b) Hãy gọi tên phép biến hình đó.

§ 5 Vận dụng phép đồng dạng vào việc giải một số bài toán hình học phẳng - Thí dụ minh hoạ và Bài tập

1 Ứng dụng phép vị tự vào giải toán hình học

Thí dụ 1. Chứng minh rằng trong một tam giác

a) Ba đường trung tuyến đồng quy ở một điểm, điểm này cách mỗi đỉnh của tam giác bằng $2/3$ độ dài của đường trung tuyến phát xuất từ đỉnh đó.

b) Trọng tâm G trực tâm H và tâm O đường tròn ngoại tiếp cùng nằm trên một đường thẳng, gọi là đường thẳng Ơle, và giữa các điểm đó có hệ thức $\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\frac{1}{2}$

Chứng minh.

a) Thật vậy, theo kết quả nêu trong bài tập 4.2 thì $\triangle A'B'C'$ là hình vị tự của tam giác ABC (*Hình 39*) trong phép vị tự tâm G (là trọng tâm của $\triangle ABC$). Tỉ số $k = \overline{B'C'}/\overline{BC} = -1/2$.

b) Vì tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC trùng với trực tâm H' của tam giác $A'B'C'$ nên O (cũng tức là H') là hình vị tự của trực tâm H của tam giác ABC trong phép vị tự $V(G, -1/2)$ nói trên biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$, nghĩa là ta được (*Hình 40*) $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ hay là $\overline{GO}/\overline{GH} = -1/2$. Đây là điều phải chứng minh

Hình 39

Thí dụ 2. (Định lý về đường tròn Ơle) Chứng minh rằng trong một tam giác, trung điểm các cạnh, chân các đường cao và trung điểm của các đoạn thẳng nối trực tâm với các đỉnh cùng nằm trên một đường tròn, gọi là đường tròn chín điểm hay đường tròn Ơle của tam giác đó. Bán kính đường tròn Ơle bằng nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và tâm O' của đường tròn Ơle thẳng hàng với tâm O đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm G và trực tâm H trên đường thẳng Ơle sao cho O' là trung điemẻ của đoạn thẳng OH và bốn điểm H, G, O, O' làm thành một hàng điểm điều hoà.

Hình 40

Chứng minh.

Thật vậy, gọi O' là tâm đường tròn $(A'B'C')$ thế thì O' là hình vị tự của tâm O đường tròn (ABC) trong phép vị tự $V(G, -1/2)$. Do đó O' cũng nằm trên đường thẳng Ơle OGH và ta có (*Hình 40*).

$$\overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}, \text{ hay là } \frac{\overline{GO'}}{\overline{GO}} = -\frac{1}{2}$$

Từ hệ thức trên ta dễ dàng suy ra $\overline{HG} = 2\overline{GO} = 4\overline{O'G}$ và $\overline{OH} = 3\overline{OG}$; $3\overline{O'G} = \overline{O'O} = -\overline{O'H}$. Và do đó ta được $\overline{O'H} = -\overline{O'O}$ và

$$(HGOO') = \frac{\overline{OH}}{\overline{OG}}\frac{\overline{O'H}}{\overline{O'G}} = -1$$

Đây là điều phải chứng minh. Cũng từ đó suy ra

$$\frac{\overline{HO'}}{\overline{HO}} = -\frac{\overline{GO'}}{\overline{GO}} = \frac{1}{2}$$

hay là $\overrightarrow{HO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$ và do đó, H là tâm vị tự thứ hai biến đường tròn $(O) = (ABC)$ thành đường tròn $(O') = (A'B'C')$ theo tỉ số $1/2$.

Trong phép vị tự thứ hai $V(H, 1/2)$ này, các đỉnh A, B, C của tam giác ABC theo thứ tự biến thành các trung điểm A'', B'', C'' của các đoạn thẳng nối trực tâm H với các đỉnh A, B, C và do đó, các điểm này nằm trên đường tròn $(O) = (A'B'C')$.

Ngoài ra, để thấy rằng $A'A'', B'B''$ và $C'C''$ là các đường kính của đường tròn (O'). Từ đó suy ra (O') cũng đi qua chân A_1, B_1, C_1 của các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC. Chính vì vậy, đường tròn (O') được gọi là đường tròn chín điểm hay đường tròn Ơle của tam giác ABC.

Thí dụ 3. Sử dụng phép vị tự, chứng minh định lý Mênêlamút (Ménélaiis)

Định lý. Điều kiện cần và đủ để ba điểm A', B', C' nằm trên ba đường thẳng chứa các cạnh BC, CA, AB của một tam giác ABC thẳng hàng là

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = +1 \qquad (*)$$

Hình 41

Chứng minh. Trước hết, ta ký hiệu như sau cho gọn $V_1 = V(C', k_1), V_2 = V(B', k_2), V_3 = V(A', k_3)$, trong đó

$$k_1 = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}},\ k_2 = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}},\ k_3 = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}} \tag{1}$$

Thế thì rõ ràng ta có kết quả như sau

$$V_1 : B \mapsto A,\ V_2 : A \mapsto C, V_3 : B \mapsto C$$

Mặt khác, $V_2 \circ V_1 : B \mapsto C$. Nhưng theo định lý 20 về tích của hai phép vị tự thì $V_2 \circ V_1$ là một phép vị tự có tâm thẳng hàng với C' và B', và có tỷ số vị tự $k = k_1 k_2 \neq 1$ (vì $B'C' \not\parallel (BC)$ và $(B'C') \cap (BC) = A'$. Lại do $V_2 \circ V_1$ biến B thành C, bởi thế tâm của phép vị tự tích $V_2 \circ V_1$ phải là giao điểm A' của hai đường thẳng BC và $B'C'$. Nói khác đi là $V_2 \circ V_1 = V_3$. Vậy, ta phải có $k_1.k_2 = k_3$, hay là $k_1.k_2.k_3^{-1} = +1$ (2) . Cuối cùng, thay các giá trị của $k_i (i = 1, 2, 3)$ từ (1) và (2), ta thu được (*) cần tìm.

Thí dụ 4. Chứng minh rằng quỹ tích những điểm của mặt phẳng mà tỷ số khoảng cách từ đó đến hai đường thẳng cắt nhau ở một điểm O bằng $k\,(k > 0)$ không đổi gồm hai đường thẳng đi qua O.

Hình 42

Chứng minh. Giả sử $x'x$ và $y'y$ là hai đường thẳng cho trước cắt nhau ở điểm O (*Hình 42*) và M là một điểm của mặt phẳng sao $MH/MK = k$ (hằng số dương cho trước). Gọi M_1 là điểm tương ứng của điểm M trong một phép vị tự thay đổi[3] tâm O. Vậy quỹ tích này sẽ gồm những đường thẳng đã qua O. Điều đó khiến ta nghĩ đến việc tìm những điểm thuộc quỹ tích cần tìm trên một cát tuyến AB của hai đường thẳng Ox và Oy sao cho $OA = OB$. Với mỗi điểm

[3]tức là chỉ có thay đổ về giá trị của tỉ số vị tự mà thôi

M của AB các tam giác vuông MAH và MBK có các góc nhọn bằng nhau ở A và B thì đồng dạng với nhau và ta có $MH/MK = MA/MB$. Điểm M sẽ là một điểm của quỹ tích nếu tỷ số $MA/MB = k$, và rõ ràng là $MH/MK = k$ hay là $MA/MB = k$. Khi tỷ số $k \neq 1$ thì trên (AB) có hai điểm M và M' đáp ứng điều kiện đòi hỏi của bài toán. Vậy quỹ tích cần tìm bao gồm hai đường thẳng (OM) và (OM') liên hợp điều hoà đối với hai đường thẳng Ox và Oy đã cho (vì hành điểm $(ABMM')$ là điều hoà.

Thí dụ 5. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cho trước có hai đỉnh A, B cố định.

a) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Từ đó suy ra quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC.

Lời giải.

a) Gọi C_o là trung điểm cạnh AB, ta có (*Hình 43*) $\overrightarrow{C_oG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_oC}$. Suy ra $\{G\}$ nhận được từ $\{C\} = (O)$, trong phép vị tự $V_1(C_o, \frac{1}{3})$. Vậy $\{G\}$ là đường tròn tâm O_1, bán kính $R_1 = R/3$, trong đó R là bán kính của (O) còn O_1 được xác định bởi $\overrightarrow{OO'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_o}$. (1)

Hình 43

b) Ta có $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (Thí dụ 2). Do đó, $\{H\}$ được suy ra từ $\{G\}$ bởi phép vị tự $V_2(O, 3)$ tâm O, tỷ số $k = 3$. Vạy $\{H\}$ là đường tròn(O', R), trong đó O' được xác định bởi $\overrightarrow{OO'} = 3\overrightarrow{OO_1}$, hay (theo (1)) $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OC_o}$. (2)

Hệ thức (2) còn chứng tỏ rằng O' đối xứng với O qua C và qua cả (AB). Từ đó ta đi đến kết luận rằng quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC là đường tròn (O', R) đối xứng với đường tròn (O, R) ngoại tiếp ABC qua cạnh AB.

Nhận xét. Theo lập luận thì $\{H\}$ được suy ra từ $\{C\} = (O, R)$ bởi phép đồng dạng $\mathcal{Z} = V_2 \circ V_1$ là tích của hai hép vị tự $V_1(C_o, 1/3)$ và $V_2(O, 3)$ véctơ $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OC_o}$ (không đổi) theo Định lý 20. Ta lại thấy kết quả đã biết

($\overrightarrow{CH} = 2\overrightarrow{OC_o}$) nên trong thí dụ 2, mục 1 của bài 3.

Thí dụ 6. Dựng một đường tròn tiếp xúc với một đường tròn (O) cho trước và với một đường thẳng Δ cho trước, biết một trong các tiếp điểm.

Lời giải. Giả sử (w) là một đường tròn tiếp xúc với đường tròn (O) ở A và với đường thẳngΔ ở B (*Hình 44*), Ta nghĩ đến một phép vị tự tâm A là tiếp điểm của (O) và (w). Thật vậy, (O) là ảnh của (w) trong một phép vị tự tâm A biến B thành một trong hai đầu nút C hoặc D của đường kính CD của (w) vuông góc với Δ. Ta xét hai trường hợp như bài toán đã đặt ra (*Hình 44*).

Hình 44

1) Nếu điểm A cho trước trên đường tròn (O), thế thì chẳng hạn, đường thẳng CA cắt Δ ở điểm B và do đó, phép vị tự $V(A, k = \overline{AB}/\overline{AC}$ sẽ biến đường tròn (O) thành một đường tròn (w) tiếp xúc với (O) ở A và với Δ ở B. (Một lời giải thứ hai được thực hiện với đường thẳng DA).

2) Nếu điểm B cho trước trên đường thẳng Δ thế thì đường thẳng CB cắt lại (O) ở điểm A và phép vị tự $V(A, k = AB/AC)$ sẽ cho một đường tròn (w) tiếp xúc với D ở B và với (O) ở A. (Một lời giải thứ hai thực hiện tương tự với (DB)).

2 Ứng dụng phép đồng dạng thuận (vị tự quay) vào việc giải toán hình học

Thí dụ 7. Xét một tam giác ABC và một điểm D cho trước. Ta dựng các tam giác ADE, DBF đồng dạng (thuận) với tam giác ABC. Hãy so sánh các tam giác ABD, ACE và CBF và tìm hiểu bản chất của tứ giác $CEDF$.

Lời giải.
Từ $\triangle ADE \backsim \triangle DBF$ ta suy ra $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$ (*Hình 45*) và cũng vậy, $\triangle ABD \backsim \triangle ACE$. Các tam giác BAC và BDF là đồng dạng thuận, từ đó cũng

suy ra $\triangle BAD \backsim \triangle BCF$. Vì vậy, ba tam giác ABD, ACE và CBF là đồng dạng thuận.

Hình 45

Nhận xét. Từ ba tam giác ABC, ADE và DBF đồng dạng thuận ta đã thu được ba ta tam giác ABD, ACE và CBF cũng đồng dạng thuận. Như vậy là ta có thể trao đổi vai trò của C và D cho nhau rồi đó.

Bây giờ ta đặt $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha \pmod{2\pi}$ và $AC = kAB$. Thế thì phép đồng dạng thuận $\mathcal{Z}(A, k, \alpha)$ sẽ biến $\overrightarrow{BD}$ thành $\overrightarrow{CE}$, còn phép đồng dạng thuận $\mathcal{Z}(D, k, \alpha)$ sẽ biến $\overrightarrow{BD}$ thành $\overrightarrow{FD}$. Từ đó ta có $CE = kBD$ và $FD = kBD$ suy ra $CE = FD$ (1). Mặt khác $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CE}) = \alpha$ và $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FD}) = \alpha$ suy ra $(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{FD}) = \overrightarrow{0}$, $\pmod{2\pi}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FD}$ và do đó, $CEDF$ là một hình bình hành.

Thí dụ 8. Hãy sử dụng phép đồng dạng thuận để giải bài tập 3.26 (Bài toán Napoléon: Về tam giác đều $A_oB_oC_o$ sinh bởi một tam giác bất kỳ ABC)

Hình 46

Dễ thấy rằng A_oBC, B_oCA và C_oAB là ba tam giác cân đồng dạng có góc ở đáy 30^0. Ký hiệu $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}(C, 30^0, \sqrt{3})$ $\mathcal{Z}_2 = Z(B, 30^0, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Xét tích $\mathcal{Z}_2 \circ \mathcal{Z}_1$. Dễ thấy $\mathcal{Z}_1 : A_o \mapsto A'; B_o \mapsto A$ và $\mathcal{Z}_2 : A' \mapsto A_o : A \mapsto C_o$. Do đó, $\mathcal{Z}_2 \circ \mathcal{Z}_1 : B_o \mapsto C_o$ và $A_o \mapsto A_o$. Mặt khác, $k_1k_2 = \sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi_1 + \varphi_2 = 2.30^o = 60^o$

nên $\mathcal{Z}_2 \circ \mathcal{Z}_1$ là một phép dời hình $\mathcal{D}$, cụ thể là phép quay tâm A_o biến B_o thành C_o. Vậy $A_oB_oC_o$ là một tam giác đều. Bài toán được chứng minh.

Thí dụ 9. Trên hai đường thẳng a và b cắt nhau ở một điểm C có hai động tử chuyển động thẳng đều nhưng với vận tốc khác nhau: A trên a với vận tốc v_1, B trên b với vận tốc v_2, $v_1 \neq v_2$. Chúng không gặp nhau ở C.

a) Chứng minh rằng ở bất cứ thời điểm nào đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cũng luôn đi qua một điểm có định O nào đó, khác C.

b) Tìm quỹ đạo chuyển động của động từ M luôn ở vị trí trung điểm của $[AB]$.

Lời giải. a) Trước hết, ta chứng minh rằng ánh xạ $f : A(t) \mapsto B(t)$ từ đường thẳng a đến đường thẳng b là một ánh xa đồng dạng (thuận)$\mathcal{Z}$. Thật vậy, giả sử t_1, t_2 là hai thời điểm khác nhau nào đó, $0 \leq t_1 < t_2$. Để cho gọn ta ký hiệu như sau $A(t_i) = A_i, B(t_i) = B_i\, i = 1, 2$. Thế thì

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{v_2(t_2 - t_1)}{v_1(t_2 - t_1)} = \frac{v_2}{v_1} = k,\ (0 < k \text{ không đổi})$$

và $(\overrightarrow{A_1A_2}, (\overrightarrow{B_1B_2}) = \varphi \pmod{2\pi}$, trong đó $(a, b) = \varphi \pmod{\pi}$ là góc giữa hai đường thẳng a và b. Bởi vậy, trong mặt phẳng có một phép đồng dạng thuận $\mathcal{Z}(O, \varphi, k)$ biến a thành b, trong đó điểm $A(t)$ biến thành điểm $B(t)$ (*Hình 47*).

Hình 47

Theo Định lý 22 thì tâm đồng dạng (điểm bất động) O của $\mathcal{Z}$ là giao điểm thứ hai của hai đường tròn $(A_oB_oC_o)$ và (ABC). Vậy đường tròn (ABC) luôn đi qua O, khác với C cố định.

b) Ký hiệu $A_o = A(t_o), B_o = B(t_o = o)$, M_o là trung điểm của đoạn $[A_oB_o]$; $\overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{v_2}$ là các véctơ vận tốc của A và B.

Trả lời. Quỹ tích của M là đường thẳng $M_o m$ đi qua M_o và có véctơ chỉ phương là $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{v_1} + \vec{v_2})$ (suy ra từ $2\overrightarrow{M_oM} = (\vec{v_1} + \vec{v_2})t$).

Thí dụ 10. Dựng một tam giác biết các độ dài h_a, h_b, h_c ba đường cao của nó.

Phân tích. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC phải tìm, ta có

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{h_b h_c}{h_a} : h_c : h_b \qquad (*)$$

Các đẳng thức (*) chứng tỏ rằng nếu tồn tại, thì tam giác cần dựng sẽ đồng dạng với một tam giác $\mathcal{T}$ có độ dài các cạnh a', b', c', ký hiệu $\mathcal{T}(a', b', c')$ với $a' = \frac{h_b h_c}{h_a}, b' = h_c$ và $c' = h_b$ (**)

Vậy, việc dựng tam giác ABC phải tìm đưa về việc dựng tam giác $\mathcal{T}(A'B'C')$ có các cạnh xác định bởi (**):

$$\triangle ABC \backsim \triangle T(A'B'C')$$

Tuy nhiên, việc dựng tam giác $\mathcal{T}$ lại rất đơn giản bởi vì lại đưa về việc dựng đoạn tỷ lệ thứ tư a'. Từ sự phân tích trên đây, ta suy ra từng bước để dựng được $\triangle ABC$ cần tìm. Bước dựng cuối cùng là dựng tam giác ABC, vị tự với tam giác AB_oC_o (*Hình 48*), trong phép vị tự $V(A, k)$ tâm A, tỷ số $k = \frac{h_a}{h'_a}$, trong đó AB_oC_o là một tam giác dựng bất kỳ, miễn là $\triangle AB_oC_o \backsim \triangle\mathcal{T}(a', b', c')$ và $h'_a = AH_o$ là chiều cao AH_o hạ từ A của tam giác AB_oC_o. Dễ dàng chứng minh tam giác ABC có các chiều cao là h_a, h_b, h_c.

Hình 48

Biện luận. Bài toán có lời giải khi và chỉ khi tồn tại tam giác $\mathcal{T}(a', b', c')$. Bởi vậy, bài toán có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ biểu thị độ dài các cạnh của một tam giác nào đó; cũng tức là tồn tại

$$\mathcal{T}\Big(\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}\Big)$$

Thí dụ 11. Dùng một tứ giác (lồi) nội tiếp $ABCD$ biết độ dài các cạnh $AB = a, BC = b, CD = e, DA = d$, trong đó a, b, c là những độ dài cho trước.

Phân tích. Giả sử tứ giác $ABCD$ cần tìm đã dựng được. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp khi và chỉ khi $\angle A + \angle C = 180^o$ (hoặc $\angle B + \angle D) = 180^o$). Chính vì vậy, kéo dài cạnh BC về phía C để xuất hiện góc $\angle DCx = \angle BAD$ và kề bù với $\angle DCB$. Trên Cx lấy điểm E sao cho $\triangle DCE \backsim \triangle DAB$. Bài toán dựng tứ giác nội tiếp $ABCD$ được quy về việc dựng $\triangle DCE$.

Hình 49

Giả sử $\triangle DCE \backsim \triangle DAB$. Hai tam giác này chung đỉnh D, bởi vậy $\triangle DCE$ được suy ra từ $\triangle DAB$ bởi phép vị tự - quay $\mathcal{Z}(D, \varphi, k)$ với $\varphi = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}), k = c/d)$. Ta nghĩ đến việc sử dụng phép vị tự - quay để giải bài toán dựng hình này là vì vậy. Bởi vậy, đặt $c/d = k, (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \angle ADC = \delta = \varphi$ rồi xét phép vị tự - quay $\mathcal{Z}(D, \delta, k)$. $\mathcal{Z}$ biến $D \mapsto D$, $A \mapsto C$ và $B \mapsto E$ sao cho $C \in [BE]$ (*Hình 49*). Thế thì $\triangle DCE \backsim \triangle DAB$ và do đó $\angle DCE = \angle DAB$và B, C, E thẳng hàng theo thứ tự đó, đồng thời ta được $\angle BDE = \angle ADC = \delta$.

Như thế là, bằng cách sử dụng phép vị tự - quay $\mathcal{Z}$ này ta đã chuyển bài toán dựng tứ giác nội tiếp $ABCD$ về bài toán dựng tam giác DBE có các yếu tố đã biết

$$BC = b, CE = \frac{c}{d}a \text{ và do đó, } \quad BE = \frac{ac + bd}{d}, \ CD = c, \ \frac{DE}{DB} = \frac{c}{d}$$

Bài toán quy về dựng điểm D là một trong các giao điểm của đường tròn $\gamma_1(C, c)$ và đường tròn Apôlôniúyt (γ_2) có đường kính IJ mà I và J chia trong và ngoài đoạn $[BE]$ theo tỷ số học $k = c/d$. Đỉnh A đượcdựng sau cùng.

Biện luận. Bài toán có thể có một lời giải hoặc không có lời giải nào tuỳ theo (γ_1) và (γ_2) có cắt nhau hay không.

3 Ứng dụng phép đồng dạng nghịch (vị tự - đối xứng) vào việc giải toán hình học

Thí dụ 12. Trong mặt phẳng cho hai tam giác đều ABC và $A'BC$ cùng hướng, có đỉnh C chung sao cho A'và B' không trùng với tâm O đường tròn (ABC). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng $A'B$ và AB'. Chứng minh rằng

a) Tam giác $OB'M$ đồng dạng nghịchvới tam giác $OA'N$.

b) Hai góc $\angle A'OB'$ và $\angle MON$ có chung nhau đường phân giác

Lời giải. a) Xét phép $\mathcal{Z}(O, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}) = V(A, \frac{1}{2}) \circ Q(C, \frac{\pi}{3})$. Dễ thấy $\mathcal{Z} : A' \mapsto B' \mapsto N; O \mapsto O' \mapsto O$ và do đó, O là tâm đồng đạng của $\mathcal{Z}$. Từ đó ta được $OA' = 2ON$ và $(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{ON}) = \pi/3$. Suy ra tam giác$OAN$ vuông ở N và là nửa của một tam giác đều. Chứng minh tương tự ta có tam giác $OB'M$ vuông ở M và cũng là nửa của một D đều khác.

Hình 50

Kết luận. Tam giác $OB'M$ đồng dạng nghịch với tam giác $OA'N$.

b) Từ (1) suy ra $\angle A'OB'$ và $\angle MON$ có chung nhau đường phân giác.

Thí dụ 13. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC. Một đường tròn (O) thay đổi đi qua A, không tiếp xúc với các đường thẳng AB, AC và có tâm O chuyển động trên đường thẳng BC. Đường tròn này cắt tại các đường thẳng AB và AC lần lượt ở M và N. Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác AMN (Đề thi HSG toàn quốc, Bảng A, 3/2002).

Hướng dẫn giải. Giả sử $\angle A \neq 90^0$ (vì nếu $A = 90^0$ thì $H = A$ với mọi (O)

Lời giải 1. Gọi D là điểm xuyên tâm đối của điểm A trên đường tròn (O). Thế thì M và N theo thứ tự chính là các hình chiếu (vuông góc) của D trên (AB) và (AC) và do đó trực tâm H của AMN là điểm đối xứng với D qua trung điểm

MN. Gọi M'và N' lần lượt là hình chiếu của H trên (AC) và (AB). Dễ thấy rằng tam giác AHM' đồng dạng nghịch với tam giác ADM. Từ đó ta được

$$(AH, AM') = -(AD, AM) \pmod{\pi}$$
$$\frac{AH}{AD} = \frac{AM'}{AM} = \pm\cos\angle BAC = |\cos\angle BAC|$$

trong đó $\alpha = \angle BAC$ và do đó $\frac{AH}{AO} = 2|\cos\angle BAC| = 2|\cos\alpha|$. Các đẳng thức trên nói lên rằng (AH) đối xứng với (AO) qua phân giác Ap của góc $\angle A$ của tam giác ABC và $\frac{AH}{AO} = k$ không đổi, trong đó $k = 2|\cos\alpha|$. Vậy H là ảnh của O trong phép vị tự đối xứng $\mathcal{Z}(A, Ap, k)$.

Hình 51

Trả lời. Nếu ký hiệu $(BC) = a$ thì $\{H\}$ là đường thẳng a', ảnh của a trong phép đồng dạng nghịch (vị tự - đối xứng) $\mathcal{Z}(A, \Delta = Ap, k = 2|coA|)$, bỏ đi hai điểm H_i là ảnh của $O_i (i = 1, 2)$ trên $a = (BC)$ ở đó $\angle BAO_1 = \angle CAO_2 = 90^0$ (Hình 5.1)

Chú thích. $\{H\} = a'$ đi qua hai điểm E và F, trong đó $E = PE \perp AC$, $F = QF \perp AB$ và $P = \mathcal{D}(A), Q = \mathcal{D}(A)$ Đường thẳng (PQ) cũng được suy ra từ $a = (BC)$ qua phép vị tự $V(A, 2)$.

Lời giải 2. Gọi $P = \mathcal{D}(A), Q = \mathcal{D}(A); E = PE \perp AC, F = QF \perp AB$. Thế thì $O \in (BC)$ hay là $D \in (PQ)$ (i). Ta có MH cùng hướng và bằng DN, DN song song với PE, MD cùng hướng và bằngHN, HN song song với QF. Suy ra $D \in (PQ)$ hay là

$$\frac{\overline{FM}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{QD}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{DN}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{MH}}{\overline{PE}}$$

hay là $H \in (EF)$ (ii). Từ (i) và (ii) suy ra $\{O\} = (BC)\backslash\{O1, O2\}$ hay là $\{H\} = (EF)\backslash\{H1, H2\}$; $H_i = AO_j \cap (EF)$, trong đó E và F tương ứng là trực tâm của tam giác AFE vuông và tam giác AFQ vuông ở E) ($i \neq j\{i,j\} = \{1,2\}$)

4 Bài tập vận dụng phép đồng dạng vào việc giải toán hình học phẳng

A. Vận dụng phép vị tự và việc giải các bài toán sau đây

5.1 Gọi A_o, B_o, C_o, D_o, lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA của một hình vuông $ABCD$ và P là một điểm bất kỳ của mặt phẳng. Chứng minh rằng các điểm A_1, B_1, C_1, và D_1 đối xứng với điểm P lần lượt qua A_o, B_o, C_o và D_o, cũng là các đỉnh của một hình vuông.

5.2 Tứ giác lồi $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn (O,R). Gọi B_i là trọng tâm tam giác $A_jA_kA_l; i = 1,2,3,4$ $\{i,j,k,l\} = \{1,2,3,4\}$. Chứng minh rằng tứ giác $B_1B_2B_3B_4$ nội tiếp một đường tròn; hãy xác định tâm O_1 và bán kính R_1 đường tròn đó.

5.3 Cho một hình bình hành $ABCD$ \có khớp nối" ở các định. Nói một cách chính xác hơn là, độ dài các cạnh không đổi, các đỉnh A và B được giữ cố định nhưng các đỉnh C và D thì chuyển động trong mặt phẳng. Tìm quỹ đạo chuyển động qua tâm O hình bình hành \có khớp nối" đó.

5.4 Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thự đó. Gọi $(v_1), (v_2)$ theo tứ tự là các đường tròn đường kính AB và AC. Một điểm M chuyển động trên (v_1), đường thẳng AM cắt lại (v_2) ở điểm N. Tìm quỹ tích giao điểm P của BN và CM.

5.5 Giả sử ba đường tròn $(A_o), (B_o)$ và (C_o) có cùng bán kính, theo thứ tự tiếp xúc với hai cạnh của các góc A, B và C của một tam giác ABC. Gọi (D_o) là đường tròn thứ tưu tiếp xúc ngoài với cả ba đường tròn nói trên. Chứng minh rằng tâm D_o thẳng hàng với tâm các đường tròn nội ngoại tiếp tam giác ABC.

5.6 Đường tròn (J) tiếp xúc trong với đường tròn ngoại tiếp ABC cân ở A, đồng thời tiếp xúc với hai cạnh AB và AC ở M và N. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng MN là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. (Đề thi Toán quốc tế IMO, Rumani 1978).

5.7 Chứng minh rằng nếu gọi O là trọng tâm của hình tứ điểm phẳng $\{A_1, A_2, A_3, A_4,\}$ và P là giao điểm hai đường chéo A_1A_3 và A_4A_5 thì trọng tâm T của hình tứ giác phẳng là hình vị tự của điểm P trong phép vị tự $V(O, \frac{1}{3})$, nghĩa là $\overrightarrow{OT} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$.

5.8 Cho hai đường tròn $(O_1.R_1)$ và $(O_2.R_2)$ tiếp xúc ngoài nhau ở điểm C. Một góc vuông xCy quay xung quanh C; Cx và Cy cắt lại (O_1) và (O_2) theo thứ tự ở A và B. Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc H của C trên AB.

5.9 Cho một góc xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy dựng một đường tròn đi qua A và tiếp xúc với hai cạnh của góc đã cho.

5.10 Cho hai đường tròn (v_1) và (v_2) đồng tâm O. Hãy dựng một dây cung AD của đường tròn lớn cắt đường tròn nhỏ ở B và C sao cho $AD = 3BC$.

5.11 Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt A và H và một đường tròn (O) đi qua A. Hãy dựng một tam giác ABC nội tiếp (O) nhận H làm trực tâm.

5.12 Cho một hình viên phân $A\gamma B$ của đường tròn (O) [xác định bởi dây cung AB và một cung AB của nó]. Hãy dựng hai đường tròn $(v_1), (v_2)$ tiếp xúc ngoài nhau và cùng nội tiếp hình viên phân đã cho. Biện luận.

B. Vận dụng phép đồng dạng vào việc giải các bài toán sau đây

5.13 Cho CD là đường cao hạ xuống cạnh huyền AB của một tam giác ABC vuông ở C. Chứng minh rằng các trung tuyến AM và CN của hai tam giác ACD và CBD vuông góc với nhau.

5.14 Cho hai hình vuông cùng hướng $OABC$ và $OA'B'C'$ có chung đỉnh O.

a) Chứng minh rằng AA', BB' và CC' đồng quy; b) AA' vuông góc và bằng CC'.

b) Tìm độ lớn của góc giữa các tia AA' và BB', AA' và CC'

5.15 Giả sử OAA', OBB' và OCC' là ba tam giác cân cùng đỉnh O, bằng nhau và cùng hướng. Chứng minh rằng các cặp tương ứng $BC, B'C'; CA, C'A'$ của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ giao nhau theo ba điểm A_o, B_o và C_o tạo thành $\triangle A_oB_oC_o \backsim \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

5.16 Cho $ABCD$ là một tứ giác lồi nội tiếp một đường tròn tâm O. Phép quay góc $\varphi < \pi$ xung quanh O biến nó thành tứ giác $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng các cặp cạnh tương ứng $AB, A'B', BC, B'C'; CD, C'D'$ và $DA, D'A'$ của hai tứ giác đó cắt nhau tại các điểm M, N, P và Q là các đỉnh của một hình bình hành.

5.17 Dựng ra phía ngoài một tam giác ABC bất kỳ ba tam giác BCM, CAN và ABP sao cho $\angle MBC = \angle CAN = 45^o, \angle BCM = \angle NCA = 30^o$ và $\angle ABP = \angle PAB = 15^o$. Chứng minh rằng tam giác MNP vuông cân ở P.

5.18 Một hình vuông $ABCD$ có đỉnh D cố định và đỉnh A chuyển động trên một đường (γ) cho trước trong mặt phẳng, không đi qua D. Tìm quỹ đạo chuyển động của hai đỉnh B, C còn lại và của tâm O hình vuông $ABCD$ trong các trường hợp sau đây

a) (γ) là một đường thẳng a

b) (γ) là một đường tròn tâm S, bán kính R.

5.19 Một điểm P chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB. Tìm quỹ đạo chuyển động của hai điểm M và N trên đường thẳng (BM) sao cho $PM = PN = PA$.

5.20 Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) cắt nhau ở A và B. Hai động tử M_1 và M_2 xuất phát từ A lần lượt chuyển động tròn đều trên (O_1) và (O_2) theo cùng một hươướng, sau một vòng trở lại A cùng một lúc.

1. Chứng minh rằng
   a) Tam giác AM_1M_2 luôn đồng dạng với chính nó và đường thẳng M_1M_2 luôn đi qua B.
   b) Trong mặt phẳng có một điểm P duy nhất luôn cách đều M_1 và M_2 ở mọi thời điểm (Đề thi Toán quốc tế IMO, London 1979).
2. Tìm qũy đạo chuyển động của các điểm sau đây
   a) Trung điểm M của đoạn thẳng M_1M_2;
   b) Tâm C đường tròn (AM_1M_2);
   c) Trọng tâm G, trực tâm H của tam giác AM_1M_2.

5.21 Dựng tam giác MNP nội tiếp tam giác ABC đã cho, có đỉnh P cho trước trên cạnh AB và đồng dạng với một tam giác XYZ cho trước.

5.22 Dựng một hình bình hành nội tiếp một hình bình hành $ABCD$ cho trước và đồng dạng với một hình bình khác $MNPQ$ cho trước.

5.23 Dựng một tứ giác (lồi) $ABCD$ biết tổng độ lớn hai góc đối diện $\angle A + \angle C = \theta$ và độ dài các cạnh $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$.

5.24 Cho tam giác ABC. Dựng tam giác XYZ nội tiếp tam giác đã cho với các đỉnh X, Y, Z lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho đồng dạng (thuận) với tam giác ABC và có diện tích nhỏ nhất.

5.25 Dựng ra phía ngoài tam giác ABC hai tam giác đều BOA và CAB_1. Gọi A_o và B_o lần lượt là tâm của các tam giác đó và P là trung điểm cạnh AB. Chứng minh rằng

a) Hai tam giác A_oB_1P, B_oA_1P là vuông ở P đồng dạng nghịch với nhau

b) Hai góc A_oPB_o và A_1PB_1 có chung nhau đường phân giác.

5.26 Một điểm P chuyển động trên đường thẳng chứa cạnh BC của một tam giác ABC không vuong đã cho. Các đường thẳng đi qua P vuông góc với AC và AB theo thứ tự cắt các đường thẳng AB và AC ở M và N. Tìm quỹ tích của điểm Q, đối xứng với P qua trung điểm của MN.

5.27 Cho một đường thẳng p, một điểm A trên p và hai đường tròn (v_1) và (v_2). Dựng một tam giác ABC nhận p làm đường phân giác trong của góc A, các đỉnh B và C theo thứ tự nằm trên (v_1) và (v_2) và $AB/AC = m/n$ (m và n là hai số dương cho trước).

[4].

[4]Các bài toán 5.25, 526, 5.27 đòi hỏi vận dụng tính chất của phép đồng dạng nghịch (vị tự - đối xứng)

Chương 3

Trả lời và hướng dẫn giải bài tập

§ 1

1.1 Gọi M_o và N_o lần lượt là tiếp điểm của a và b với đường tròn (O); nói khác đi, ta có thể viết như sau để diễn tả ký hiệu đó: $(M_oM_o) = a, (N_oN_o) = b$. Ta xét hai trường hợp: 1) Nếu $a \parallel b$ thì điểm M_o trên a không có ảnh trên b còn điểm N_o trên b không có tạo ảnh trên a. 2) Nếu $a \cap b = C$ thì M_o trên a có ảnh là C bên B, N_o trên b có tạo ảnh là C trên b; nhưng M_1 trên a, ở đó tiếp tuyến thứ hai với (O) song song với b không có ảnh trên b và M_1 trên b, ở đó tiếp tuyến thứ hai với (O) song song với a không có tạo ảnh trên a. Như vậy thì cả hai trường hợp a song song với b và a cắt b, ánh xạ $f : M \mapsto N$ từ $a \to b$ không phải là một song ánh. Ta đi đến kết luận rằng muốn cho $f : M \mapsto N$ từ $a \to b$ là một song ánh thì mỗi đường thẳng a và b đều phải bỏ đi một điểm. Nếu a song song với b thì f là một song ánh từ $a \backslash \{M_o\}$ đến $b \backslash \{N_o\}$. Còn nếu $a \cap b = C$ thì f là một song ánh từ $a \backslash \{M_1\}$ đến $b \backslash \{N_1\}$.

Nhận xét. Nếu ta bổ sung vào mỗi đường thẳng a và b một điểm mới mà theo trực giác, ta gọi là điểm ở vô tận hay điểm xa vô tận, xác định bởi phương của các đường thẳng đó là ánh xạ $f : M \mapsto N$ từ $a \to b$ lại trở thành một song ánh (vì nếu $a \parallel b$ thì M_o trên a có ảnh là điểm N_∞ trên b và M_∞ trên b có tạo ảnh là M_o trên a; cũng vậy, nếu $a \cap b = C$ thì $M_1 \mapsto N_\infty$ trên b và $M_\infty \mapsto N_1$.

1.2 Nếu $a \perp b = O$ thì O tương ứng với mọi điểm M của mặt phẳng. Nếu $a \not\perp b$ cần xét hai trường hợp.
1) $a \cap b = O$ (cố nhiên $a \not\perp b$), hãy chứng tỏ rằng M' là trực tâm của tam giácOAB. Từ đó suy ra ánh xạ $f : M \mapsto M'$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ là một toàn ánh (tức f là một phép biến hình của $\mathcal{P}$) khi và chỉ khi $a \not\perp b$.
2) $a \parallel b$ thì điểm M' được hoàn toàn xác định và duy nhất. Có thể chứng minh rằng khi đó $f = \mathcal{D}(\Delta)$ là phép đối xứng có trục Δ song song và cách

đều a và b.

1.3 1) Hãy chứng minh rằng điểm M phải tìm là giao điểm thứ hai của đường thẳng Δ và đường tròn (OPN') trong đó N' đối xứng với N qua đường thẳng a.
2) $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{QO}$ (không đổi), trong đó Q là hình chiếu (vuông góc) của P trên Δ.

1.4 1) Có thể sử dụng quỹ tích những điểm mà tỉ số khoảng cách đến hai cạnh của một góc là một hằng số k là một tia nằm trong góc đó (khi $k = 1$ thì tia đó là tia phân giác của góc). Cũng có thể xét các điểm A', B' và C' đối xứng với điểm M lần lượt qua các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, rồi chứng minh AM, BM, và CM lần lượt là phân giác các góc $\angle B'A'C', \angle C'BA'$ và $\angle A'CB'$. Điểm M' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.
2) Chứng tỏ rằng khi $M = A$ thì M' là bất cứ điểm nào của đường thẳng (BC).
3) Chứng tỏ rằng $Ax' \cap By' \cap Cz' = M'$ khi và chỉ khi A', B', và C' không thẳng hàng rồi áp dụng định lý (cần và đủ) về đường thẳng Simson.
4)$\mathcal{T} = \mathcal{P} \backslash \mathcal{T}_O$, trong đó $\mathcal{T}_O = (BC) \cup (CA) \cup (AB) \cup (ABC)$ (Đường tròn (ABC)).

1.5 Sử dụng tính chất của phép dời hình (bảo toàn khoảng cách) nêu trong định nghĩa.

1.6 Sử dụng tính chất của phép dời hình nêu trong Hệ quả 1 của Định lý 1, suy ra phép dời hình bảo toàn tương quan liên thuộc giữa điểm và đường thẳng, kết hợp với phương pháp chứng minh phản chứng.

1.7 Gọi M là một điểm bất kỳ của $\mathcal{P}$ và $M' = f(M)$, ta chứng minh $M' = M(\forall M)$ bằng phương pháp phản chứng. Nếu $M' \neq M(\forall M)$ thì A, B, C thẳng hàng trên trung trực $t[MM']$, mâu thuẫn với giả thiết (A, B, C không thẳng hàng).

1.8 Sử dụng các tính chất của phép dời hình: bảo toàn khoảng cách, bảo toàn tỉ số của hai đoạn thẳng cùng phương, bảo toàn góc và các tính chất đặc trưng của trọng tâm, trực tâm và tâm các đường tròn nội, ngoại tiếp của tam giác.

1.9 Sử dụng tính chất: Nếu A' và B' là ảnh của A và B trong một phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ thì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Suy ra $A'B' \parallel AB$ nếu $\overrightarrow{AB} \nparallel \vec{v}$ và $(A'B') = (AB)$ nếu $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{v}$.

1.10 Tập hợp những đường thẳng bất biến trong phép đối xứng tâm O là chùm đường thẳng tâm O.

1.11 Những đường thẳng bất biến trong phép đối xứng - trục Δ ký hiệu $\mathcal{D}(\Delta)$ là những đường thẳng vuông góc với trục đối xứng Δ, còn những đường thẳng có phương bất biến qua $\mathcal{D}(\Delta)$ bao gồm những đường thẳng bất biến vuông góc với Δ) và những đường thẳng song song với Δ.

1.12 Có tất cả sáu phép trong đó có ba dời hình thuận và ba dời hình nghịch (đối xứng) Ba phép dời hình là $Id, Q(O, 2\pi/3), Q(0, 4\pi/3)$. Ba phép đối xứng là $\mathcal{D}(t[BC]), \mathcal{D}(t[CA]), \mathcal{D}(t[AB])$, trong đó $t[XY]$ là trung trực của $[XY]$.

1.13 Có tất cả tám phép bao gồm bốn dời hình thuận và bốn dời hình nghịch; bao gồm: $Id = Q(O,0), Q(O,\pi/2), Q(O,\pi) = \mathcal{D}(O), \mathcal{Q}(O, 3\pi/2)$, trong đó $O = AC \cap BD$ là tâm hình vuông, và $\mathcal{D}(AC), \mathcal{D}(BD), \mathcal{D}(t[AB]), \mathcal{D}(t[BC])$.

1.14 Chỉ có hai phép dời hình là Id và $\mathcal{D}(O)$ biến hình bình hành $ABCD$ thành chính nó, trong đó $O = AC \cap BD$ là tâm hình bình hành.

1.15 Có tất cả bốn phép: $Id, \mathcal{D}(O)$ là hai phép đối xứng - trục qua trung trực của một cặp cạnh đối diện.

1.16 Nếu $\Delta_1 \perp \Delta_2 = O$ thì ta có (với ký hiệu $\mathcal{D}(D_i) = \mathcal{D}_i, i = 1, 2$)

$$\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(O);\ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}(O) = \mathcal{D}(O) \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2,$$
$$\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}(O) = \mathcal{D}(O) \circ \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$$

§ 2

2.1 Định lý này được suy ra từ Định lý 3 về sự xác định một phép đẳng cự (bao gồm dời hình và phản dời hình) phẳng. Cặp điểm tương ứng thứ ba C, C' chỉ có ý nghĩa để xác định phép dời hình (đẳng cự) được xác định bởi hai tam giác bằng nhau ABC và $A'B'C'$ (trong đó các cặp điểm tương ứng là $A, A'; B, B'$ và C, C') là thuận hay nghịch, tuỳ theo tam giác $A'B'C'$ cùng hướng hay khác hướng với tam giác ABC.

2.2 Có tất cả hai phép dời hình gồm một dời hình thuận và một dời hình nghịch biến tam giác thứ nhất thành tam giác thứ hai, trong đó $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$ hoặc $A \mapsto A', B \mapsto C', C \mapsto B'$. Nếu ABC là dời hình thuận thì $ABC \xrightarrow{f_1} A'B'C'$ là dời hình nghịch. Nếu $ABC \xrightarrow{f_2} A'C'B'$ là dời hình nghịch.

2.3 Có tất cả sáu phép đẳng cự bao gồm ba dời hình và ba phép phản chiếu (dời hình nghịch). Các phép đó được xác định bởi các cặp tam giác đều bằng nhau sau đây: $ABC, A'B'C'; ABC, B'C'A'; ABC, C'A'B'; ABC, A'C'B'$ và $ABC, C'B'A'$.

2.4 Vì không có một cặp cạnh tương ứng nào song song nên phép dời hình duy nhất biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ (hai tam giác này này bằng nhau theo giả thiết) phải là một phép quay tâm O nào đó. Do đó tồn tại O sao cho $O = t[AA'] \cap t[BB'] \cap t[CC']$.

2.5 Sử dụng dạng chính tắc của phép dời hình nghịch trong mặt phẳng. Các điểm A_o, B_o, C_o thẳng hàng trên trục Δ của phép đối xứng - trượt trục $\Delta\mathcal{D}(\Delta, \vec{v})$. Tuy nhiên, cũng có thể chứng minh trực tiếp tính chất này bằng cách kẻ thêm đường phụ. Chẳng hạn, trước hết thực hiện $\mathcal{T}(\vec{v})$ với $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ biến ABC thành $A'B''C''$ sau đó chứng minh các trung điểm B_1 và C_1 của các đoạn thẳng $B'B$" và $C'C$" và A' là ba điểm thẳng hàng. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2.6 Ký hiệu $\Delta_i, i = 1, 2, 3$ là các trục đối xứng và $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}(\Delta_i)$. Xét tích $f = \mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ (1). Tích $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ là $\mathcal{T}(\vec{v})$ hoặc $Q(O, \varphi)$ tuỳ theo Δ_1 song song hay giao với Δ_2 tại O. Gọi Δ_4 là trục thứ tư được dựng sao cho $\mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$. Tồn tại $\mathcal{D}_4$ theo các Định lý 4' và 5'). Thay vào biểu thức (1) của f thì được $f = \mathcal{D}_4$. Đây là điều phải chứng minh.

2.7 Để ý rằng Định lý 8 (Bài tập 2.6 ở trên) là điều kiện đủ để $f = \mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ là một phép đối xứng - trục $\mathcal{D}_4$. Còn trong bài toán này ta phải thiết lập điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ cùng thuộc một chùm đường thẳng (đồng quy hoặc song song). Đó là $f = \mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_4$ hay là $\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_4$ (2). Các tích ở hai vế của (2) đều biểu thị một phép dời hình $\mathcal{D}$ nào đó, nghĩa là hoặc một phép quay $Q(O, \varphi)$, hoặc một phép tịnh tiến $\mathcal{T}(\vec{v})$ mà $O = \Delta_1 \cap \Delta_2 = \Delta_3 \cap \Delta_4$ hoặc $\vec{v} \perp \Delta_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Từ đó suy ra dấu hiệu nhận biết cần tìm.

2.8 Sử dụng Định lý 5', phân tích: $Q_1(O_1, \varphi_1) = \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$ và $Q_2(O_2, \varphi) = \mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_2$ trong đó $\mathcal{D}_i = \mathcal{D}(\Delta_i)$ và $\Delta_2 = (O_1O_2)$. Suy ra $Q_2 \circ Q_1 = \mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_1$, trong đó $(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\varphi}{2} \pmod{\pi}$ và $\Delta_2, \Delta_3 = \frac{\varphi_2}{2}$ và $(\Delta_1, \Delta_3) = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + k\pi$. Cuối cùng đưa đến việc xét hai trường hợp $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 2k\pi$ và $\varphi + \varphi_2 = 2k\pi$

2.9 Sử dụng các Định lý 4' và 5' rồi phân tích $Q(O, \varphi)$ và $\mathcal{T}(\vec{v})$ thành tích của hai $\mathcal{D}(\Delta_i) = \mathcal{D}_i$. Cuối cùng thu được $f = \mathcal{T}(\vec{v}) \circ Q(O, \varphi) = \mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_1 = Q(\omega, \varphi)$, trong đó $O \in \Delta_1$ sao cho $(\Delta_1, \Delta_2) = \varphi/2 \pmod{\pi}$; $O \in \Delta_2 \perp \vec{v}$ và Δ_3 suy ra từ Δ_2 bởi $\mathcal{T}(\frac{\vec{v}}{2})$ và $\omega = \Delta_1 \cap \Delta_3$. Đối với tích $f' = Q(O, \varphi) \circ \mathcal{T}(\vec{v})$ cũng làm tương tự như f. Ký hiệu $\Delta_1' = \mathcal{D}_2(\Delta_3)$, ta được: $f' = \mathcal{D}_3' \circ \mathcal{D}_1' = Q'(\omega', \varphi)$, trong đó $\mathcal{D}_i' = \mathcal{D}(\Delta_i')$, $i = 1, 3$ và $\omega' = \Delta_1' \cap \Delta_3'$

2.10 Từ giả thiết ta có $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Sau đó sử dụng Định lý 3. Tồn tại một phép đẳng cự $f : A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$. Sử dụng giả thiết hai tứ giác là lồi nên D nằm khác phía với B đối với AC, D' khác với B' đối với $A'C'$ rồi suy ra $\triangle BAD = \triangle B'A'D'$ và $\triangle BCD = \triangle B'C'D'$ và f cũng biến $D \mapsto D'$ và do đó $A'B'C'D' =$ hoặc $\doteq ABCD$ tuỳ theo hai tứ giác này cùng hướng hay ngược hướng.

2.11 *Trả lời.* Có hai phép đẳng cự biến $ABCD$ thành $A'B'C'D'$, trong đó một dời hình và một phản chiếu. Phép dời hình là phép quay $Q(A,\varphi)$, trong đó $\varphi = (AB, AB'),\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ hoặc $\varphi = (AB, AD'),\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ tuỳ theo hai hình vuông cùng hướng hay khác hướng. Phép phản chiếu là phép đối xứng - trục $\mathcal{D}(\Delta)$, trong đó $\Delta = t[CC']$ là trung trực của $[CC']$.

2.12 Sử dụng hệ thức véctơ biểu thị H là trực tâm của tam giác ABC. Từ đó hãy chứng tỏ rằng bốn đoạn thẳng A_iH_i có cùng trung điểm O' đối xứng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp $A_1A_2A_3A_4$ qua trọng tâm G của tứ điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

§ 3

A

3.1 Gọi AD, BE và CF là các trung tuyến của tam giác ABC. Thực hiện việc tịnh tiến BE theo $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$, đưa BE đến DP thì E trở thành trung điểm chung của CA và PF. Từ đó suy ra $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$. Vậy $\exists\, \mathcal{T}(AD, BE, CF) = \triangle ADP$

3.2 *Trả lời.* $AH = \sqrt{a^2 - b^2}$
Chứng minh trực tâm H của tam giác AEF là đỉnh thứ tưu của hình bình hành $ECFH$. Sau đó thực hiện tịnh tiến theo $\overrightarrow{HF}$ rồi suy ra $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{GF}$, trong đó G là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AHFG$.

3.3 Trước hết, $\{O\}$= đường tròn (A, r) trong đó O là tâm của đường tròn (v). Để ý rằng với mỗi (O, r) chuyển động đi qua A có hai tiếp tuyến $t_i, (i = 1, 2)$ song song với Δ mà các tiếp điểm T_i đối xứng nhau qua O sao cho $T_1T_2 \perp \Delta$.

Trả lời. $\{T_1\}$ và $\{T_2\}$ là hai đường tròn (K_1, r) và (K_2, r) được suy ra từ đường tròn $(A, r) = \{O\}$ bởi hai phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AK_1} = \vec{r}$ và $\overrightarrow{AK_2} = -\vec{r}$, trong đó $[K_1K_2]$ là đường kính vuông góc với Δ của (A, r).

3.4 Để ý rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ hay là $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$ tương đương với $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SN}$ thì $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{SB}$ (và ngược lại) đồng thời $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{HK}$, trong đó $K = (MD) \cap (NE)$ và CK là một đường kính của đường tròn (CDE).

Cuối cùng, thiết lập hệ thức $2\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH}$. Suy ra $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{OC}$, trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3.5 Giả sử $d(B, CD) < d(A, CD)$, trong đó $d(X, YZ)$ là ký hiệu khoảng cách từ điểm X đến đường thẳng YZ. Thực hiện $\mathcal{T}(\vec{v} = \overrightarrow{NB})$ thì $N \mapsto B$ và $M \mapsto D$ sao cho $MNBD$ là một hình bình hành và do đó $DB \,\|{=}\, MN = \ell$. Đặt $\overrightarrow{MN} = \vec{\ell}$ và gọi $\vec{\ell}$ là véctơ chỉ phương của đường thẳng (CD) chứa đường kính $[CD]$ của (O). Suy ra $\overrightarrow{BD} = -\vec{\ell}$ và $MD \parallel (BN) = (BP)$, do đó $\angle AMD = \angle APB = \varphi$. Điểm M được hoàn toàn xác định, M là một trong các giao điểm của $[CD]$ và cung (γ) chứa góc định hướng φ dựng trên đoạn AD, trong đó $\vec{BD} = -\vec{\ell}$. Bài toán có hai, một hoặc không có lời giải tuỳ theo (γ) cắt, tiếp xúc hay không cắt $[CD]$.

3.6 Giả sử đã dựng được cát tuyến $\Delta \parallel d$ và cắt (O) và (O') theo hai dây cung tương ứng là MN và $M'N'$ sao cho $MN + M'N' = \ell$ cho trước. Kéo dài MN về phía N lấy điểm M_1 sao cho $MM_1 = l$ rồi đặt $\overrightarrow{MM_1} = \vec{\ell}$ và gọi $\vec{l}$ là véctơ chỉ phương của d. Thực hiện $\mathcal{T}(\vec{l}) : (O) \mapsto (O_1)$ có tâm O_1 xác định bởi $\overrightarrow{OO_1} = \vec{l}$. Sau đó thực hiện tịnh tiến theo $\vec{v} = \overrightarrow{M'N} = \overrightarrow{N'M_1}$ biến (O') thành (w). Thế thì Δ cắt (w) theo dây cung $MM_1 = \ell = NM_1 + M_1N = M'N' + MN$, trong đó N_1 là giao điểm thứ hai của Δ và (O_1). Suy ra $w = O'w \perp t[OO_1]$, trong đó $t[OO_1]$ là trung trực của đoạn $[OO_1]$. Kết luận: Cát tuyến Δ phải tìm là đường thẳng đi qua một giao điểm của hai đường tròn (O_1, R), (w, R') và song song với d, trong đó R và R' lần lượt là bán kính của (O) và (O') đã cho.
Biện luận: Bài toán có nghiệm (hai hoặc một) khi và chỉ khi

$$|R - R'| \leq \frac{\ell}{2} \leq O_1w \leq R + R'$$

B

3.7 Hãy chứng tỏ rằng $Ax \cap By \cap Cz \cap Dt = Q = \mathcal{D}_O(P)$, trong đó O là tâm hình bình hành $ABCD$. Và do đó ánh xạ $f : P \mapsto Q$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ là một phép biến hình điểm của $\mathcal{P}$: phép đối xứng tâm.

3.8 Ta có $O = AC \cap BD$ là tâm đối xứng của hình bình hành $ABCD$. $\mathcal{D}(O)$: $M \mapsto M' \in CD$ và $N \mapsto N' \in DA$ và $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra $\triangle DM'N' = \triangle DPQ$, và $M'N'$ song song và bằng PQ. Do đó, $M' = P$ và $N' = Q$ và O cũng là tâm đối xứng của hình bình hành $MNPQ$.

3.9 Chiến thuật chơi của người thứ nhất như sau: Người đi đầu tiên đặt đồng xu vào tâm bàn, sau đó đợi người thứ hai đi, đặt đồng xu ở bất kỳ đâu trên bàn, đến lượt mình đi thì đặt đồng xu vào vị trí đối xứng với đồng xu của người thứ hai (vừa đặt trước đó) qua tâm bàn. Chiến thuật chơi của người thứ nhất cứ tiếp tục lặp lại như nước đi đầu tiên.

3.10 Điểm đồng quy của sáu đường thẳng là điểm O' đối xứng với tâm O đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ qua trọng tâm G cuả \tứ diểm đồng viên" $\{A, B, C, D\}$.

3.11 Thực hiện phép đối xứng tâm $\mathcal{D}(P)$, biến $a \to a'$. Điểm B trên (O) phải tìm là một giao điểm của (O) và a'.
Biện luận. Bài toán có hai hoặc một nghiệm hình (lời giải) nếu P nằm cùng phía với (O) đối với a và $d_1 - 2d_2 \leq R$. Bài toán vô nghiệm nếu P cùng phía với (O) đối với a và $d_1 - 2d_2 > R$ hoặc P nằm khác phía với (O) đối với a, trong đó R là bán kính của (O), $d_1 = d(O, a)$ và $d_2 = d(P, a)$.

3.12 Ba đường thẳng cắt $MN(\| BC), PQ(\| CA)$ và $RS(\| AB)$ là các tiếp tuyến song song với BC, CA và AB của đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC. Lục giác $MNPQRS$ thu được không những ngoại tiếp đường tròn (I) mà còn nhận I làm tâm đối xứng.

3.13 Thực hiện phép đối xứng - tâm $\mathcal{D}(P)$: $M \mapsto N, S \mapsto S', A \mapsto A'$ và $B \mapsto B'$. Suy ra S' là đỉnh thứ tư chung của ba hình bình hành $MSNS', ASA'S', BSB'S'$ có cùng tâm đối xứng P. Suy ra A', N, S' thẳng hàng và B', M, S' thẳng hàng. Mặt khác, góc nội tiếp $\angle ASB = \gamma$ (không đổi), suy ra $\angle AMB' = \angle A'NB = \pi - \gamma$. Đẳng thức này hoàn toàn xác định điểm M hoặc điểm N. Chẳng hạn, điểm M là giao điểm của dây cung CD và cung chứa góc định hướng $\pi - \gamma \pmod{2\pi}$ dựng trên đoạn thẳng $[B'A]$, trong đó B' đối xứng với B qua P. Suy ra $S = [AM) \cap (O)$. Bài toán luôn có lời giải .

C

3.14 Hãy để ý đến tính chất sau: Đường nối tâm Ow của hai đường tròn (O) và (w) là trục đối xứng chung của hai đường tròn đó. Nếu chúng cắt nhau thì đường nối tâm hai đường tròn là trung trực của dây cung chung của chúng.

3.15 Hình $\mathcal{H}$ gồm đường tròn (O) và hai đường tròn bằng nhau $(O_1), (O_2)$ cùng tiếp xúc trong với (O) có trục đối xứng là trung trực $\Delta = t[O_1, O_2]$ của O_1, O_2 trùng với đường kính của (O) vuông góc với A_1A_2 và do đó cũng là $t[A_1, A_2]$. $\mathcal{D}(A)$ biến $M \mapsto M', B_1 \to B_1', B_2 \to B_2'$, suy ra $MM' \| B_1B_1' \| B_2B_2'$ và A_1, B_2', M' thẳng hàng và A_2, B_1', M' cũng thẳng hàng. Mặt khác, phép vị tự $V(A_1, R_1/R_2)$ biến B_1B_2' thành $MM' \| B_1B_2'$ và do đó suy ra $(B_1B_2') = (B_2B_2')$, nghĩa là $B_1B_2' \| MM'$. Suy ra $B_1B_2 \| A_1A_2$. Chứng minh này, ngoài phép đối xứng - trục còn sử dụng tính chất của phép vị tự.

Chú thích. Có thể chứng minh trực tiếp từ $\triangle A_1O_1B_1 \backsim \triangle A_1OM$ và $\triangle A_2O_2M_2 \backsim \triangle A_2OM$, sau đó áp dụng định lý Talét chứng minh $\frac{MB_1}{MA_1} = \frac{MB_2}{MA_2}$ suy ra $B_1B_2 \parallel A_1A_2$.

3.16 Phép $\mathcal{D}(AB) : CD \mapsto C'D' \perp CD = M \in AB$. Suy ra $MC' = MC$. Mặt khác, vì $\angle C'CD = 45^o$ nên $C'D$ không đổi.
Trả lời. $MC^2 + MD^2 = 2R^2$ $(R = \frac{1}{2}AB)$.

3.17 $\{M = (BD) \cap \Delta\}$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác cân ABC đã cho.

3.18 Giả sử hai gương thẳng g_1 và g_2 được đặt sao cho hai mép gương của chúng áp sát nhau tạo thành cạnh c của một góc nhị diện $\angle c(g_1, g_2)$ có góc phẳng là góc (nhọn) xOy: $Ox \perp c, Oy \perp c$. Để tính độ lớn của góc $\angle xOy$ ta phải sử dụng định luật quang học: góc phản xạ bằng góc tới.
Trả lời. $\angle xOy = 45^o$

3.19 Trả lời. Điểm P cần tìm là giao điểm của xy và một tiếp tuyến kẻ từ A với đường tròn tâm B' tiếp xúc với xy, trong đó B' đối xứng với B qua xy.

3.20 1) Gọi $D' = \mathcal{D}(D)$, trong đó $\Delta = t[AC]$ là trung trực của AC. Khi đó vì $ABCD$ là một tứ giác lồi, ta thu được bất đẳng thức cần tìm.
2) Dấu đẳng thức ở (*) đạt được khi và chỉ khi đồng thời ta phải có $s(BAD') = \frac{1}{2}AB.AD'$ và $s(B'D'C) = \frac{1}{2}BC.CD'$ và do đó $\angle BAD' = \angle BCD' = 90^o$, tức là $ABCD'$ và do đó $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp có hai đường chéo AC, BD vuông góc.

D

3.21 *Trả lời.* Các phép dời hình biến (O_1) thành (O_2) gồm $\mathcal{T}(\vec{v} = \overrightarrow{O_1O_2})$, $\mathcal{D}(O)$, trong đó O là trung điểm của $[O_1O_2]$ và vô số phép quay có tâm w nằm trên $\Delta = t[O_1O_2]$. Các phép phản chiếu gồm $\mathcal{D}(\Delta)$ và vô số phép đối xứng - trượt có trục d là một đường thẳng bất kỳ đi qua O.

3.22 Trước hết, chứng minh tính chất sau đây của tâm quay: Trong một phép quay không phải là một phép đối xứng - tâm thì tâm quay, hai điểm tương ứng và giao điểm của hai đường thẳng tương ứng phát xuất từ hai điểm đó là bốn điểm cùng thuộc một đường tròn. (Sử dụng góc định hướng $(\mathrm{mod}\ \pi)$ của hai đường thẳng). Hoặc chứng minh tính chất: Trong một phép dời hình (thuận), góc giữa hai đường thẳng tương ứng có độ lớn (đại số) không đổi.

Gọi $\varphi = (a, b)$, $(\mathrm{mod}\ \pi)$ và O là tâm của phép quay $Q(O, \varphi)$ biến đoạn thẳng $M_1(t_1)M_1(t_2)$ thành đoàn thẳng $M_2(t_1)M_2(t_2)$, trong đó t_1, t_2 là hai thời điểm nào đó $(t_2 > t_1)$. Thế thì phép quay $Q(O, \varphi)$ sẽ biến $M_1(t)$ thành $M_2(t)$ ở mọi thời điểm t.

3.23 Giả sử $(O_1, R) \cap (O_2, R) = (P, Q)$ và gọi $(\overrightarrow{PO_1}, \overrightarrow{PO_2}) = \theta \pmod{2\pi}$. Giả sử một cát tuyến Δ bất kỳ đi qua Q cắt lại (O_2) ở $M_i, i = 1, 2$; hãy chứng minh $\triangle PM_1M_2 \backsim \triangle PO_1O_2$.

3.24 Gọi O là tâm của hình vuông $A_1A_2A_3A_4$ giả sử đã được định hướng dươnng. Xét phép quay $Q(O, \pi/2)$ biến hình vuông thành chính nó, $A_i \mapsto A_{i+1}$ (với quy ước $A_5 = A_1$). Để thuận tiện, ta ký hiệu lại x, y, z, t theo thứ tự đổi thành x_1, x_2, x_3, x_4 (x_5 xem là x_1). Thế thì $Q(O, \pi/2)$: $A_i \mapsto A_{i+1}; A_ix_i \mapsto A_{i+1}x_{i+1}$. Auy ra phép quay $Q(O, -\pi/2) : A_jP \mapsto A_{j-1}x_{j-1}$ với quy ước x_o là x_4.
Trả lời. Điểm đồng quy của A_ix_i là điểm Q được xác định bởi $OQ = OP$ và $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = -\pi/2, \pmod{\pi}$ được suy ra từ P bởi phép quay $Q(O, -\pi/2)$.

3.25 Xét phép quay $Q(C, +60^o) : B \mapsto M'$, $N \mapsto A$ và do đó $D \mapsto E$. Đây là điều phải chứng minh.

3.26 Sử dụng tích của hai phép quay (định lý về tích của hai phép quay đã được chứng minh trong bài tập 2.8). Giả sử tam giác ABC có hướng dương. Ta ký hiệu $Q_1 = Q(B, -2\pi/3), Q_2 = Q(C, -2\pi/3)$ rồi xét tích $f = Q_2 \circ Q_1$; chứng tỏ rằng $f = Q(A_o, -\pi/3)$ từ đó suy ra tam giác $A_oB_oC_o$ là đều.

3.27 Hãy sử dụng phép quay góc 60^o theo ý tưởng nêu trong lời giải của Thí dụ 10; § 3, 3.5. (ứng dụng phép quay). Chẳng hạn, ta thực hiện phép quay $Q(B, 60^o) \circ Q(B, 60^o) : C \mapsto A, M \mapsto N$ và, do đó , $\triangle BCA \mapsto \triangle BMN$ là đều. Xét $\triangle NAM$ có $MN = MB$ và $NA = MC$ và do đó, NAM chính là tam giác $\mathcal{T}(MA, MB, MC)$ có các cạnh bằng MA, MB, MC : $\mathcal{T}(MA, MB, MC) = \triangle NAM$. Nếu $\mathcal{T}$ là vuông, chẳng hạn có cạnh huyền là MA, thế thì góc $\angle MNA$ là vuông. Hãy thiết lập hệ thức (đồng nhất thức) sau đây

$$(NB, NA) = (MB, MC) = (NM, NA) + (AB, AC), \ \forall M \in \mathcal{P}$$

Từ đó suy ra $(NM, NA) = 90^o$ hay là $(MC, MB) = 30^o, \pmod{180^o}$

Trả lời. $\{M\}$ trong mặt phẳng sao cho tam giác $\mathcal{T}$ có ba cạnh bằng MA, MB và MC là tam giác vuông gồm ba đường tròn bằng nhau có bán kính bằng cạnh của tam giác đều ABC và đôi một tiếp xúc nhau ở các đỉnh của ABC. Tâm của ba đường tròn quỹ tích này là các điểm A_o, B_o và C_o là các điểm A_o, B_o và C_o là các đỉnh của ba tam giác đều đối xứng với tam giác ABC qua các cạnh của nó.

§ 4

4.1 Suy ra định lý 21 về sự xác định một phép $\mathcal{Z}$ phẳng (xem chú thích ở cuối chứng minh định lý 22, § 4.4a). Cách chứng minh tương tự cách giải bài tập 2.1

4.2 Theo giải thiết $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$ nên tồn tại một phép $\mathcal{Z}$ thuận, để $\triangle ABC \mapsto \triangle A'B'C'$. Nhưng vì các cạnh tương ứng của hai tam giác này lại song song với nhau, tức là góc đồng dạng bằng 0, nên $\mathcal{Z}$ không thể là một phép vị tự - quay mà chỉ có thể là một phép vị tự, ($\mathcal{Z}$ cũng không thể là một phép tịnh tiến vì $k = \overline{B'C'}/\overline{BC} \neq 1$) và bất cứ đường thẳng nào đi qua hai điểm tương ứng đều đi qua tâm vị tự.
Chú thích. Cũng có thể chứng minh trực tiếp bằng cách sử dụng định lý Ta lét.

4.3 Thực chất đây là một bài toán dựng hình. Giả sử có điểm $M \in [AD], N \in [BC]$ sao cho $MN \parallel AB \parallel CD$ và $[DCNM] \backsim [MNBA]$. Gọi $O = (AD) \cap (BC)$, hãy chứng tỏ rằng $\overline{OM}^2 = \overline{OA}.\overline{OD}$ và $\overline{MN}^2 = \overline{AB}.\overline{DC}$. Suy ra $\overline{OD}/\overline{OM} = \overline{OM}/\overline{OA} = \sqrt{\frac{OD}{OA}}$ và do đó, phép vị tự dương $V(O, \frac{1}{k})$ biến $D \mapsto M, M \mapsto A, C \mapsto N, N \mapsto B$ tức là $V(O, \sqrt{\frac{OD}{OA}})$ biến hình thang $DCNM$ thành hình thang $MNBA$.

4.4 Suy ra từ việc tam giác PA_1B_2 đồng dạng nghịch với tam giác PB_1A_2 và cặp tam giác đồng dạng nghịch này có cặp đường trung tuyến tương ứng là A_oB_2 và B_oA_2 cùng với cặp đỉnh tương ứng A_1, B_1.

4.5 Trước hết, hãy thiết lập dấu hiệu (điều kiện đủ) nhận biết hai hình chữ nhật là đồng dạng (suy từ dấu hiệu nhận biết hai tam giác vuông đồng dạng). Đó là tỷ số hai kích thước của hai hình chữ nhật, bằng nhau. Giả sử hình chữ nhật $MNPQ$ ngoại tiếp tứ giác (lồi) $ABCD$ có $AC \perp BD$; hãy chứng tỏ rằng $MN/MQ = BD/AC$ (nếu $A \in MN, B \in NP, C \in PQ$ và $D \in QM$).

4.6 Sử dụng góc định hướng của hai đường thẳng $\pmod \pi$ chứng minh các hệ thức $(A'B', A'C') = (HB', HC') = -(AB, AC)$ và hai hệ thức tương tự suy ra tam giác $A'B'C'$ đồng dạng nghịch với tam giác ABC.

4.7 *Trả lời.* Có tất cả sáu phép đồng dạng (thuận và nghịch) như vậy gồm ba phép $\mathcal{Z}$ thuận và ba phép $\mathcal{Z}$ nghịch biến tam giác đều thứ nhất thành tam giác đều thứ hai. Hãy chỉ ra đủ sáu cặp tam giác đồng dạng (gọi tên) cả thuận và nghịch (liên hệ với bài 2.3).

4.8 Mệnh đề đòi hỏi chứng minh đã là một phần nội dung của chứng minh Định lý 22 về điểm bất động và dạng chính tắc của một phép đồng dạng thuận.

4.9 Hãy chứng minh rằng nếu O là tâm của phép đồng dạng thuận (vị tự quay) $\mathcal{Z}_1(O,\varphi,k)$ biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{A'B'}$ thì $\triangle OAA' \backsim \triangle OBB'$ và cũng vậy $\triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$. Từ đó suy ra O cũng là tâm của một phép $\mathcal{Z}_2$ thuận khác biến $\overrightarrow{AA'}$ thành $\overrightarrow{BB'}$.

4.10 *Lời giải 1.* Sử dụng các kết quả nêu ra trong các bài tạo 4.8 và 4.9 ở trên. Điểm đồng quy O của bốn đường tròn $(AA'C'),(BB'C'),(ABC)$ và $(A'B'C)$ chính là tâm chung của hai phép đồng dạng $\mathcal{Z}_1$ biến $(O_1)=(ABC)$ thành $(O_2)=(A'B'C)$; và $\mathcal{Z}_2:(O_3)=(AA'C)\mapsto(O_4)=(BB'C)$.
Lời giải 2. Sử dụng định lý về đường thẳng Simson

4.11 Đặt $(\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PO'})=\varphi \pmod{2\pi}$, $k=R'/R$. Xét phép vị tự quay $\mathcal{Z}(P,\varphi,k)$ biến (O,R) thành (O',R'), trong đó $O\mapsto O'$. Giả sử $\mathcal{Z}: M\in(O)\mapsto M'\in(O')$. Hãy chứng tỏ rằng $\mathcal{Z}:(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OM})\mapsto(\overrightarrow{O'P},\overrightarrow{O'M'})$. Từ đó suy ra $(M,M')\ni Q$

4.12 1) Ký hiệu $(O_1)=(APEF),(O_2)=(PBCD)$ và $(O_1)\cap(O_2)=\{P,Q\}$. Sử dụng kết quả bài tập 4.11 ở trên hãy chứng tỏ rằng phép vị tự - quay tâm P đã biến (O_2) thành (O_1) thì cũng biến hình vuông $PBCD$ thành hình vuông $PEFA$, trong đó $B\mapsto E, C\mapsto F, D\mapsto A$.

2) Điểm cố định S là tâm hình vuông dựng trên $[AB]$ nhưng nằm khác phía với hai hình vuông được xét đối với (AB). Còn $\{Q\}$ là nửa đường tròn đường kính $[AB]$ nằm khác phía với S đối với (AB).

4.13 Chứng tỏ rằng có một phép vị tự đối xứng tâm O biến $A\mapsto A', B\mapsto B', C\mapsto C', D\mapsto D'$.

4.14 1) Dễ thấy $f: M\mapsto M'$ từ $\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ là một song ánh từ $\mathcal{P}$ vào chính nó.
2) f là một phép đồng dạng nghịch $\mathcal{Z}$ của mặt phẳng; $\mathcal{Z}=\mathcal{Z}(C,\Delta,k)$ tâm $C=a\cap b$, trục Δ là phân giác Cp của góc tạo bởi a và b, $k=\cos\gamma$, trong đó γ là góc nhọn tạo bởi a và b; f chính là một phép vị tự đối xứng.

§ 5

A

5.1 Để ý rằng $A_1=\mathcal{D}(P)=V(A_o)$, trong đó $V=V(P,2)$, vv...

5.2 Gọi G là trọng tâm của tứ điểm $\{A_1A_2A_3A_4\}$ chứng tỏ rằng B_i được suy ra từ A_i, $(i=1,2,3,4)$ trong phép vị tự $V(G,-1/3)$. Tâm O_1 của đường tròn $(B_1B_2B_3B_4)$ được xác định bởi $\overrightarrow{GO_1}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{GO}, R_1=\frac{1}{3}R$.

5.3 Đặt $AD = BC = d$ (không đổi) suy ra $\{C\} = (B, d)$ và do đó, $\{O\}$ được suy ra từ $\{C\}$ nhờ hệ thức $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$, hay $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

5.4 Đặt $\overline{AB} = a, \overline{AC} = b$; suy ra $\overline{BP} : \overline{BN} = k = \frac{a}{a+b}$ và tìm được $\{P\}$.

5.5 Gọi I và O lần lượt là tâm các đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng tỏ rằng ABC và $A_oB_oC_o$ là hai tam giác vị tự và D_o là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_oB_oC_o$.

5.6 Gọi K là tiếp điểm của (J) và đường tròn (ABC), H là trung điểm BC và I là trung điểm MN. Xét phép vị tự $V(A, k = AB/AH) : \triangle ABC \mapsto \triangle ADE$ trong đó $H \mapsto K$ là trung điểm của đoạn DE. Hãy chứng minh rằng $AI/AJ = AH/AK$ và để ý rằng (J) là đường tròn nội tiếp tam giác ADE. Từ đó suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

5.7 Hãy chia miếng phẳng đồng chất có dạng một nửa tứ giác lồi (hai chiều) $[A_1A_2A_3A_4]$ thành hai miền tam giác bằng một đường chéo nào đó, A_1A_3 hoặc A_2A_4. Sau đó dựa vào trọng tâm của hai tam giác thành phần (mà ta đã biết cách tìm) thì xác định được trọng tâm của toàn hình $T = [B_1B_3] \cap [B_2B_4]$ được suy ra từ $P = [A_1A_3] \cap [A_2A_4]$ bởi phép vị tự $V(O, -\frac{1}{3})$.

5.8 Cần xét hai trường hợp: $R_1 \neq R_2$ và $R_1 = R_2$. Nếu $R_1 \neq R_2$ gọi I là tâm vị tự ngoài của $(O_i, R_i), i = 1, 2$ và $\mathcal{D} = \mathcal{D}(C)$. Xét phép vị tự $V(I, k)$, với $k = R_2/R_1$ chứng minh $[CA] \mapsto DB]$; từ đó suy ra $(AB)^{\ni} I$ và do đó, $\angle CHI = 90^o$.
Trả lời. Nếu $R_1 \neq R_2$ thì $\{H\}$ là cung tròn H_1CH_2 của đường tròn đường kính $[IC]$ có hai đầu mút $H_i, (i = 1, 2)$ nằm trên hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2). Nếu $R_1 = R_2 = R$ thì $\{H\}$ là đoạn thẳng $[H_1H_2]$ của đường trung trực $t[O_1O_2]$ của đoạn nối tâm hai đường tròn và H_i nằm trên các tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O_i, R).

5.9 Tạm thời không đòi hỏi điều kiện đường tròn phải đi qua điểm A thì rõ ràng đường tròn (w) cần dựng vị tự với một đường tròn (I) bất kỳ tiếp xúc với hai cạnh của góc xOy đã cho. Suy ra điểm A là hình vị tự của một trong hai giao điểm M_1 và M_2 của đường thẳng OA với đường tròn (I) đó.
Trả lời. Bài toán có hai nghiệm hình nhận từ từ I bởi phép vị tự $V(O, k_i = \overline{OA}/\overline{OM})$; $i = 1, 2$

5.10 Theo giả thiết, nếu dây cung AD của đường tròn lớn (v_1) đã dựng được thì ta có $AB = BC = CD = \frac{1}{3}AD$, hay $AB = \frac{1}{2}AC$. Phép vị tự $V(A, \frac{1}{2})$ biến $C \to B$. Suy ra B là một giao điểm của (v_2) và (v_2) nhận được từ (v_2) bởi phép vị tự nói trên, với tâm là một điểm tuỳ ý A. Bài toán có thể có hai, một, hoặc không lời giải với mỗi điểm A được chọn trên v_1 tuỳ theo $R_2 < R_1 \leqslant 3R_2$, trong đó R_i là bán kính của $(v_i), i = 1, 2$.

5.11 Gọi A_o, là trung điểm của BC và $A' = \mathcal{D}_O(A)$. Hãy chứng tỏ rằng $A' = \mathcal{D}_{A_o}(H)$ và do đó, $A_o = V(A'), V = V(H, \frac{1}{2})$.

5.12 Gọi C là trung điểm của cung bù với cung $\overset{\frown}{A\gamma B}$ của hình viên phân đã cho; D_i, E_i lần lượt là tiếp điểm của $(v_2), (i = 1, 2)$ với dây AB và với cung $A\gamma B$. Hãy sử dụng tính chất của phép vị tự, chứng minh (D_iE_i) đi qua C, rồi chứng minh C nằm trên trục đẳng phương của (v_1) và (v_2).
Trả lời. Bài toán có vô số nghiệm. Quỹ tích tiếp điểm của (v_1) và (v_2) là cung tròn AB của đường tròn (I') tâm C, bán kính $p = CA = CB$ nằm trong hình viên phân đã cho.

B

5.13 Xét phép vị tự quay $\mathcal{Z}(D, 90^o, k)$, trong đó $k = AC/CB$, biến BD thành CD, C thành A và do đó, biến CN thành AM.

5.14 1) Gọi (w) và (w') là các đường tròn ngoại tiếp hai hình vuông đã cho và P là giao điểm thứ hai của hai đường tròn đó. Thế thì a) $AA' \cap BB' \cap CC' = P$.
b) CC' nhận được từ AA' bởi phép quay $Q(O, 90^o)$.
2) Phép đồng dạng $\mathcal{Z}(O, 45^o, k)$ trong đó $k = \sqrt{2}$ biến AA' thành BB'.

5.15 Tam giác $A'B'C'$ được suy ra từ tam giác ABC bởi phép quay góc $\varphi = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'})$ xung quanh tâm O. Gọi A_1 và A_1' là các hình chiếu của O lần lượt trên BC và $B'C'$, hãy chứng tỏ rằng $A_o = BC \cap B'C'$ nhận được từ A_1 bởi phép vị tự - quay $\mathcal{Z}(O, \frac{\varphi}{2}, \frac{1}{\cos(\varphi/2)})$. Suy ra, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

5.16 Gọi E, F, G, H là các hình chiếu của tâm O lần lượt trên các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong (O); cũng vậy, E', F', G', H' là các hình chiếu của O trên các cạnh tương ứng của $A'B'C'D'$. Hãy chứng tỏ rằng $MNPQ$ nhận được từ hình bình hành $EFGH$ bởi phép vị tự - quay tâm O, góc $\varphi/2$, tỷ số $k = 1/\cos(\varphi/2)$.

5.17 Sử dụng tích của hai phép đồng dạng thuận. Xét tích $\mathcal{Z}_2 \circ \mathcal{Z}_1$, trong đó $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}(B, 45^o, k_1)$ và $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}(C, 45^o, k_2)$ trong đó $k_1 = BC/BM = AC/AN = 1/k$ (vì tam giác CAN đồng dạng nghịch với tam giác CBM). Hãy chứng tỏ rằng $\mathcal{Z}_2 \circ \mathcal{Z}_1$ là một phép dời hình có một điểm bất động P duy nhất và góc dời hình $\varphi = 90^o$. Từ đó suy ra PM vuông góc và bằng PN.

5.18 Giả sử hình vuông $ABCD$ có hướng thuận. Thế thì, $\mathcal{Z}(D, \frac{\pi}{4}, \sqrt{2}) : A \mapsto B; Q(D, \frac{\pi}{2}); A \mapsto C$ và $V(D, \frac{1}{2}) : B \mapsto O$.
Trả lời. 1) Gọi H là hình chiếu của D trên a rồi dựng hình vuông $DHH'K$ có hướng thuận. Thế thì ta được $\{B\}$ là đường thẳng b vuông góc với DH' ở H'; $\{C\} = c, c \perp DK = K; \{O\} = (HK)$.

2) Dựng hình vuông DSS_1S_2 có hướng thuận (cùng hướng với $ABCD$); gọi w là trung điểm của DS_1. Chứng tỏ rằng quỹ tích của B là đường tròn $(S_1R\sqrt{2})$, quỹ tích của C là đường tròn $(S_2, R\sqrt{2})$ và quỹ tích của O là đường tròn $(w, R\frac{\sqrt{2}}{2})$.

5.19 Gọi tên các điểm M và N sao cho tam giác APN ngược hướng với tam giác APM được giả sử là có hướng thuận, nghĩa là

$$(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AN}) = -(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{4} \text{ và } AM = AN = AP\sqrt{2}$$

Trả lời. Dựng tam giácc AB_1B_2 vuông cân ở A, nhận AB là đường cao hạ xuống cạnh huyền B_1B_2 và cùng hướng nghịch với tam giác AMN vuông cân ở A. Chứng tỏ rằng $\{M\}$ là nửa đường tròn (ABB_1) đường kính AB_1 và $\{N\}$ là nửa đường tròn $(AB_1'B_2)$ đường kính AB_2 (có tâm w_2 là trung điểm của nửa đường tròn đã cho), trong đó B_1' đối xứng với B_1 qua trung điểm O của $[AB]$, đồng thời $B_1' = \mathcal{D}_{w_2}(B)$ và cũng là đỉnh thứ tư của hình vuông ABB_2B_1'.

5.20 1) Chứng minh $(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1M_1}) = (\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2M_2})$, $\forall t$, từ đó suy ra $(M_1M_2) \ni B$ và tam giác AM_1M_2 đồng dạng với tam giác AO_1O_2. b) Trung trực $t[M_1M_2] \ni P$ là trung điểm của đoạn thẳng B_1B_2, trong đó $B_i = \mathcal{D}_O(B), (i = 1, 2)$

2) a) $\{M\}$ là đường tròn (O) đường kính BP có tâm là trung điểm O của O_1O_2; cần lưu ý thêm rằng $\{M\}$ cũng đi qua B vì có $(MA, MB) = \gamma$ (không đổi) do tam giác AM_1M cũng luôn đồng dạng với chính nó. b) Quỹ tích của C là đường tròn ngoại tiếp tam giác AO_1O_2. c) G được xác định bởi $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}; H$ được xác định bởi $\overrightarrow{CH} = 3\overrightarrow{CG}$.

Trả lời. $\{G\}$ là đường tròn $(G_o, p_1 = G_oA)$, trong đó G_o là trọng tâm của tam giác AO_1O_2; $\{H\}$ là đường tròn $(H_o, p_2 = H_oA)$, trong đó H_o là trực tâm của tam giác AO_1O_2.

5.21 *Phân tích.* Giả sử rằng tam giác MNP đã dựng được, nghĩa là $M \in BC, N \in CA$ sao cho $(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}) = \gamma, \frac{PN}{PM} = k$, trong đó $\gamma = (\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{ZY})$ và $k = ZY/ZX$. Suy ra, $N = (CA) \cap a'$, trong đó a' nhận được từ $a = (BC)$ bởi phép vị tự - quay $\mathcal{Z}(P, \gamma, k)$.

Biện luận. Bài toán nói chung có một nghiệm hình duy nhất, trừ trường hợp $a' \parallel CA$ hoặc $a' = (CA)$ thì số nghiệm bằng 0 hoặc ∞.

5.22 Nếu hình bình hành $M'N'P'Q'$ nội tiếp hình bình hành $ABCD$ thì các tâm O' và O của chúng trùng nhau (Bài tập 3.8). Như vậy bài toán được quy về bài toán 5.21 ở trên. Đó là bài toán: Dựng tam giác $OM'N'$ nội tiếp tam giác ABC có đỉnh O là trung điểm cạnh CA và đồng dạng với tam giác wMN cho trước, trong đó MN là một cạnh và w là tâm của bình hành $MNPQ$ cho trước.

5.23 Trước hết, để ý rằng nếu $\angle A + \angle C = \theta = \pi$ thì nội dung bài toán chính là thí dụ 11 trong 5.2. § 5. Như vậy, bài toán này là một dạng khái quát hoá thí dụ đó. Tuy nhiên, lời giải của bài toán lại hoàn toàn tương tự với lời giải trong thí dụ đó. Trong bài vẫn quy về dựng $\triangle DCE \backsim \triangle DAB$, chỉ khác là $E \notin (BC)$ vì

$$\angle BCE = \angle BCD + \angle DCE = \angle C + \angle A = \theta \neq \pi$$

.

5.24 Hãy chứng tỏ rằng bốn đường tròn $v_1(AYZ), v_2(BZX), v_3(CXY)$ và v_4 (XYZ) có cùng bán kính. Sau đó, sử dụng phép chiếu vuông góc, chiếu YZ lên BC, chứng minh $\frac{YZ}{BC} \geq \frac{1}{2}$.
Kết luận.$\min S_1(\triangle XYZ) = \frac{1}{4}S(ABC)$ đạt khi và chỉ khi $\frac{YX}{BC} = k = \frac{1}{2}$ tương đương với $\triangle XYZ = \triangle A_oB_oC_o$.
Trả lời. Tam giác cần tìm là tam giác trung bình $A_oB_oC_o$ của tam giác ABC.

5.25 1) Chứng minh các tam giác A_oB_1P và B_oA_1P là những nửa của hai tam giác đều, vuông ở P, có $\angle A_o = \angle B_o = 60^o$ và $\angle B_1 = \angle A_1 = 30^o$ (sử dụng định lý về tích hai phép quay, bài 2.8).
2) Từ việc tam giác A_oB_1P đồng dạng nghịch với tam giác B_oA_1P suy ra các đoạn $[A_oA_1], [B_o, P_1]$ được nhìn từ P dưới những góc bằng nhau.

5.26 Chứng minh P là trực tâm của tam giác AMN và do đó, Q là điểm xuyên tâm - đối với điểm A trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác AMN.
Trả lời. Quỹ tích của Q là đường thẳng q, nhận được từ đường thẳng $a = (BC)$ bởi phép vị tự- đối xứng $\mathcal{Z}(A, \Delta = Ap, k)$, trong đó Ap là phân giác góc $\angle BAC$ và $k = \frac{1}{|\cos A|} = \pm\frac{1}{\cos A}$ tuỳ theo $\angle BAC$ lớn hơn hay nhỏ hơn 90^o.
Chú thích. Bài toán này chính là dạng đảo của Thí dụ 13 (VMO, 3/2002).

5.27

Hình 52

Lời giải. Giả sử rằng tam giác ABC đã dựng được, thoả mãn các đòi hỏi của bài toán. Thế thì điểm C được suy ra tư điểm B bởi phép đồng dạng nghịch (vị tự - đối xứng) $\mathcal{Z}(A, p, k = \frac{n}{m})$ tâm A, trục p và tỷ số $k = n/m$. Do đó điểm C cần tìm là một điểm chung của hai đường tròn, đó là đường tròn (v_2) và đường tròn (v_1') nhận được từ đường tròn (v_1) bởi phép đồng dạng nghịch $\mathcal{Z}(A, p, n/m)$ nói trên (*Hình 52*). Bài toán có thể có hai, một hoặc vô nghiệm tuỳ theo (v_1') cắt, tiếp xúc hoặc không cắt (v_2).

Chú thích. Dễ thấy rằng bài toán sẽ vô nghiệm khi và chỉ khi đường tròn (v_2) nằm ngoài góc $\angle t_1' A t_2'$ ảnh của góc $t_1 A t_2$ trong phép đối xứng trục$\mathcal{D}(Ap)$ trong đó At_i là hai tiếp tuyến kẻ từ A đến (v_1). Đây là một thí dụ ứng dụng phép đồng dạng nghịch (vị tự - đối xứng) vào giải toán dựng hình, xem là một thí dụ bổ sung vào 5.3, § 5 (Thí dụ 1.4).

Chương 4

Bài tập bổ sung và Ôn tập tự giải

§ 1 Bổ túc về góc định hướng trong mặt phẳng

1.1 a) Giả sử M là một điểm nằm trong mặt phẳng của một góc xOy đã cho. Gọi X và Y lần lượt là điểm đối xứng của M qua các cạnh Ox và Oy. Chứng tỏ rằng độ lớn của góc $\angle xOy$ không phụ thuộc và vị trí của điểm M $(M \neq O)$.

b) Cho M là một điểm bất kỳ nằm trong mặt phẳng của một tam giác ABC đã cho. Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng minh rằng các đường phân giác Ax, By và Cz của các góc $\angle B'AC', \angle C'BA'$ và $\angle A'C'B$ đồng quy hoặc song song. Tìm quỹ tích những điểm M trong mặt phẳng để Ax, By và Cz song song với nhau.

1.2 a) Chứng minh rằng góc của các đường thẳng chứa hai dây cung $\overset{\frown}{AB}$ và CD của một đường tròn (O) được cho bởi công thức

$$(AB, CD) = \frac{1}{2}\{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})\} + k\pi$$

b) Gọi α là số đo đại số của cung AC nằm trong góc $\angle ADC$ và β là số đo đại số của cung $\overset{\frown}{BD}$ nằm trong góc $\angle BAD$, chứng minh rằng

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + 2k\pi$$

.

1.3 Giả sử hai đường tròn (ABC) và (ABD) trực giao với nhau. Chứng tỏ rằng hai đường tròn (ACD) và (BCD) cũng vậy.

1.4 Gọi B' là điểm đối xứng của B qua cạnh CA và C' là điểm đối xứng của C qua cạnh AB của một tam giác ABC. Tính $B'C'$ theo $\angle A = \alpha$ và $OA = b$, $AB = c$

1.5 Gọi A', B' và C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của các đỉnh A, B và C của một tam giác ABC qua các cạnh BC, CA và AB. Tìm điều kiện cần và đủ về dạng của tam giác ABC để $A'B'C'$ là một tam giác đều (Đề thi HSG toàn quốc, VMO 3/1994)

1.6 Giả sử D, E, F là ba điểm bất kỳ được lấy lần lượt trên các đường thẳng chứa các cạnh BC, CA và AB của một tam giác ABC.

a) Chứng tỏ rằng ba đường tròn (AEF), (BFD) và (CDE) đồng quy ở một điểm M, gọi là điểm Mi-ken (Bổ đề Miquel).

b) Tính góc (DE, DF) theo các góc (AB, AC) và (MB, MC);

c) Tìm quỹ tích của điểm M khi D, E và F thay đổi nhưng luôn thẳng hàng

1.7 Cho một tam giác ABC. Dựng ba đường thẳng Ax, By và Cy sao cho

$$(AB, Ax) = (CB, Cz) \text{ và } (AC, Ax) = (BC, By)$$

Chứng minh rằng Ax, By và Cz đồng quy ở một điểm D trên đường tròn (ABC).

1.8 Chứng minh định lý: Các đường tròn ngoại tiếp bốn tam giác tạo bởi các cạnh của một tứ giác (tứ cạnh) toàn phần đồng quy ở một điểm w mà các hình chiếu của nó trên các cạnh là bốn điểm thẳng hàng.

1.9 Chứng tỏ rằng các hình chiếu của một điểm w nằm trên một đường tròn trên sáu cạnh của một tứ điểm nội tiếp đường tròn đó là các đỉnh của một tứ giác (tứ cạnh) toàn phần.

1.10 Định lý Miquel về sáu đường tròn: Bốn đường tròn v_1, v_2, v_3 và v_4 sắp đặt trong mặt phẳng sao cho $v_1 \cap v_2 = \{A, A'\}, v_2 \cap v_3 = \{B, B'\}, v_3 \cap v_4 = \{C, C'\}$ và $v_4 \cap v_1 = \{D, D'\}$. Thế thì các điểm A', B', C', D' đồng viên (hoặc thẳng hàng) khi và chỉ khi các điểm A, B, C, D đồng viên (hoặc thẳng hàng).

1.11 Cho một đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định trên đường tròn đó sao cho không là hai điểm xuyên tâm - đối, một đường kính XY thay đổi của (O). Tìm quỹ tích giao điểm P của (AX) và (BY). (Đề thi Olympic Toán của Mỹ, USOMO, 1976).

1.12 Trong mặt phẳng cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Xác định một điểm P không thuộc đường tròn (O) để các đường thẳng PA, PB, PC cắt lại (O) lần lượt ở A', B', C' sao cho tam giác $A'B'C'$ vuông cân đáy $B'C'$ (Đề thi HSG toàn quốc, VMO 3/1999, bảng B).

§ 2 Đại cương về các phép biến hình và các phép dời hình phẳng

2.1 Trong mặt phẳng cho ba điểmt A, B, P phân biệt, thẳng hàng và một đường thẳng Δ vuông góc với (AB) ở D. Một điểm C chuyển động trên Δ. Gọi A' và B' là hình chiếu của A và B lần lượt trên BC và CA, AA' cắt BB' ở điểm H trên Δ.

a) Hỏi ánh xạ $f : C \mapsto H$ từ $\Delta \to \Delta$ có phải là một phép biến hình của Δ không?

b) Gọi M là hình chiếu của C trên đường thẳng (PH). Hỏi ánh xạ $h : H \mapsto M$ từ đường thẳng Δ lên $(\gamma) = \{M\}$ có phải là một song ánh không [biến Δ thành $\gamma = h(\Delta)$]?

2.2 Trong mặt phẳng cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp một đường tròn (O). Một điểm P chuyển động trên đường tròn (O). Các đường thẳng DP và CP cắt đường thẳng Δ đi qua A và B theo thứ tự ở M và N.

a) Chứng minh rằng nếu bổ sung vào đường thẳng Δ một điểm mới mà theo trực giác gọi là điểm vô tận hay điểm xa vô tận của Δ thì ánh xạ $f : M \mapsto N$ từ Δ vào chính nó là một phép biến hình của đường thẳng Δ.

b) Chứng minh rằng khi điểm P chuyển động trên đường tròn (O) thì tỷ số kép (AB/MN) có một giá trị không đổi k xác định.

c) Từ tính chất nói trên , chứng minh rằng khi P chuyển động trên (O) thì đại lượng $\overline{AM}.\overline{NB}/\overline{MN} = p$ (không đổi).

2.3 Trong mặt phẳng $\mathcal{P}$ cho một tam giác đều ABC. Gọi A', B' và C' theo thứ tự là các hình chiếu trên các đường thẳng BC, CA và AB của một điểm M bất kỳ trên mặt phẳng và G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng ánh xạ $f : M \mapsto G$ từ $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ là một phép biến hình của mặt phẳng.
Hướng dẫn. Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC, hãy chứng minh G là trung điểm của OM).

§ 3 Sự xác định và dạng chính tắc của một phép dời hình phẳng

3.1 Trong mặt phẳng định hướng$\mathcal{P}$ cho hai đoạn thẳng bằng nhau AB và $A'B'$. Với mỗi điểm M bất kỳ của $\mathcal{P}$, hãy chỉ rõ những hệ thức về độ dài và về góc (góc định hướng) liên hệ giữa các cặp điểm $A'A; B, B'$ và M, M' để

M'là ảnh của M trong phép dời hình thuận hoặc trong phép dời hình nghịch (phản dời hình) biến A thành A', B thành B' (và cố nhiên là M thành M').

3.2 Chứng minh định lý sau đây (nêu lên tính chất đặc trưng của phép dời hình thuận trong mặt phẳng).

Định lý. Phép dời hình phẳng biến một véctơ $\overrightarrow{AB}$ thành một véctơ $\overrightarrow{A'B'}$ có cùng độ dài và trong mọi phép dời hình thuận, một véctơ đã cho bất kỳ tạo với véctơ ảnh của nó một góc không đổi $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi$ không đổi, gọi là góc dời hình. Từ đó suy ra rằng phép dời hình (thuận) là một phép quay hoặc một phép tịnh tiến tuỳ theo góc dời hình của nó khác không hay bằng không. Và đối với phép quay xung quanh một điểm thì góc dời hình chính là góc quay.

3.3 Chứng minh các mệnh đề sau

a) Một phép đẳng cự trong mặt phẳng nếu đã có hai điểm bất động phân biệt P và Q thì mọi điểm khác trên đường thẳng (PQ) cũng đều là điểm bất động và phép đẳng cự đó là phép đối xứng trục và trục đối xứng là đường thẳng (PQ).

b) Một phép đẳng cự trong mặt phẳng có một điểm bất động O duy nhất là một phép quay xung quanh tâm O một góc φ (sai khác $2k\pi$) nào đó.

3.4 Hãy sử dụng kết quả nêu trong bài tập 2.7 (thuộc mục 2.5 của § 2) về tích của ba phép đối xứng - trục có các trục cùng thuộc một chùm đường thẳng để bổ sung một lời giải nữa của bài tập 1.4* 1) và 3) thuộc mục 1.4. của § 1, trong đó không hạn chế điểm M phải thuộc miền $[\triangle ABC]$, mà M là một điểm bất kỳ của mặt phẳng của tam giác ABC.

3.5 Trong mặt phẳng cho ba đường thẳng phân biệt Δ_1, Δ_2 và Δ_3. Ký hiệu $\mathcal{D}_k$ là phép đối xứng - trục $\mathcal{D}(\Delta_k), k = 1, 2, 3$. Xét phép biến hình $g = f^2$, trong đó $f = \mathcal{D}_3 \circ \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{D}_1$. Tìm điều kiện cần và đủ về ba đường thẳng Δ_k nói trên để $g \not\!\!Id$.

3.6 Ký hiệu f_1, f_2 và f_3 lần lượt là các phép đối xứng trục $\mathcal{D}(AD), \mathcal{D}(BE)$ và $\mathcal{D}(CF)$ theo thứ tự qua các đường phân giác AD, BE và CF của một tam giác ABC. Xét tích của phép biến hình $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1, g = f_2 \circ f_3 \circ f_2$, và $h = f_1 \circ f_3 \circ f_2$. Chứng minh rằng

a) f, g và h đều là những phép đối xứng trục, hãy xác định các trục đối xứng.

b) $f = \mathcal{D}(IB'), g = \mathcal{D}(IA')$ và $h = \mathcal{D}(IC')$, trong đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC; A', B' và C' lần lượt là các tiếp điểm của (I) trên các cạnh BC, CA và AB.

§ 4 Vận dụng phép dời hình vào việc giải một số bài toán hình học phẳng

4.1 Chứng minh rằng trong số những hình bình hành thì duy nhất chỉ có hình thoi ngoại tiếp được một đường tròn.

4.2 Trên đoạn vuông góc chung AB của hai đường thẳng song song a và b (A trên a và B trên b) ta lấy hai điểm M và N sao cho $AM = NB$. Trên a lấy điểm P và trên b lấy điểm Q sao cho đoạn PQ được nhìn từ M dưới một góc vuông. Chứng minh rằng PQ cũng được nhìn từ N dưới một góc vuông.

4.3 Hãy chỉ ra cách khôi phục một hình ngũ giác $ABCDE$ đã bị xoá đi nhưng chỉ còn để lại các trung điểm O_1, O_2, O_3, O_4, và O_5 của các cạnh liên tiếp AB, BC, CD, DE và EA của nó.

4.4 Trong mặt phẳng cho ba đường thẳng $x'x, y'y$ và $z'z$ đồng quy ở một điểm O và một điểm P nằm ngoài ba đường thẳng đó. Chứng minh rằng có một tam giác duy nhất nhận x, y, z làm ba đường trung trực của các cạnh và điểm P đã cho nằm trên một cạnh nào đó của nó.

4.5 Hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a, CD = b$ $(a < b)$ các cạnh bên $BC = c, DA = d$. Các tia phân giác trong các góc $\angle A$ và $\angle D$ cắt nhau ở M và các tia phân giác trong các góc $\angle B$ và $\angle C$ cắt nhau ở N. Chứng minh $MN \parallel AB \parallel CD$ và tính khoảng cách MN theo a, b, c và d.

4.6 Chứng minh định lý Pappus):
Lấy các cạnh AB và AC của một tam giác ABC làm đáy dưới, dựng ra phía ngoài tam giác đã cho hai hình bình hành tuỳ ý $ABDE$ và $ACFG$. Các đáy trên kéo dài của hai hình bình hành đó cắt nhau ở một điểm P.

a) Chứng minh rằng hình bình hành $BCMN$ dựng ra phía ngoài $DABC$ có các cạnh bên song song, cùng hướng và bằng PA có diện tích bằng tổng diện tích hai hình bình hành vừa dựng.

b) Từ định lý Páp Puýt hãy suy ra định lý Pitago (Pythagore).

4.7 Một điểm M nằm trong tam giác ABC, chuyển động song song với cạnh BC cho đến khi cắt cạnh CA; sau đó lại chuyển động song song với AB cho đến khi cắt cạnh BC, rồi lại chuyển động song song với CA cho đến khi cắt AB, vv... Chứng minh rằng sau một số bước, quỹ đạo chuyển động của điểm M sẽ được khép kín.

4.8 Giả sử M là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng của tam giác ABC, lấy điểm M_1 đối xứng với M qua (BC), M_2 đối xứng với M_1 qua (CA) và M_3 đối xứng với M_2 qua (AB). Sau đó, lại từ điểm M_3 (đóng vai trò như điểm M)

lấy đối xứng liên tiếp qua $(BC), (CA)$ và (AB) thì được các điểm M_4, M_5, và M_6; ký hiệu $M_6 = M'$. Chứng tỏ rằng ánh xạ $f: M \mapsto M'$ là một phép tịnh tiến của mặt phẳng; hãy xác định véctơ tịnh tiến.

4.9 Chứng minh rằng nếu đoạn thẳng MN nối trung điểm cặp cạnh đối diện BC và DA của một tứ giác lồi $ABCD$ bằng trung bình cộng hai cạnh đối diện còn lại AB và CD thì tứ giác đó là một hình thang.

4.10 Hai đỉnh của một tam giác tì trên hai đường thẳng song song cho trước. Tìm quỹ tích của đỉnh thứ ba.

4.11 Qua một điểm chung A của hai đường tròn cắt nhau (O_1, R_1) và (O_2, R_2) đã cho, người ta kẻ một cát tuyến Δ thay đổi cắt (O_i) ở $C_i, i = 1, 2$. Trên Δ người ta lấy về hai phía của A các điểm M và N sao cho $AM = AN = \frac{1}{2}C_1C_2$. Tìm quỹ tích các điểm M và N.

4.12 Dựng một đoạn thẳng có phương p cho trước, có độ dài bằng ℓ cho trước và hai đầu nút tựa trên hai đường tròn cho trước.

4.13 Dựng một tứ giác cho biết độ lớn các góc và độ dài hai đường chéo.

4.14 Hai thành phố A và B bị ngăn cách nhau bởi một con sông, cùng muốn xây một cây cầu chung CD bắc qua sông để thuận tiện cho việc đi lại sao cho đoạn đường bộ $ACDB$ nối hai thành phố là ngắn nhất.

a) Hỏi người ta đã tìm ra vị trí để bắc cây cầu đó như thế nào? (Các bờ sông được giải thiết là là song song và cây cầu bắc qua sông đưược giả thiết là vuông góc với hai bờ sông)

b) Cùng câu hỏi như trên nếu các thành phố A và B bị ngăn cách bởi nhiều (lớn hơn hai) con sông cũng có nhuư cầu phải bắc những cây cầu qua tất cả các con sông đó sao cho đoạn đường bộ nối hai thành phố là ngắn nhất.

4.15 Chứng minh rằng

a. Một tứ giác có tâm đối xứng là một hình bình hành;

b. Một hình giới nội không thể có qúa một tâm đối xứng;

c. Một hình lục giác lồi $ABCDEF$ có các cạnh đối diện song song và bằng nhau thì có tâm đối xứng;

d. Không có hình nào có đúng hai tâm đối xứng.

4.16 Giả sử M là một điểm nằm trong (mặt phẳng của) một tam giác ABC có các hình chiếu trên các cạnh BC, CA và AB tương ứng là P, Q và R. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR cắt lại các cạnh nói trên theo thứ tự ở P', Q', và R'. Chứng minh rằng các điểm P', Q' và R' cũng là hình chiếu trên các cạnh tương ứng của tam giác ABC của một điểm M' nào đó của mặt phẳng đồng thời là các cặp đường thẳng $AM, AM'; BM, BM'$ và

CM, CM' theo thứ tự đối xứng với các đường phân giác của các góc A, B và C của tam giác ABC.

4.17 Trong mặt phẳng cho ba điểm phân biệt $O_1, O_2 O_3$, và M là một điểm bất kỳ của mặt phẳng. Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua O_1, M_2 đối xứng với M_1 qua O_2, M_3 đối xứng với M_2 qua O_3, M_4 đối xứng với M_3 qua O_1, M_5 đối xứng với M_4 qua O_2, M_6 đối xứng với M_5 qua O_3. Chứng minh rằng M_6 trùng với M.

4.18 Cho một góc xOy và một điểm P nằm trong góc đó. Hãy kẻ một cát tuyến qua P cắt Ox ở A và Oy ở B sao cho đoạn AB nhận P làm trung điểm.

4.19 Cho một tứ giác lồi $MNPQ$. Chứng minh rằng hoặc không có, hoặc nếu có thì có vô số tứ giác lồi $ABCD$ ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ đã cho sao cho M, N, P, Q là trung điểm các cạnh liên tiếp AB, BC, CD, DA của $ABCD$. Hãy xác định tập hợp các đỉnh A, B, C và D.
Hướng dẫn. $\{A\}, \{B\}, \{C\}$, và$\{D\}$ đều là những miền đa giác phẳng; hãy xác định cụ thể những miền đó theo $MNPQ$ đã cho trong trường hợp tồn tại $ABCD$ ngoại tiếp.

4.20 Chứng minh rằng nếu một hình phẳng có một tâm đối xứng duy nhất và một trục đối xứng thì tâm đó nhất thiết phải nằm trên trục và do đó, nó còn có trục đối xứng thứ hai vuông góc với trục thứ nhất ở tâm đối xứng.

4.21 Tìm hình dạng của tất cả các tứ giác có đúng một trục đối xứng.

4.22 Dựng tứ giác $ABCD$ cho biết độ dài các cạnh và đường chéo AC là phân giác của góc $\angle A$.

4.23 Dựng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn cho biết độ dài hai cạnh kề nhau $DA = a, AB = b$ và các góc $\angle B = \beta, \angle D = \delta$.

4.24 Dựng tam giác ABC biết cạnh $AB = c$, chiều cao h_c và hiệu các góc A và B là $\angle A - \angle B = \theta$.

4.25 Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) và một đường thẳng Δ. Tìm trên tam giác một điểm P sao cho hai tiếp tuyến với (O_1) và (O_2) kẻ từ P nghiêng đều với Δ.

4.26 Cho một góc nhọn xOy và hai điểm P, Q nằm trong góc đó. Hãy tìm trên Ox một điểm A sao cho góc $\angle PAQ$ định ra trên cạnh Oy một đoạn thẳng BC là đáy của một tam giác ABC cân ở A.

4.27 Dựng một tam giác có chu vi nhỏ nhất nội tiếp một tam giác nhọn ABC cho trước.

4.28 Chứng minh các tính chất sau đây của tâm quay

a) Trong mọi phép quay không phải là phép đối xứng-tâm, tâm quay, hai điểm tương ứng và giao điểm của hai đường thẳng tương ứng phải xuất từ hai điểm đó thì đồng viên (tức là cùng nằm trên một đường tròn).

b) Đường phân giác ngoài của góc giữa hai trục tương ứng trong một phép quay thì đi qua tâm quay.

c) Nếu trong một phép quay nào đó mà A' là ảnh của A, B' là ảnh của B và hai đường thẳng AA', BB' cắt nhau ở một điểm C_o thì giao điểm thứ hai O của hai đường tròn (ABC_o) và $(A'B'C_o)$ là tâm của phép quay đó.

4.29 Lấy các cạnh AB, BC, CD và DA của một tứ giác lồi $ABCD$ làm cạnh, dựng ra phía ngoài tứ giác đó bốn hình vuông có tâm gọi theo thứ tự là M, N, P và Q. Chứng minh rằng MP vuông góc và bằng NQ.

4.30 Dựng ra phía ngoài tam giác ABC hai hình vuông $ABMN$ và $BCPQ$. Chứng minh rằng các trung điểm các cạnh của tứ giác $CAMQ$ là các đỉnh của một hình vuông.

4.31 Gọi P và Q theo thứ tự là trung điểm của đường chéo BD và cạnh EF của một lúc giác đều $ABCDEF$. Chứng minh rằng APQ là một tam giác đều.

4.32 Lục giác lồi $ABCDEF$ nội tiếp một đường tròn tâm O bán kính R, có độ dài các cạnh $AB = CD = EF = R$. Chứng minh rằng

a) Các trung điểm M, N, P của các cạnh BC, DE và FA là các đỉnh của một tam giác đều;

b) Các trung điểm I, J, K của các đường chéo AD, CF và BE cũng là các đỉnh của một tam giác đều.

4.33 Chứng minh Định lý về đường thẳng Stây-ne (Steiner): Các điểm đối xứng với một điểm M trên đường tròn ngoại tiếp đối với các cạnh của một tam giác ABC thì nằm trên một đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác đó. (Đường thẳng này gọi là đường thẳng Stâyne).

4.34 Cho đường tròn (O) và một điểm A cố định trên đường tròn. Một dây cung MN của (O) có độ dài l cho trước chuyển động sao cho cung MN có hướng không đổi (chẳng hạn ngược chiều kim đồng hồ). Tìm quỹ tích của điểm P, đối xứng với M qua đường thẳng AN.

4.35 Một tam giác đều ABC có đỉnh C cố định và đỉnh A chuyển động trên một đường thẳng a cho trước, không đi qua C. Tìm quỹ tích của đỉnh B.

4.36 Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng a, b và một điểm C nằm ngoài hai đường thẳng đó. Hãy dựng một tam giác ABC vuông cân ở C sao cho A trên a và B trên b.

4.37 Dựng một tam giác đều có đỉnh nằm trên ba đường tròn đồng tâm cho trước. Biên luận.

4.38 Cho tam giác ABC và một điểm P trên cạnh BC. Hãy dựng một tam giác MNP cân ở đỉnh P, nội tiếp tam giác đã cho và có góc ở đỉnh $\angle MPN = \varphi$ cho trước.

4.39 Tìm trong tam giác ABC một điểm P sao cho nếu gọi A', B' và C' lần lượt là hình chiếu của P trên các cạnh BC, CA và AB thì ta được $BA' = CB' = AC'$.

4.40 Gọi x, y, z là các khoảng cách từ một điểm bất kỳ nằm trong một tam giác đều cạnh a đến các đỉnh của tam giác đó. Chứng minh hệ thức

$$a^4 - a^2(x^2 + y^2 + z^2) + x^4 + y^4 + z^4 - x^2x^2 - y^2z^2 - z^2x^2 = 0$$

4.41 Trong mặt phẳng cho tam giác ABC nội tiếp một tam giác $A_oB_oC_o$ cho trước. Chứng minh rằng ngoài tam giác ABC ra, còn một tam giác thứ hai $A'B'C'$ cũng nội tiếp tam giác $A_oB_oC_o$ và bằng tam giác ABC đã cho.

4.42 Trên hai cạnh AC và AB của một tam giác đều ABC lần lượt lấy hai điểm P và Q sao cho cả hai tam giác ABP và ACQ đều nhọn. Gọi R, S lần lượt là trực tâm các tam giác ABP và ACQ, T là giao điểm của BP và CQ. Hãy xác định tất cả các giá trị của số đo các góc $\angle CBP$ và $\angle BCQ$để tam giác TRS là đều. (Bài toán thi Olympic Toán Châu Á-Thái Bình Dương - APMO XIV, 3/2002.)

4.43 Giả sử M là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng tam giác ABC. Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua AB, M_2 đối xứng với M_1 qua AC và M' đối xứng với M_2 qua BC.

a) Tìm quỹ tích những điểm M trong mặt phẳng sao cho độ dài MM' đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất $d = \min MM'$ không phụ thuộc vào thứ tự việc lấy đối xứng liên tiếp qua các cạnh của tam giác ABC. (Đề thi chọn đội tuyển Toán quốc gia, VMO 5/1995).

§ 5 Sự xác định và dạng chính tắc của một phép đồng dạng phẳng

5.1 Chứng tỏ rằng một phép vị tự hoàn toàn được xác định bởi tỉ số (hệ số) vị tự k và một cặp điểm tương ứng.

5.2 Chứng minh định lý

a) Hình vị tự của một véctơ $\overrightarrow{AB}$ là một véctơ $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

b) Đảo lại, mọi phép biến hình trong đó véctơ nối hai điểm bất kỳ A và M và véctơ nối các ảnh A' và M' của chúng thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$ là một phép vị tự với $k \neq 1$, hoặc một phép tịnh tiến với $k = 1$.

c) Từ đó suy ra Hệ quả là: Một phép vị tự được xác định bởi việc cho hai véctơ tương ứng $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ song song nhưng không bằng nhau.

5.3 Áp dụng định lý nêu trong bài tập 5.2 ở trên, chứng minh định lý 20 về tích của hai phép vị tự, phát biểu trong mục 4.2d, thuộc bài 4. (Đó là một cách chứng minh nữa định lý 20, ngoài cách chứng minh đã cho trong bài 4, 4.2d)

5.4 Chứng minh rằng tích của một phép vị tự và một phép tịnh tiến theo thứ tự đó hay theo thứ tự ngược lại là một phép vị tự có cùng tỉ số.

5.5 Chứng minh rằng mọi phép vị tự $V(O, k)$ thì tương đương với tích của một phép vị tự $V_1(O_1, k)$ và một phép tịnh tiến song song với véctơ $\overrightarrow{OO_1}$.

5.6 Sử dụng phép vị tự, chứng minh định lý Xê-va (Céva)

5.7 Các trục vị tự của ba đường tròn. Giả sử $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$ và (O_3, R_3) là ba đường tròn không bằng nhau ($R_i \neq R_j$ và có tâm không thẳng hàng. Thế thì các đường tròn này vị tự với nhau từng đôi một. Chứng minh rằng sáu tâm vị tự của ba đường tròn đôi một vị tự với nhau thì được phân bố trên bốn đường thẳng, gọi là các trục vị tự của ba đường tròn. Nói một cách khác, sáu tâm vị tự của ba đường tròn là các đỉnh của một tứ giác (tứ cạnh) toàn phần mà mỗi cạnh không chứa hoặc chứa đúng hai tâm vị tự âm (tỷ số vị tự $k < 0$).

5.8 Áp dụng: Các tiếp điểm của một đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn đã cho thì thẳng hàng với một tâm vị tự của hai đường tròn đó không là ảnh của nhau trong phép vị tự tương ứng.

5.9 Dựng một đường trong đi qua một điểm cho trước và tiếp xúc với hai đường tròn cho trước.

5.10 Dựng một đường tròn đi qua một điểm cho trước và tiếp xúc với ba đường tròn cho trước có tâm không thẳng hàng.

§ 6 Vận dụng phép đồng dạng vào việc giải một số bài toán hình học phẳng

6.1 Hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc với nhau ở một điểm M. Hai cát tuyến a và b đi qua M cắt lại (O_1) và (O_2) lần lượt ở các cặp điểm A_1, A_2 và B_1, B_2. Chứng minh rằng

a) Đường thẳng A_1B_1 song song với đườg thẳng A_2B_2

b) Các tiếp tuyến của (O_1) và (O_2) tại A_1 và A_2 (cũng như tại B_1 và B_2) song song với nhau.

6.2 Chứng minh rằng trong một hình thang $ABCD$ các trung điểm E, F của hai đáy AB, CD; giao điểm I của hai cạnh bên kéo dài và giao điểm J của hai đươờng chéo AC, BD là bốn điểm thẳng hàng và làm thành một hàng điểm điều hoà.

6.3 Hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD. Gọi $I = (AD) \cap (BC)$ và $J = AC \cap BD$. Chứng minh rằng

a) Đường tròn α và β ngoại tiếp các tam giác ABI và DCI tiếp xúc với nhau.

b) Các đường tròn γ và δ ngoại tiếp các tam giác ABJ và CDJ tiếp xúc với nhau.

c) Tỉ số các bán kính của γ và δ bằng tỉ số các bán kính của α và β.

6.4 Gọi Δ là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau ở điểm M, tiếp xúc với (O_1) ở A và $O_2)$ ở B. Một cát tuyến đi qua M cắt lại (O_1) ở E. Chứng miinh rằng $[CE]$ là một đường kính của đường tròn (O_1).

6.5 Trong mặt phẳng cho tam giác ABC và một điểm O cố định. Một đường thẳng Δ chuyển động nhưng luôn luôn song song với AB cắt AC ở A' và (BC) ở B'. Tìm quỹ tích của các điểm sau đây

a) Trọng tâm G của tam giác $OA'B'$.

b) Đỉnh thứ tư P của hình bình hành $A'OB'P$ (nhận OA' và OB') làm hai cạnh.

6.6 Cho một góc xOy, một điểm A trên Ox và một điểm B trên Oy. Hai động tử M_1 trên Ox và M_2 trên Oy lần lượt xuất phát từ A và B chuyển động đều trên hai tia Ax và By với vận tốc không đổi nhưng khác nhau v_1 và $v_2 = kv_1$ $(0 < k \neq 1)$. Tìm quỹ tích của điểm M sao cho M_1 và M_2 lần lượt là các hình chiếu song song của M trên Ox và Oy theo phương p_1 và p_2 cho trước (nghĩa là $MM_i \parallel p_i$, $i = 1, 2; M_1 \in Ox, M_2 \in Oy$) sao cho p_i không song song với Ox và Oy.

6.7 Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự đó và một đường tròn (O, R) không đi qua điểm nào trong ba điểm đó. Một điểm M chuyển động trên (O) đường thẳng AM cắt lại (O) ở điểm N và cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác BCN ở điểm P. Tìm quỹ tích của P.

6.8 Cho một góc xOy và một đường tròn (γ) nằm trong góc đó. Hãy dựng một đường tròn tiếp xúc với (γ) và tiếp xúc với hai cạnh của góc đã cho.

6.9
1. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC ở điểm D, đường tròn (J) bàng tiếp góc $\angle A$ của tam giác ABC tiếp xúc với BC tại điểm E. Chứng minh rằng một trong hai giao điểm của AE và (I) là điểm D_1, xuyên tâm đối của D trên (I).
2. Dựng một tam giác ABC biết bán kính r của đường tròn nội tiếp, chiều cao $AH = h$ (hạ từ A xuống BC) và hiệu $b - c = \ell$ của hai cạnh CA và AB.

6.10 Dựng một đường tròn đi qua hai điểm A, B cho trước và tiếp xúc với một đường thẳng d cho trước. Biện luận.

6.11 Cho tam giác ABC. Dựng bốn đường tròn bằng nhau $(A_o), (B_o), (C_o)$, và (D_o) theo thứ tự tiếp xúc với hai cạnh của các góc $\angle A, \angle B, \angle C$, của tam giác đã cho còn (D_o) thì tiếp xúc với ba đường tròn kia. Hãy tính bán kính chung p của bốn đường tròn theo các bán kính r và R của các đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác ABC.

6.12 Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B phân biệt và một đường tròn (O) đi qua A nhưng không đi qua B. Với mỗi điểm M trên đường tròn (O) ta dựng đường tròn (O_1) đi qua M và tiếp xúc với (AB) ở A. Đường tròn (O_1) cắt lại tiếp tuyến At ở điểm A của đường tròn (O_2) ngoại tiếp tam giác ABM ở giao điểm thứ hai N ($\neq A$). Tìm quỹ tích của điểm N khi M chuyển động trên đường tròn (O).

6.13 Gọi D, E, F tương ứng là chân các đường phân giác trong các góc A, B, C của một tam giác không cân ABC và A_1, B_1, C_1 là các tiếp điểm thứ hai của các tiếp tuyến với đường tròn nội tiếp tam giác ABC kẻ từ D, E, F. Chứng minh các đường thẳng A_oA_1, B_oB_1 và C_oC_1 trong đó A_o, B_o, C_o lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB đồng quy ở một điểm nằm trên đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC (Đề thi olympic Toán liên bang Nga, 1998).

6.14
1. Chứng minh rằng hai hình vuông bất kỳ $A_iB_iC_iD_i$, $(i = 1, 2)$ thì đồng dạng
2. Xác định tâm đồng dạng góc đồng dạng và tỉ số đồng dạng của phép vị tự - quay biến hình vuông $A_oB_oC_oD_o$ thành hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ đề cập đến trong bài toán 5.1 của mục 5.4, bài 5.

6.15 Cho hai đường tròn (O_1, R_2) không đồng tâm, $R_2 \neq R_1$. Tìm tất cả các phép đồng dạng thuận biến đường tròn này thành đường tròn kia.

6.16 Gọi CD là đường cao hạ xuống cạnh đáy AB của một tam giác ABC cân ở C. Dựng đường cao DE của tam giác BCD và gọi M kà trung điểm DE. Chứng minh rằng AE vuông góc với CM.

6.17 Lấy trên cạnh AB và AD của một hình vuông $ABCD$ lầm lượt hai điểm M và N sao cho $AM = AN$. Qua A dựng AP vuông góc với BN ở P. Chứng minh rằng góc CPM là vuông.

6.18 Giả sử OAA', OBB' và OCC' là ba tam giác cân cùng đỉnh O và đồng dạng thuận với nhau. Chứng minh rằng nếu điểm O thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì các cặp đường thẳng $BC, B'C', CA, C'A'$ và $AB, A'B'$ giao nhau theo ba điểm M, N và P thẳng hàng.

6.19 Dựng ra phía ngoài tam giác ABC ba tam giác đồng dạng (thuận) $\triangle A'BC \backsim \triangle B'CA \backsim \triangle C'AB$. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

6.20 Một tam giác đều ABC có đỉnh C cố định và đỉnh A chuyển động trên một đường thẳng a cho trước, không qua C. Tìm quỹ tích đỉnh B và tâm Q của tam giác ABC.

6.21 Một điểm A chuyển động trên đường tròn (O) đường kính DE cho trước. Tìm quỹ tích của đỉnh C, B và tâm Q của hình vuông $ABCD$ (dựng trên cạnh DA của tam giác vuông DEA)

6.22 Một điểm P chuyển động trên đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường thẳng (BP) có hai động tử M và N chuyển động sao cho $PM = PN = 2PA$. Tìm quỹ tích đạo chuyển động của các điểm Q và S theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM và AN.

6.23 Một tam giác ABC có hướng thuận, vuông ở C có đỉnh A cố định và góc $A = 60^o$ chuyển động trong mặt phẳng sao cho C chỉ dồi chỗ trên một đường (γ) cho trước. Tìm quỹ đạo chuyển động của đỉnh B và của trọng tâm G của tam giác ABC trong các trường hợp sau

a) (γ) là một đường thẳng c.

b) (γ) là một đường tròn (O, R) không đi qua A.

6.24 Một tam giác ABC cân tại A có kích thước thay đổi, chuyển động mặt phẳng nhưng luôn luôn giữ nguyên dạng và hướng sao cho hai đỉnh B, C chạy trên một đường tròn $v(O, R)$ cố định cho trước và đường thẳng (AB) đi qua một điểm I cố định đã cho

a) Chứng minh rằng đường thẳng (AC) cũng đi qua một điểm cố định J khác I.

b) Tìm quỹ tích các hình chiếu M và N trên đường thẳng (BC) theo thứ tự của hai điểm I và J.

6.25 Dựng một tam giác nội tiếp một tam giác ABC cho trước sao cho các cạnh của nó, mỗi cạnh song song với đường thẳng cho trước.

6.26 Dựng một tam giác cân biết góc ở đỉnh bằng g và tổng độ dài của cạnh đáy với chiều cao tương ứng (phát xuất từ đỉnh) bằng s cho trước.

6.27 Dựng một hình chữ nhật biết tỉ số hai kích thước bằng k cho trước và các cạnh liên tiếp đi qua bốn điểm phân biệt A, B, C, D cho trước. Biện luận.

6.28 Dựng một hình chữ nhật có độ dài đường chéo cho trước và các cạnh (hoặc cạnh kéo dài) lần lượt đi qua bốn điểm phân biệt A, B, C, D cho trước. Biện luận.

6.29 Dựng một đường tròn g tiếp xúc với hai đường thẳng cắt nhau a, b, cho trước và trực giao (cắt vuông góc) với một đường tròn (O) cho trước. Biện luận.

630 Dựng một tứ giác $ABCD$ nhận đường chéo AC làm phân giác góc $\angle BAD$ và cho biết một trong các hệ dữ kiên sau

a) $AB = a, DA = d$, đường chéo $AC = 2$ và hiệu $\angle B - \angle D = \varphi$

a) $BC = b, CD = c, AB/AD = k_1$ và $\angle B - \angle D = \varphi$

c) $AB = a, DA = d, AC = 2$ và $BC/CD = k_2$.

Tài liệu tham khảo

[1] **C. Lobossé và C.Hémery**, Géométeie, classe de mathématiquer Fernand Nathan, éditeur; Paris, 1965.

[2] **I.M.Yaglom**, Geometric transfocmations I và II. Translated from the Russian by Allen Shields. Univéity ò Michigan. New Mathermatical Library, pub-bished by Random House, Singer school Division New York, 1962, 1968 (by Yale University)

[3] **V.V. Praxolov**, Các bài toán về hình học phẳng (Tập I) đuợc dịch từ tiếng Nga, bn dịch tiếng Việt của Hoàng Đức Chính và NGuyễn Đễ. NXB. Hi Phòng, 1994.

[4] **Nguyễn Đẳng Phất** (trong tập giáo trình học s cấp) Giáo trình in Rônêo, trường Đ.H Sư phạm Hà Nội, 1973 - 1974, 1974 - 1975.

[5] **Nguyễn Đăng Phất**, Bài giảng chuyên đề các phép biến hình và ứng dụng cho khoá bồi dưỡng nâng cao kiến thức chuyên môn - Hè 2003 về toán học tại trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG Hà Nội