# CHƯƠNG 2: ĐA THỨC CHEBYSHEV

## I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT ĐA THỨC CHEBYSHEV:

### 1. Định nghĩa:

*Các đa thức $T_n(x)$, $n \in$ N xác định như sau:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

Gọi là các đa thức Chebyshev loại I.

* Các đa thức Tn(x), $n \in$ N xác định như sau:

$$\begin{cases} U_0(x) = 0, U_1(x) = 1 \\ U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Gọi là các đa thức Chebyshev loại II

### 2. Các tính chất của đa thức loại I:

Đa thức Chebyshev có nhiều tính chất hay, được sử dụng rất nhiều trong việc giải quyết các bài toán đa thức.

Sau đây xin được nêu một số tính chất quan trọng (việc chứng minh rất dễ dàng)

-Tính chất 1: $\forall x \in [-1,1]$ ,ta có $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

-Tính chất 2: $T_n(x)$ là đa thức bậc $n, n \in$ ¢ ,hệ số cao nhất là $2^{n-1}$

-Tính chất 3: $T_n(x)$ là hàm chẵn khi x chẵn và là hàm lẻ khi x lẻ.

-Tính chất 4: Đa thức $T_n(x)$ có đúng n nghiệm phân biệt trong $[-1,1]$ :

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, (k = 1, 2, ..., n-1)$$

-Tính chất 5: a) $|T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1,1]$

b) $|T_n(x)| = 1$ chỉ tại n+1 điểm khác nhau trong $[-1,1]$ là

$$\overline{x_k} = \cos\frac{k\pi}{n}(k = 1, 2, ..., n)$$

Chú ý là: $T_n(\overline{x_k}) = (-1)^k$

Các điểm $\overline{x_k}$ gọi là điểm luân phiên Chebyshev.

-Tính chất 6: $\forall P(x)$ bậc n, hệ số cao nhất bằng 1, ta có

$$\max|P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow P(x) = T_n*(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$

**3. Các tính chất của đa thức loại II:**

-Tính chất 1: $\forall x\in(-1,1)$ ta có

$$U_n(x)=\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

-Tính chất 2: $U_n(x)=\frac{1}{n}T_n'(x)$

-Tính chất 3: a/. $U_n(x)$ là đa thức hệ số nguyên, bậc $n$ -1, hệ số cao nhất là $2^{n-1}$

b/. $U_n(x)$ là hàm chẵn nếu x lẻ và là hàm lẻ nếu x chẵn.

-Tính chất 4: $\left|U_n(x)\right|\le n,\forall x\in(-1,1)$

-Tính chất 5: Đa thức $U_n(x)$ có đúng n-1 nghiệm phân biệt khác nhau trong $[-1,1]$

***Đặc biệt***: Từ tính chất 2 và 4, ta có:

$$\left|T_n'(x)\right|\le n^2,\forall x\in(-1,1)$$

**II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA:**

**<u>Bài 1</u>**: Chứng minh rằng mọi đa thức $f(x)$ bậc $n\ge 1$ đều có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_iT_i(x),a_n\ne 0$$

Và cách biểu diễn này là duy nhất.

**<u>Lời giải</u>**

Ta có $T_n(x)$ là đa thức bậc n có hệ số cao nhất là $2^{n-1}$ nên ta có thể viết

$T_n(x)=2^{n-1}x^n+\varphi(x)$ với $\varphi(x)$ là đa thức bậc nhỏ hơn n.

Suy ra $x^n=\frac{1}{2^{n-1}}T(x)-\frac{1}{2^{n-1}}\varphi(x)$

Bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$f(x)=a_0+a_1T(x)+a_2T_2(x)+...+a_nT_n(x)$$

Bây giờ ta chứng minh tính duy nhất của cách biểu diễn này

Giả sử

$$f(x)=a_0+a_1T(x)+a_2T_2(x)+...+a_nT_n(x)=a'_0+a'_1T(x)+a'_2T_2(x)+...+a'_nT_n(x)$$

Khi đó $\sum_{i=0}^{n}(a_i-a'_i)T_i(x)=0,\forall x\in$ ¡

Vậy $a_0-a'_0=a_1-a'_1=...=a_n-a'_n=0$

Hay $a_0=a'_0,a_1=a'_1,...,a_n=a'_n$

Một trong những dấu hiệu để nhận biết bài toán đa thức có sử dụng tính chất đa thức Chebyshev hay không đó là miền giá trị đa thức. Các bài toán trên miền $\left[-1,1\right]$ đều gợi ra cách giải bằng phương pháp này.

Ta xét thêm một số ví dụ:

**<u>Bài 2</u>**: Cho đa thức hệ số thực $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d, \alpha>0$ Biết rằng $\forall x\in\left[-1,1\right]$ ta có $\left|f\left(x\right)\right|\le\alpha$ .Tìm max của $\left|a\right|,\left|b\right|,\left|c\right|,\left|d\right|$

**<u>Nhận xét</u>**: Ta sẽ lưu ý cách chọn điểm luân phiên trong đa thức Chebyshev.

**<u>Lời giải</u>:**

Đặt
$$\begin{cases} A=f(-1)=-a+b-c+d \\ . \\ B=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a}{8}+\dfrac{b}{4}-\dfrac{c}{2}+d \\ C=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{8}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{2}+d \\ D=f\left(1\right)=a+b+c+d \\ E=f\left(0\right)=d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{3}A+\dfrac{4}{3}B-\dfrac{4}{3}C+\dfrac{2}{3}D \\ b=\dfrac{1}{2}A+\dfrac{1}{2}D-E \\ c=\dfrac{1}{6}A-\dfrac{8}{6}B+\dfrac{8}{6}C-\dfrac{1}{6}D \\ d=E \end{cases}$$

Từ giả thiết:
$$\begin{aligned} &\left|a\right|\le 4\alpha \\ &\left|b\right|\le 2\alpha \\ &\left|c\right|\le 3\alpha \\ &\left|d\right|\le \alpha \end{aligned}$$

Bằng cách xét: $f\left(x\right)=\alpha\left(4x^3-3x\right)$

và $g\left(x\right)=\alpha\left(2x^2-1\right)$

Thì ta có dấu đẳng thức xảy ra. Vậy:

$$\begin{aligned} &\max\left|\mathrm{a}\right|=4\alpha, \\ &\max\left|\mathrm{b}\right|=2\alpha, \\ &\max\left|\mathrm{c}\right|=3\alpha, \\ &\max\left|\mathrm{d}\right|=\alpha \end{aligned}$$

Chú ý: f(x),g(x) là xét dự trên cơ sở cos2x,cos3x.

**<u>Bài 3</u>:** Cho đa thức $P_{n-1}\left(x\right)$ bậc không vượt quá $n-1$ có hệ số bậc cao nhất $a_0$,

thỏa mãn điều kiện: $\sqrt{1-x^2}\left|P_{n-1}\left(x\right)\right|\le 1, \forall x\in\left[-1,1\right]$

Chứng minh rằng $\left|a_0\right|\le 2^{n-1}$

**Lời giải**

Ta viết đa thức đã cho dưới dạng nội suy Lagrange theo các nút nội suy $x_j = \cos\frac{2j-1}{2n}\pi$

là các nghiệm của đa thức Chebyshev $T_n(x)$

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}P_{n-1}(x_j)\frac{T_n(x)}{x-x_j}$$

Suy ra $$a_0 = \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sqrt{1-x_j^2}P(x_j)$$

Vậy nên $$|a_0| \le \frac{2^{n-1}}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sqrt{1-x_j^2}P(x_j)\right| \le \frac{2^{n-1}}{n}.n = 2^{n-1}$$

**Bài 4**: Giả thiết rằng đa thức $P_{n-1}(x)$ thỏa mãn các điều kiện của Bài 1. Chứng minh rằng $|P_{n-1}(x)| \le n, \forall x \in [-1,1]$

**Lời giải**:

Với các $x_j$ được chọn như ở bài toán trên thì do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trong $(0;\pi)$ nên $-1 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1 < 1$. Nếu $x_1 < x < 1$ thì

$$|P_{n-1}(x)| \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sqrt{1-x_j^2}P_{n-1}(x_j)\right|\frac{|T_n(x)|}{|x-x_j|} \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{T_n(x)}{(x-x_j)} \qquad (2)$$

(do $x - x_j > 0$ và $T_n(x)$ có dấu không đổi trên $(x_1;1]$)

Mặt khác thì $T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$

Nên ta có $$T_n'(x) = 2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)}{(x-x_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_k} \qquad (3)$$

Lại có $$\frac{|T_n'(x)|}{n} = |U_n(x)| \le n$$

Nên từ (2) và (3) suy ra

$$|P_{n-1}(x)| \le n, \forall x \in (x_1;1]$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$|P_{n-1}(x)| \le n, \forall x \in [-1,x_n)$$

Xét $x_n \le x \le x_1$ .Khi đó ta có

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-x_1^2} = \sin(\arccos x_1) = \sin\frac{\pi}{2n}$$

Do $$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}$$

$\sin\frac{\pi}{2n} \geq \frac{\pi}{2n}.\frac{2}{n} = \frac{1}{n}$ và $\sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{n}$.Suy ra:

$$\left|P_{n-1}(x)\right| \leq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

Tóm lại ta đã chứng minh được rằng $\left|P_{n-1}(x)\right| \leq n, \forall x \in [-1,1]$

**<u>Bài 5</u>**: Cho đa thức lượng giác

$$P(t) = a_1 \sin t + a_2 \sin 2t + ... + a_n \sin(nt)$$

Thỏa mãn điều kiện $\left|P(t)\right| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$

Chứng minh rằng $\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \leq n, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$

**<u>Lời giải</u>:**

Nhận xét rằng $\frac{P(t)}{\sin t} = P_{n-1}(\cos t)$ với $P_{n-1}(x)$ là đa thức dạng (1). Đặt $\cos t = x$. Khi đó $|x| \leq 1$ và

$$P(t) = \sin P_{n-1}(\cos t) = \sqrt{1-x^2} P_{n-1}(x)$$

Ta thấy $P(x)$ thỏa mãn điều kiện của Bài 2 nên

$$\left|P_{n-1}(x)\right| \leq n, \forall x \in [-1,1]$$

Do đó

$$\left|\frac{P(t)}{\sin t}\right| \leq n, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$$

**<u>Bài 6</u>:** Cho đa thức lượng giác

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

Thỏa mãn điều kiện $\left|P(x)\right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng $\left|P'(x)\right| \leq n, \forall x \in \mathbb{R}$

**<u>Lời giải</u>:**

Cho $x_0$ tuỳ ý. Do

$$\cos(x_0 - x) - \cos(x_0 + x) = 2\sin x_0 \sin x$$
$$\sin(x_0 + x) - \sin(x_0 - x) = 2\cos x_0 \sin x$$

nên $$g(x) = \frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2} = \sum_{j=0}^{n} c_j \sin jx$$

Suy ra $$g'(x) = \frac{P'(x_0 + x) + P'(x_0 - x)}{2}$$

Và $g'(0) = P'(x_0)$ .Ta chứng minh rằng $|g'(0)| \le n$ .Thật vậy, $g(x)$ là đa thức lượng giác chứa thuần sin như trong Bài 3 và

$$|g(x)| = \left|\frac{P(x_0 + x) - P(x_0 - x)}{2}\right| \le \frac{|P(x_0 + x)| + |P(x_0 - x)|}{2} \le 1$$

Nên theo kết quả của bài 3 thì $\left|\dfrac{g(x)}{\sin x}\right| \le n \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$ (4)

Nhưng $g(0) = 0$ suy ra

$$\left|\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \cdot \frac{x}{\sin x}\right| \le n \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{..., -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, ...\}$$

Nên khi $x \to 0$: $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} \to g'(0)$ $\dfrac{x}{\sin x} \to 1$

Ta nhận được $|g'(0)| \le n$

Từ đó ta có $|P'(x_0)| \le n$ .Nhưng $x_0$ được chọn tùy ý nên suy ra $|P'(x)| \le n \ \forall x \in \mathbb{R}$

**<u>Bài 7</u>** ***(Định lý Berstein-Markov)***

Cho đa thức

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$$

Thỏa mãn điều kiện $|P_n(x)| \le 1, \forall x \in [-1;1]$

Chứng minh rằng khi đó : $|P'_n(x)| \le n^2, \forall x \in [-1;1]$

(5)

**<u>Lời giải</u>:**

Đặt $x = \cos a$ .Khi đó theo giả thiết thì $|P_n(\cos a)| \le 1$ .Do $P_n(\cos a)$ có dạng

$$P_n(\cos a) = \sum_{j=0}^{n} \left(a_j \cos j\alpha + b_j \sin j\alpha\right)$$

Nên ta có thể áp dụng kết quả của Bài 4. Ta được

$$\left|\sin\alpha.P'_n(\cos\alpha)\right|\le n\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\left|\frac{P'_n(x)}{n}\right|\le 1$$

Cũng theo Bài 4, ta có $\left|\frac{P'_n(x)}{n}\right|\le n$ .Suy ra: $\left|P'(x)\right|\le n^2$

**Nhận xét** : Dựa vào kết quả của Định lý Berstein-Markov, sau khi áp dụng liên tiếp kết quả của định lí này, ta sẽ thu được kết quả sau:

Nếu $\left|P_n(x)\right|\le 1,\forall x\in[-1;1]$ thì $\left|P^{(k)}(x)\right|\le\left[n(n-1)(n-2)...(n-k+1)\right]^2,\forall x\in[-1;1]$

**Bài 8**: Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0.

a/. Chứng minh rằng phương trình $x^n-a_1x^{n-1}-...-a_{n-1}x-a_n=0$ (6)

có đúng một nghiệm dương duy nhất.

b/. Giả sử R là nghiệm dương của phương trình (6) và

$$A=\sum_{j=1}^{n}a_j,B=\sum_{j=1}^{n}ja_j$$

Chứng minh rằng khi đó $A^A\le R^B$

**Lời giải:**

a) Do $x>0$ nên $(6)\Leftrightarrow 1=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_n}{x^n}$

Đặt $f(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+...+\frac{a_n}{x^n}$. Nhận xét rằng $f(x)$ liên tục và $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0,+\infty)$ nên tồn tại duy nhất $R>0$ sao cho $f(R)=1$.

b) Đặt $c_j=\frac{a_j}{A}$ .Suy ra $c_j\ge 0$ và $\sum_{j=1}^{n}c_j=1$.Do hàm số y = -lnx lõm trong khoảng $(0,+\infty)$ nên teo BĐT Jensen thì

$$\sum_{j=1}^{n}c_j-\ln\frac{A}{R^j}\ge-\ln\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\frac{A}{R^j}\right)=-\ln\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{R^j}\right)=-\ln f(R)=-\ln 1=0$$

Suy ra $\sum_{j=1}^{n}\left(c_j\ln R^j-c_j\ln A\right)$

Và $(\ln A)\sum_{j=1}^{n}c_j\le(\ln R)\sum_{j=1}^{n}jc_j$

Hay $\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}a_j(\ln A)\le\frac{1}{A}\sum_{j=1}^{n}ja_j(\ln R)\left(doc_j=\frac{a_j}{A};A>0\right)$

Vậy nên $\ln\left(A^A\right)\le\ln\left(R^B\right)\Rightarrow A^A\le R^B$