

PHƯƠNG TRÌNH HÀM QUA CÁC KÌ THI

Lưu Giang Nam

Sinh viên K14, khoa Toán tin DH KHTN TPHCM

I. Bài toán:

Bài 1: Cho dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn với $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = 5(\sqrt{x_n + 11} - \sqrt{x_n + 4})$ với mọi n nguyên dương.

Chứng minh rằng dãy số $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn và tìm nó.

Chuyên SPHN TST 2014

Bài 2: Cho dãy số $(x_n)_{n \geq 0}$ xác định bởi $x_0 = 0, x_1 = 3$ và $x_{n+1} = \frac{7x_n + 3\sqrt{4 + 5x_n^2}}{2}$ với mọi số nguyên không âm n .

a) Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy $(x_n)_{n \geq 0}$ là số tự nhiên và x_{2014} chia hết cho x_{19} .

b) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương a sao cho với mọi số nguyên dương n , trong biểu diễn nhị phân của dãy số x_{an} có ít nhất 46^{2014} chữ số 1.

Chuyên SPHN TST 2014

Bài 3: Cho dãy (a_n) thỏa :

$$\begin{cases} a_1 = 1; a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm tất cả các số nguyên dương a và b với $a < b$ thỏa mãn điều kiện $a_n - 2na^n$ chia hết cho b với mọi $n \geq 1$.

Nguyễn Du TST 2014

Bài 4: Cho dãy số (x_n) được xác định như sau :

$$x_1 = 1, x_2 = 2013, x_{n+2} = 4026x_{n+1} - x_n, n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng $\frac{x_{2014} + 1}{2014}$ là số chính phương.

Thái Bình TST 2014

Bài 5: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương $n \geq 3$, phương trình sau

$$x^n e^{-x} = 1, n \in \mathbb{N}, n > 2$$

Có 1 nghiệm duy nhất x_n trên đoạn $[0; n]$. Tìm $\lim x_n$.

Thái Bình TST 2014

Bài 6 : Cho dãy số (x_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}x_n + n^2 \end{cases}$$

với $n = 1, 2, 3, \dots$

Tìm giới hạn: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x_n}}{1+n} \right)$

Chuyên Hùng Vương 2014

Bài 7: Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1 \end{cases}$$

Xét dãy (y_n) như sau : $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2}$ Tính $\lim y_n$.

Chuyên Lương Thế Vinh 2014

Bài 8: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi:

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = \frac{2014 + x_n}{2016 - x_n}$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$

a. Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.

b. Với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$, đặt $y_n = \frac{1}{2013n + 2015} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k - 2014}$. Tính $\lim y_n$.

Hà Tĩnh 2014

Bài 9: Cho dãy (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - \sqrt{u_n^2 + 1}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2u_{n+1}^2 + 3u_n^2}{u_{n+1}^2 + 2u_{n-1}}$.

Đồng Nai 2014

Bài 10: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) là dãy số tăng nhưng không bị chặn trên.

b) Đặt $x_n = \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim x_n$.

Long An 2014

Bài 11: Tìm công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (x_n) biết:

$$x_1 = \frac{2013}{2014}, x_{n+1} = \frac{1}{4 + 2011x_n}$$

(với mọi $n > 0$).

Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Đà Nẵng 2014

Bài 12: Cho dãy số $(x_n), n = 0, 1, 2, \dots$ xác định bởi $x_0 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{x_{n+1}}}$ và a là số cho trước lớn hơn 1.

Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn.

Chuyên Nguyễn Du, Đắk Lắk 2014

Bài 13: Cho $a \in [0, 1]$ và dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn $x_1 = \frac{a+1}{4}$ và $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{a}{4}$.

1. Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ.
2. Chứng minh rằng $x_n - b < \frac{1}{n}$ với $\lim(x_n) = b$.

Đề thi chọn ĐT Quốc gia KHTN vòng 2, ngày 2

Bài 14: Cho dãy số $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ cho bởi:

$$x_1 = 1; x_{n+1} = 20 + \frac{13}{x_n}$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm $\lim x_n$.

Đề thi chọn đội tuyển HSG QG tỉnh Hải Phòng năm học 2013-2014

Bài 15: Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ thỏa mãn:

$$i) u_n + \frac{n}{u_n} = u_{n+1}$$

$$ii) u_1 = \alpha > 0$$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}.$$

Chuyên Yên Bái

Bài 16: Cho các dãy số (a_n) và (b_n) thỏa mãn các điều kiện: $a_1 = 1, b_1 = 2$ thì:

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$.

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG QUỐC GIA TỈNH QUẢNG TRỊ

Bài 17: Cho dãy số (x_n) với $x_1 = \frac{5}{2}$ và:

$$x_{n+1} \sqrt{x_n^3 - 12x_n + \frac{20n+21}{n+1}}$$

Chứng minh dãy số có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Chọn đội tuyển QG tỉnh Gia Lai 2014-2015

Bài 18: Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_0 = 2, x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2} \forall n \in \mathbb{N}$. Tìm công thức tổng quát của x_n và tìm $\lim x_n$.

Đề thi Chọn Đội tuyển HSG Quốc Gia Quảng Nam 2014-2015

Bài 19: Cho 4028 số thực $a_1, a_2, \dots, a_{2014}, b_1, b_2, \dots, b_{2014}$. Xét dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$x_n = \sum_{i=1}^{2014} [a_i \cdot n + b_i], (n = 1, 2, \dots).$$

Biết dãy số (x_n) lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{2014} a_i$ là số nguyên (với $[a]$ là phần nguyên của số thực a)

Bình Phước 2014

Bài 20: Cho dãy (u_n) xác định bởi:

$$u_1 = 2015; u_{n+1} = u_n^2 - 2014u_n + 2014 \forall n \in \mathbb{N}$$

Chứng minh với mọi n nguyên dương các số $u_1, u_2, \dots, u_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Hà Nội 2014

Bài 21: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1, u_{n+1} = 3u_n + a, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ và a là số nguyên tố. Xét dãy $(v_n) : v_n = u_n + b, b \in \mathbb{N}$. Tìm a và b sao cho (v_n) là một cấp số nhân. Từ đó tìm số hạng tổng quát của (v_n) .

Cà Mau 2014

Bài 22: Cho dãy số u_n xác định:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n + \sqrt{Ku_n^2 - 8} \end{cases}$$

Tìm K nguyên dương sao cho mọi số hạng của dãy u_n đều là số nguyên.

Quốc học Huế 2014

Bài 23: Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$\ln(1 + x_n^2) + nx_n = 1$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - nx_n)}{x_n}$

II. Đáp án: