

DÃY SỐ QUA CÁC KÌ THI

Lưu Giang Nam

Sinh viên K14, khoa Toán tin DH KHTN TPHCM

I. Bài toán:

Bài 1: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- (a) Tồn tại $M > 0$ để với mọi $X > y > M$ thì $f(x) > f(y)$.
 (b) Với mọi số thực dương x, y ta luôn có:

$$f(x)f(y) = f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Đề Đồng hành cùng Gặp gỡ Toán học 2014

Bài 2: Tìm tất cả các hàm f liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn :

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chuyên Nguyễn Du TST 2014

Bài 3: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện :

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Thái Bình TST 2014

Bài 4: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và thỏa mãn :

$$f(f(x) - y) + f(x + y) = 2x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chuyên Lương Thế Vinh 2014

Bài 5: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(0) \neq 0, f(1) = 6$ và:

$$f(x)f(y) = f(x + y) + f(x - y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$.

Dà Nẵng 2014

Bài 6: Tìm các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(x + y) \geq f(x)f(y) \geq 2014^{x+y}$$

Chuyên Nguyễn Du , Đắc Lắc 2014

Bài 7: Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Chọn đội tuyển QG tỉnh Gia Lai 2014-2015

Bài 8: Tìm $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$ thỏa mãn:

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+9xy}\right) \text{ và } f'(0) = 6.$$

Đề thi Chọn Đội tuyển HSG Quốc Gia Quảng Nam 2014-2015

Bài 9: Tìm tất cả các hàm số $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và thỏa :

$$g[g(x) - x^2 + yz] = g(x)[g(x) - 2x^2 + 2yz] + z^2[y^2 - g(y)] + y^2[z^2 - g(z)] - 2x^2yz + x + g(y)g(z) + x^4, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Đồng Nai 2014

Bài 10: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn:

$$(x+1)^{y+1} + 1 = (x+2)^{z+1}$$

Bình Phước 2014

Bài 11: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ thỏa mãn:

$$f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y) \quad \forall x > 0, \forall y > 0$$

($\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương).

Hà Nội 2014

Bài 12: Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + 2f(y)) = f(x) + f(y) + y$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

Khánh Hòa 2014

Bài 13: Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa:

$$f(x^3) + f(y^3) = (x+y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy))$$

Quốc học Huế 2014

Bài 14: Tìm tất cả các hàm $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ thỏa mãn:

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x+y)f(yf(x)) \quad \forall x, y \in (0, \infty)$$

Yên Bái 2014

II. Đáp án: