

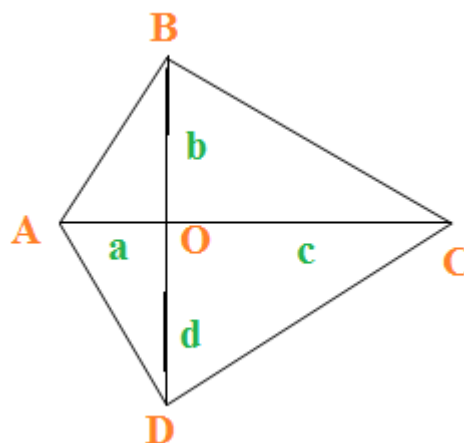
Tuần trước mình đã đưa đề lên diễn đàn không biết có ai giải được chưa ? Sau đây là lời giải cho các bạn tham khảo nhé !

Đề Cho $a, b, c, d > 0$. CMR:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{d^2+a^2}}{\sqrt{(ab+bc+cd+da)}} \geq 2\sqrt{2}$$

Giải

Vẽ tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc và cắt nhau tại O
 Sao cho có $OA = a, OB = b, OC = c, OD = d$



Ta có chu vi tứ giác này là:

$$C = AB + BC + CD + DA = \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{d^2+a^2}$$

Diện tích tứ giác đã cho là

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = (ab + bc + cd + da)/2$$

Với tứ giác có diện tích S thì chu vi C có giá trị nhỏ nhất khi tứ giác đã cho là hình vuông, tức là chu vi tứ giác ABCD khi nó là hình vuông là:

$$C_{\min} = 4\sqrt{S} = 4\sqrt{\frac{ab+bc+cd+da}{2}} = 2\sqrt{2(ab+bc+cd+da)}$$

Mà $C \geq C_{\min}$ nên :

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{d^2+a^2} \geq 2\sqrt{2(ab+bc+cd+da)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ tứ giác ABCD là hình vuông $\Leftrightarrow a = b = c = d$

Với $a, b, c, d > 0$ ta có từ BDT trên suy ra BĐT cần c/m:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{d^2+a^2}}{\sqrt{(ab+bc+cd+da)}} \geq 2\sqrt{2}$$

Trên đây là chứng minh BDT bằng pp hình học rất đơn giản. Các bạn thử tìm chứng minh bằng đại số thuần túy xem có giải được không ? chúc các bạn thành công !