

2. Đa thức và nghiệm

Nghiệm của đa thức đóng một vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các tính chất của đa thức. Nhiều tính chất của đa thức được thể hiện qua nghiệm của chúng. Ngược lại, việc nghiên cứu tính chất các nghiệm của đa thức cũng là một trong các vấn đề trung tâm của đại số.

2.1. Ví dụ mở đầu

Xét xem số $\alpha = \sqrt[3]{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$ là hữu tỷ hay vô tỷ.

Ta có thể giải bài toán này bằng cách chứng minh lần lượt các mệnh đề sau:

- 1) Nếu a vô tỷ thì $\sqrt{a}$ vô tỷ
- 2) Nếu a vô tỷ thì $\sqrt[3]{a}$ vô tỷ
- 3) $\sqrt{3}$ vô tỷ

Nhưng ta cũng có thể có một cách tiếp cận khác như sau:

- 1) Tìm đa thức với hệ số nguyên nhận α làm nghiệm
- 2) Chứng minh rằng đa thức này không có nghiệm hữu tỷ

Việc tìm đa thức với hệ số nguyên nhận α làm nghiệm được tiến hành như sau

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt[3]{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}} \Rightarrow \alpha^3 = 3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow (\alpha^3 - 3)^2 = 3 + \sqrt{3} \Rightarrow ((\alpha^3 - 3)^2 - 3)^2 = 3 \\ &\Rightarrow \alpha^{12} - 12\alpha^9 + 48\alpha^6 - 72\alpha^3 + 33 = 0 \quad (*).\end{aligned}$$

Vấn đề còn lại là chứng minh (*) không có nghiệm hữu tỷ. Việc này sẽ được thực hiện ở cuối bài.

2.2. Nghiệm của đa thức, định lý Bezout.

Định nghĩa. Số thực a (trong một số trường hợp, ta xét cả các số phức) được gọi là nghiệm của đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ nếu $P(a) = 0$, tức là $a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0 = 0$.

Ta có định lý đơn giản nhưng rất có nhiều ứng dụng sau đây về nghiệm của đa thức:

Định lý 5. a là nghiệm của đa thức $P(x)$ khi và chỉ khi $P(x)$ chia hết cho $x - a$.

Định lý này là hệ quả của định lý sau:

Định lý 6. Số dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho $x - a$ là $P(a)$.

Cả định lý 5 và định lý 6 đều được gọi là định lý Bezout. Để chứng minh định lý 6, ta chỉ cần chứng minh $P(x) - P(a)$ chia hết cho $x - a$. Nhưng điều này là hiển nhiên vì

$$P(x) - P(a) = a_n(x^n - a^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + a_1(x - a)$$

và

$$x^k - a^k = (x-a)(x^{k-1} + x^{k-2}a + \dots + a^{k-1})$$

Từ định lý 5, ta có thể có một định nghĩa khác cho nghiệm của đa thức như sau: a là nghiệm của đa thức $P(x)$ nếu $P(x) = (x-a)Q(x)$ với $Q(x)$ là một đa thức nào đó. Với định nghĩa này, ta có thể phát triển thành định nghĩa về nghiệm bội.

Định nghĩa. a được gọi là *nghiệm bội r* của đa thức $P(x)$ nếu $P(x) = (x-a)^r Q(x)$ với $Q(a) \neq 0$.

2.3. Định lý Vieta

Định lý 7. Xét đa thức $P(x) \in R[x]$. Nếu $x_1, x_2, \dots, x_k$ là các nghiệm phân biệt của $P(x)$ với các bội $r_1, r_2, \dots, r_k$ tương ứng thì $P(x)$ chia hết cho $(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\dots(x-x_k)^{r_k}$.

Chứng minh: Điều này là hiển nhiên theo định nghĩa và do các đa thức $(x-x_i)^{r_i}$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Hệ quả:

- a) Một đa thức bậc n với hệ số thực có không quá n nghiệm thực.
- b) Nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ có bậc nhỏ hơn hay bằng n bằng nhau tại $n+1$ điểm thì hai đa thức này bằng nhau.

Định lý 8. Xét đa thức $P(x) \in R[x]$ bậc n . Giả sử $x_1, x_2, \dots, x_k$ là các nghiệm phân biệt của $P(x)$ với các bội $r_1, r_2, \dots, r_k$ tương ứng. Nếu $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ thì

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\dots(x-x_k)^{r_k}.$$

Chứng minh: Dùng định lý 9, ta suy ra $P(x)$ chia hết cho $(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\dots(x-x_k)^{r_k}$, suy ra $P(x) = (x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\dots(x-x_k)^{r_k}Q(x)$. So sánh bậc và hệ số cao nhất, ta suy ra $Q(x) = a_n$.

Định lý 9. (Định lý Vieta) Giả sử đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$ có n nghiệm (trong đó có thể có các nghiệm bội) là $x_1, x_2, \dots, x_n$ thì

$$P(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

và như hệ quả, ta có

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1}/a_n;$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n = a_{n-2}/a_n;$$

...

$$x_1x_2\dots x_n = (-1)^na_0/a_n.$$

Định lý 10. (Định lý Vieta đảo)

a) Nếu $x + y = S$, $x.y = P$ thì x, y là 2 nghiệm của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0$$

b) Nếu $x + y + z = S$, $xy + yz + zx = T$, $xyz = P$ thì x, y, z là 2 nghiệm của phương trình

$$X^3 - SX^2 + TX - P = 0$$

Từ định lý 8 ta suy ra hai hệ quả đơn giản nhưng rất hiệu quả trong giải toán sau:

Hệ quả 1. Một đa thức bậc n có không quá n nghiệm.

Hệ quả 2. Nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức bậc không quá n , trùng nhau tại $n+1$ điểm phân biệt thì hai đa thức này trùng nhau.

2.4. Bài tập có lời giải

Bài 1. Cho a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$. Lập phương trình bậc ba có nghiệm là

a) a^2, b^2, c^2 ;

b) $\frac{1-a}{1+a}, \frac{1-b}{1+b}, \frac{1-c}{1+c}$

Lời giải.

Theo định lý Vieta, ta có

$$a + b + c = 0, ab + bc + ca = -3, abc = -1.$$

Từ đó ta tính được

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 0^2 - 2(-3) = 6.$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) = (-3)^2 - 2(-1).0 = 9$$

$$a^2b^2c^2 = (abc)^2 = 1$$

Áp dụng định lý Vieta đảo, suy ra a^2, b^2, c^2 là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0.$$

Tương tự, ta tính được

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c} = \frac{(1-a)(1+b)(1+c) + (1+a)(1-b)(1+c) + (1+a)(1+b)(1-c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$= \frac{3 + a + b + c - (ab + bc + ca) - 3abc}{1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc} = \frac{9}{-3} = -3.$$

$$\frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-b}{1+b} \cdot \frac{1-c}{1+c} + \frac{1-c}{1+c} \cdot \frac{1-a}{1+a} =$$

$$= \frac{(1-a)(1-b)(1+c) + (1+a)(1-b)(1-c) + (1-a)(1+b)(1-c)}{1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc}$$

$$= \frac{3 - (a + b + c) - (ab + bc + ca) + 3abc}{1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc} = \frac{3}{-3} = -1.$$

$$\frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{1-b}{1+b} \cdot \frac{1-c}{1+c} = \frac{1 - (a + b + c) + (ab + bc + ca) - abc}{1 + a + b + c + (ab + bc + ca) + abc} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Từ đó suy ra $\frac{1-a}{1+a}, \frac{1-b}{1+b}, \frac{1-c}{1+c}$ là 3 nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - x - 1/3 = 0$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

Lời giải.

Xét đa thức

$$F(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - x^2$$

Ta có $F(a) = F(b) = F(c) = 0$. Nhưng $F(x)$ là đa thức bậc nhỏ hơn hay bằng 2. Do đó $F(x)$ phải đồng nhất 0.

Từ đó suy ra hệ số của x^2 của $F(x)$ bằng 0. Hệ số này bằng

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} - 1.$$

Suy ra $A = 1$.

Bài 3. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất thức $xP(x-1) = (x-26)P(x)$.

Lời giải. Thay $x = 0$ vào đồng nhất thức, ta suy ra $P(0) = 0$. Suy ra $P(x)$ chia hết cho x , tức là $P(x) = xP_1(x)$. Thay vào đồng nhất thức, ta được

$$x(x-1)P_1(x-1) = (x-26)xP_1(x)$$

suy ra

$$(x-1)P_1(x-1) = (x-26)P_1(x) \quad (*)$$

Lại thay $x = 1$, ta được $P_1(1) = 0$, suy ra $P_1(x)$ chia hết cho $x-1$, tức là $P_1(x) = (x-1)P_2(x)$, thay vào (*), ta được

$$(x-1)(x-2)P_2(x-1) = (x-26)(x-1)P_2(x)$$

Suy ra

$$(x-2)P_2(x-1) = (x-26)P_2(x) \dots$$

Cứ tiếp tục lý luận như thế, ta đi đến

$$P(x) = x(x-1)\dots(x-25)Q(x)$$

Và $Q(x-1) = Q(x)$.

Đặt $Q(0) = a$ thì ta có $Q(x) = a$ với $x = 1, 2, 3, \dots$ suy ra $Q(x) = a$ với mọi x .

Vậy $P(x) = ax(x-1)\dots(x-25)$ là tất cả các nghiệm của bài toán.

Bài 4. Xét phương trình $x^2 - a^{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \dots - a_1x - a_0 = 0$ với a_i là các số thực dương. Chứng minh rằng phương trình này có không quá 1 nghiệm dương.

Lời giải. Viết phương trình đã cho dưới dạng

$$1 = \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Vế trái là một hàm số giảm trên $(0, +\infty)$ nên phương trình trên có không quá 1 nghiệm dương.

Bài 5. Với giá trị nào của A và B thì đa thức $P(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ có $x = 1$ là nghiệm bội ít nhất là bậc 2?

Lời giải. Trước hết ta phải có $P(1) = 0$, tức là $A + B + 1 = 0$, suy ra $B = -A - 1$. Khi đó $P(x) = Ax^n(x-1) - x^n + 1 = (x-1)(Ax^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - 1) = (x-1)Q(x)$. Để 1 là nghiệm bội ít nhất là bậc 2 thì $Q(x)$ chia hết cho $x-1$, tức là $Q(1) = 0$, suy ra $A = n$. Vậy $a = n$, $b = -(n+1)$.

2.5. Bài tập tự giải

Bài 1. Biết rằng các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và $x^2 + cx + d = 0$ đều thuộc $(-1, 1)$. Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình $2x^2 + (a+c)x + (b+d) = 0$ cũng thuộc $(-1, 1)$.

Bài 2. Chứng minh rằng đa thức $P(x) = 1 + x + x^2/2! + \dots + x^n/n!$ không có nghiệm bội.

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

$$A = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$B = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

Bài 4. Cho $a < b < c$ là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$. Chứng minh rằng

$$a^2 - c = b^2 - a = c^2 - b = 2.$$

Bài 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases}$$

Bài 6. Tìm mối liên hệ giữa các hệ số của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ biết rằng tích của hai nghiệm của phương trình này bằng tổng của chúng.

Bài 7. Chứng minh các khẳng định dưới đây

- (a) *Định lý về nghiệm nguyên.* Cho $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ với $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ là các số nguyên và $f(p) = 0$ với p nguyên. Khi đó a_0 chia hết cho p .
- (b) *Định lý về nghiệm hữu tỷ.* Cho $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ với $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ là các số nguyên và $f(p/q) = 0$ với p/q là phân số tối giản. Khi đó a_0 chia hết cho p và a_n chia hết cho q .
- (c) Trong các ký hiệu của câu (b), với mọi số nguyên k số $f(k)$ chia hết cho $p - kq$.

Bài 8. Cho $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$. Đặt

$$M = \max\{|a_{n-1}/a_n|, |a_{n-2}/a_n|, \dots, |a_1/a_n|, |a_0/a_n|\}$$

Khi đó mọi nghiệm α của $P(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức $|\alpha| < M + 1$. Hãy chứng minh.