

Ứng dụng các khái niệm "hàng điểm điều hòa", "cực và đối cực" để giải một số bài toán hình học phẳng

Đào Huy Cường*

Ngày 25 tháng 4 năm 2012

Lời nói đầu

Hình học phẳng là một chủ đề hấp dẫn trong các kì thi học sinh giỏi. Một bài toán hình học phẳng luôn có thể được giải bằng nhiều cách khác nhau. Áp dụng các khái niệm "hàng điểm điều hòa", "cực và đối cực" vào một số bài toán sẽ cho ra lời giải ngắn gọn và đẹp mắt. Bài viết này bao gồm bốn mục : mục thứ nhất giới thiệu khái niệm hàng điểm điều hòa, mục thứ hai giới thiệu khái niệm cực và đối cực, mục thứ ba trình bày các ví dụ minh họa, và mục cuối cùng là một số bài tập rèn luyện. Bài viết hướng đến các đối tượng học sinh chuyên toán và các học sinh khá giỏi muốn tìm hiểu sâu về hình học phẳng. Bài viết mới chỉ dừng lại ở việc khai thác các hàng điểm điều hòa đơn giản và các hàng điểm điều hòa xuất hiện từ quan hệ giữa cực và đối cực đối với một đường tròn nào đó để giải các bài toán. Bài viết chưa đề cập đến các bài toán được giải bằng các hàng điểm điều hòa xuất hiện từ các "tứ giác điều hòa".

1 Hàng điểm điều hòa. Chùm điều hòa

Khi bốn điểm phân biệt A, B, C, D thẳng hàng thì ta gọi tất là hàng điểm A, B, C, D .

*Trường THPT Nguyễn Hữu Cầu - TP.HCM

Định nghĩa 1. Ta nói rằng hàng điểm A, B, C, D theo thứ tự đó có tỉ số kép là k , kí hiệu $(ABCD) = k$, nếu

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k.$$

Định nghĩa 2. Ta nói rằng hàng điểm A, B, C, D theo thứ tự đó là một hàng điểm điều hòa nếu $(ABCD) = -1$.

Từ hai định nghĩa trên, ta dễ dàng có mệnh đề sau :

Mệnh đề 1. Nếu $(ABCD) = -1$ thì

$$(ABDC) = (BACD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA) = -1$$

Ta hãy định hướng đường thẳng $ABCD$, chọn trên đó một điểm O làm gốc tọa độ và một vec-tơ đơn vị. Giả sử $\overline{OA} = a, \overline{OB} = b, \overline{OC} = c, \overline{OD} = d$. Ta có mệnh đề sau :

Mệnh đề 2. $(ABCD) = -1$ khi và chỉ khi $2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$.

Chứng minh.

$$\begin{aligned} (ABCD) = -1 &\Leftrightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \\ &\Leftrightarrow \frac{a - c}{b - c} = -\frac{a - d}{b - d} \Leftrightarrow 2(ab + cd) = (a + b)(c + d) \end{aligned}$$

□

Từ mệnh đề trên, bằng cách chọn gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có mệnh đề sau đây thường được dùng để chứng minh hàng điểm điều hòa :

Mệnh đề 3. Gọi M là trung điểm AB . Khi đó

$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}.$$

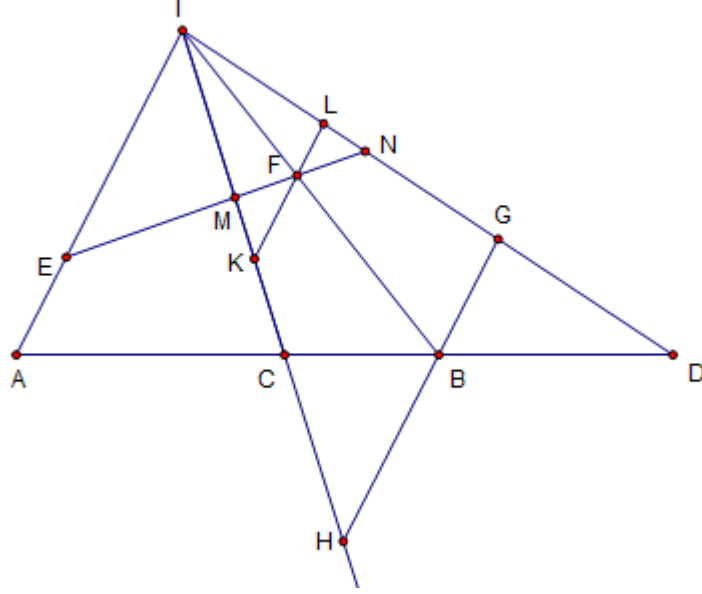
Chứng minh. Chọn gốc tọa độ O trùng với điểm M . Khi đó $a + b = 0$ và

$$(ABCD) = -1 \Leftrightarrow 2(-a^2 + cd) = 0 \Leftrightarrow a^2 = cd \Leftrightarrow MA^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$$

□

Định nghĩa 3. Cho $(ABCD) = -1$ và điểm I không thuộc đường thẳng $ABCD$. Ta nói rằng bốn đường thẳng IA, IB, IC, ID theo thứ tự đó là một chùm điều hòa.

Mệnh đề 4. Cho hàng điểm A, B, C, D và điểm I không thuộc đường thẳng $ABCD$. Một đường thẳng d cắt bốn đường thẳng IA, IB, IC, ID lần lượt tại E, F, M, N . Khi đó, $(EFMN) = (ABCD)$.



Chứng minh. Qua điểm B dựng đường thẳng HBG song song với IA cắt IC, ID lần lượt tại H, G .

Ta có $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{HB}}, \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{GB}}$.

Suy ra

$$(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{HB}}.$$

Tương tự, qua điểm F dựng đường thẳng KFL song song với IA cắt IC, ID lần lượt tại K, L .

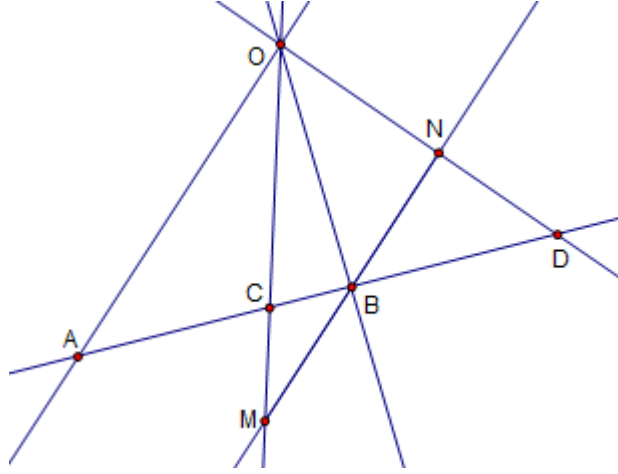
Ta có :

$$(EFMN) = \frac{\overline{LF}}{\overline{KF}}.$$

Vì HG song song với KL nên $\frac{\overline{GB}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{LF}}{\overline{KF}}$.

Do đó : $(EFMN) = (ABCD)$. □

Mệnh đề 5. Cho bốn đường thẳng Ox, Oy, Oz, Ot theo thứ tự đó là một chùm điều hòa. Giả sử đường thẳng d song song với đường thẳng Ox cắt ba đường thẳng Oy, Oz, Ot lần lượt tại B, M, N . Khi đó, B là trung điểm của MN .



Chứng minh. Qua điểm B vẽ một cát tuyến cắt Ox, Oy, Oz, Ot lần lượt tại A, C, B, D .

Vì bốn đường thẳng Ox, Oy, Oz, Ot theo thứ tự đó là một chùm điều hòa nên $(ABCD) = -1$. Theo chứng minh của mệnh đề trên thì

$$(ABCD) = \frac{\overline{MB}}{\overline{NB}}.$$

Do đó,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{NB}} = -1.$$

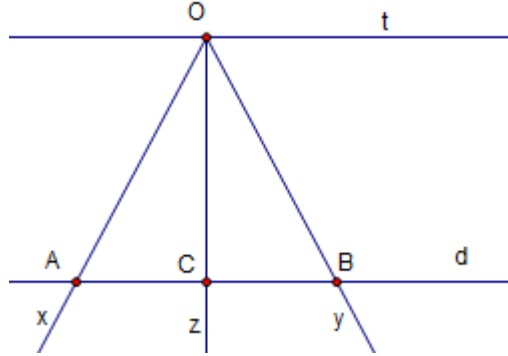
Suy ra B là trung điểm của MN . □

Từ tính chất của chân đường phân giác trong và chân đường phân giác ngoài, ta có mệnh đề sau :

Mệnh đề 6. Nếu tia Oz là tia phân giác trong của góc xOy và tia Ot là tia phân giác ngoài của góc xOy thì bốn đường thẳng Ox, Oy, Oz, Ot theo thứ tự đó là một chùm điều hòa.

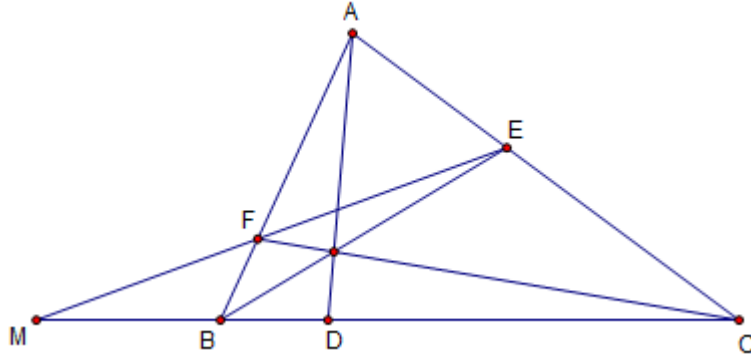
Mệnh đề sau đây rất thường dùng để giải các bài toán hình học :

Mệnh đề 7. Cho bốn đường thẳng Ox, Oy, Oz, Ot theo thứ tự đó là một chùm điều hòa. Nếu Oz vuông góc với Ot thì Oz, Ot là các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Ox, Oy .



Chứng minh. Vẽ đường thẳng d song song với đường thẳng Ot và cắt Ox , Oy , Oz lần lượt tại A, B, C . Vì bốn đường thẳng Ox, Oy, Oz, Ot theo thứ tự đó là một chùm điều hòa nên theo mệnh đề 5, C là trung điểm của AB . Suy ra, tam giác OAB là tam giác cân tại S . Từ đây, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Mệnh đề 8. Cho tam giác ABC . Lấy ba điểm D, E, F lần lượt trên ba cạnh BC, AC, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy. Giả sử đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M . Khi đó, $(MDBC) = -1$.



Chứng minh. Áp dụng định lí Menelaus ta có :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = 1.$$

Áp dụng định lí Ceva ta có :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1.$$

Suy ra

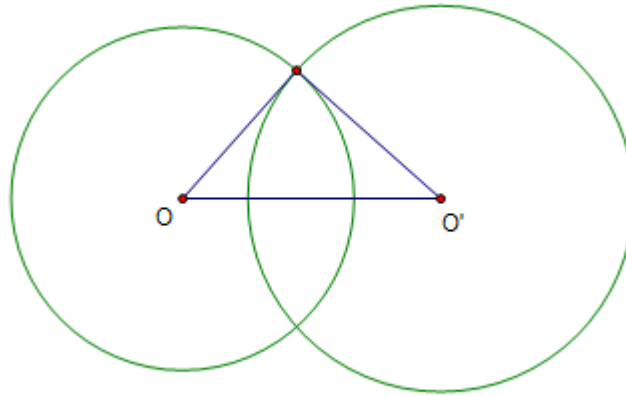
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

Do đó, $(MDBC) = -1$.

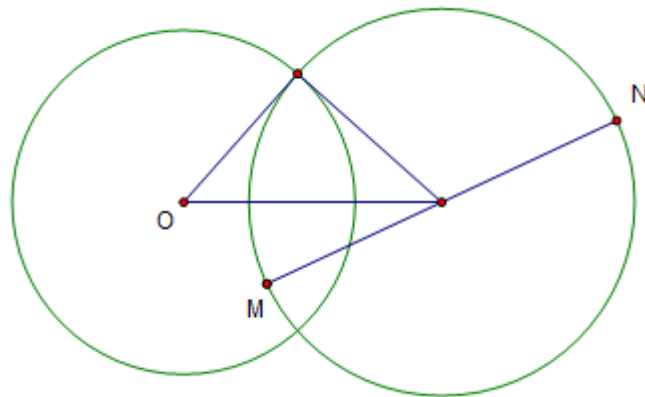
□

2 Cực và đối cực

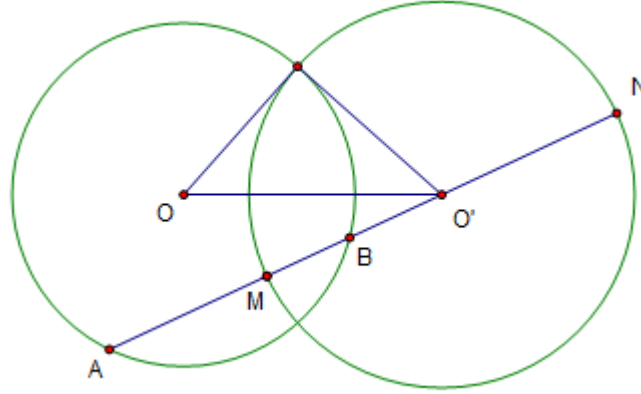
Định nghĩa 4. Ta nói hai đường tròn (O, R) và (O', R') là hai đường tròn trực giao nếu $OO'^2 = R^2 + R'^2$.



Định nghĩa 5. Ta nói hai điểm M, N liên hợp với nhau qua đường tròn (O, R) nếu đường tròn đường kính MN và đường tròn (O, R) là hai đường tròn trực giao.



Mệnh đề 9. Cho đường tròn (O, R) . Giả sử M, N là hai điểm không nằm trên đường tròn (O, R) và khác O . Đường thẳng MN cắt đường tròn (O, R) tại 2 điểm A, B . Khi đó, hai điểm M, N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O, R) khi và chỉ khi $(ABMN) = -1$.

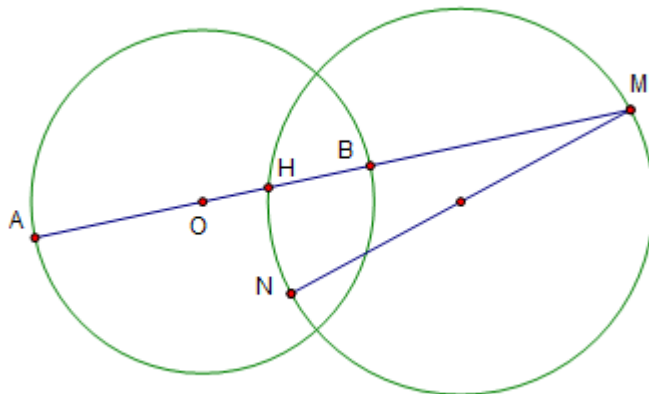


Chứng minh. Gọi O' là trung điểm MN và R' là bán kính của đường tròn đường kính MN . Khi đó
Hai điểm M, N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O) khi và chỉ khi $OO'^2 = R^2 + R'^2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow OO'^2 - R'^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{O'O \cdot O'O}{(O)} = R^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{O'A} \cdot \overline{O'B} = O'M^2 = O'N^2 \\ &\Leftrightarrow (ABMN) = -1 \end{aligned}$$

□

Mệnh đề 10. Cho đường tròn (O, R) và một điểm M khác O . Tập hợp các điểm N sao cho M và N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O, R) là một đường thẳng vuông góc với OM .



Chứng minh. Giả sử N là điểm sao cho M và N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O, R) . Khi đó, đường tròn đường kính MN và đường tròn (O, R) là hai đường tròn trực giao. Đường thẳng OM cắt đường tròn (O) tại A, B và cắt đường tròn đường kính MN tại điểm thứ hai là H . Theo mệnh đề trên ta có $(ABMH) = -1$. Vì A, B, M là các điểm cố định nên H cố định. Mặt khác, do MN là đường kính nên NH vuông góc với OM . Nói cách khác, điểm N nằm trên đường thẳng d vuông góc với OM tại H .

Ngược lại, nếu N' là một điểm bất kì trên đường thẳng d thì đường tròn đường kính MN' sẽ đi qua H . Do $(ABMH) = -1$ nên theo mệnh đề trên, đường tròn đường kính MN' và đường tròn (O) là hai đường tròn trực giao. Vậy điểm N' và M liên hợp với nhau đối với đường tròn (O) . $\square$

Định nghĩa 6. Cho đường tròn (O, R) và một điểm M khác O . Theo mệnh đề trên thì tập hợp các điểm N sao cho M và N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O, R) là một đường thẳng d_M . Ta gọi d_M là đường đối cực của điểm M đối với đường tròn (O, R) và điểm M là cực của đường thẳng d_M đối với đường tròn (O, R) .

Mệnh đề 11. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm M, N khác O . Gọi d_M, d_N lần lượt là các đường đối cực của M và N . Khi đó, M thuộc d_N khi và chỉ khi N thuộc d_M .

Chứng minh. Nếu M thuộc d_N thì M và N là hai điểm liên hợp với nhau đối với đường tròn (O) . Mặt khác, tập hợp các điểm liên hợp với điểm M là đường đối cực d_M . Vậy N phải nằm trên đường thẳng d_M . Chiều ngược lại được chứng minh tương tự. $\square$

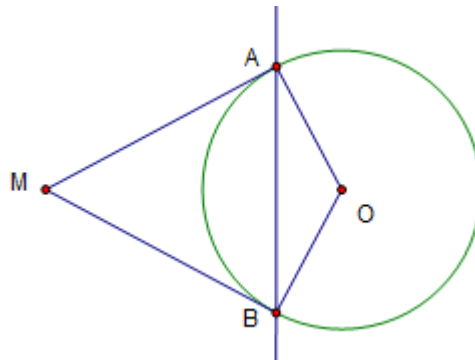
Mệnh đề 12. Cho đường tròn (O, R) và ba điểm M, N, K khác O . Gọi d_M, d_N, d_K lần lượt là các đường đối cực của M, N, K . Khi đó, M, N, K thẳng hàng khi và chỉ khi d_M, d_N, d_K đồng quy.

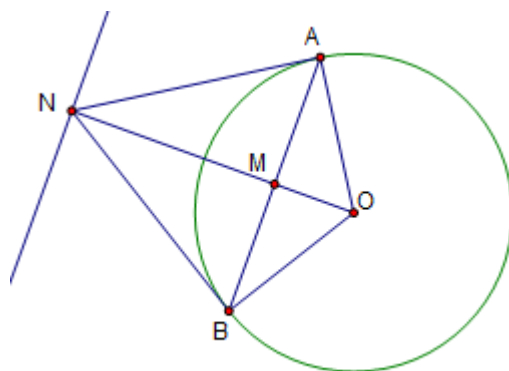
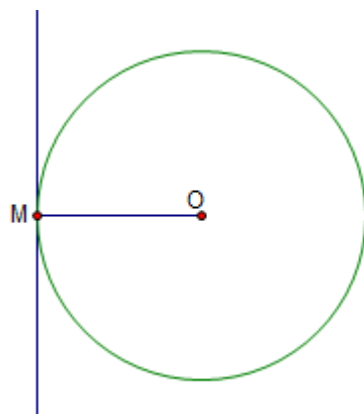
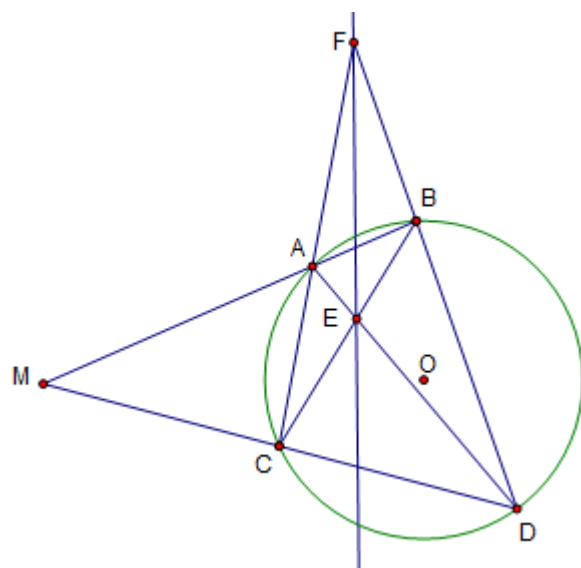
Chứng minh. Giả sử M, N, K cùng thuộc một đường thẳng d . Gọi D là cực của đường thẳng d . Theo mệnh đề trên, vì M thuộc d nên D thuộc d_M . Tương tự, D thuộc d_N , D thuộc d_K . Vậy d_M, d_N, d_K đồng quy. Chiều ngược lại được chứng minh tương tự. $\square$

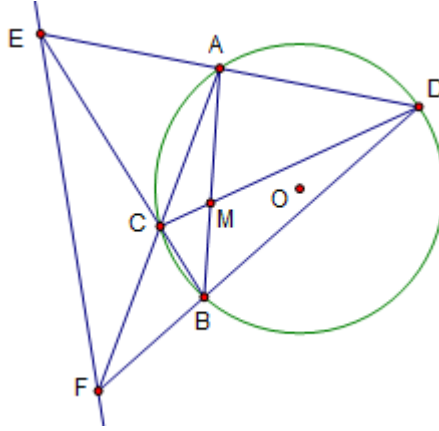
Mệnh đề sau đây mô tả cách dựng đường đối cực của một điểm :

Mệnh đề 13. Cho đường tròn (O, R) .

- Giả sử M nằm ngoài đường tròn (O) . Từ M kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB với A, B là 2 tiếp điểm. Khi đó, đường thẳng AB là đường đối cực của điểm M đối với đường tròn (O) .
- Giả sử M nằm ngoài đường tròn (O) . Từ M kẻ 2 cát tuyến MAB, MCD . Giả sử AD và BC cắt nhau tại E , AC và BD cắt nhau tại F . Khi đó, đường thẳng EF là đường đối cực của điểm M đối với đường tròn (O) .
- Giả sử M nằm trên đường tròn (O) . Khi đó, tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M là đường đối cực của điểm M đối với đường tròn (O) .
- Giả sử M nằm trong đường tròn (O) . Vẽ dây cung AB đi qua M . Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại N . Khi đó, đường thẳng đi qua N và vuông góc với OM là đường đối cực của điểm M đối với đường tròn (O) .
- Giả sử M nằm trong đường tròn (O) . Vẽ hai dây cung AB, CD đi qua M . Giả sử AD và BC cắt nhau tại E , AC và BD cắt nhau tại F . Khi đó, đường thẳng EF là đường đối cực của điểm M đối với đường tròn (O) .







Chứng minh. a) Dùng định nghĩa.

b) Áp dụng mệnh đề 8 và mệnh đề 9.

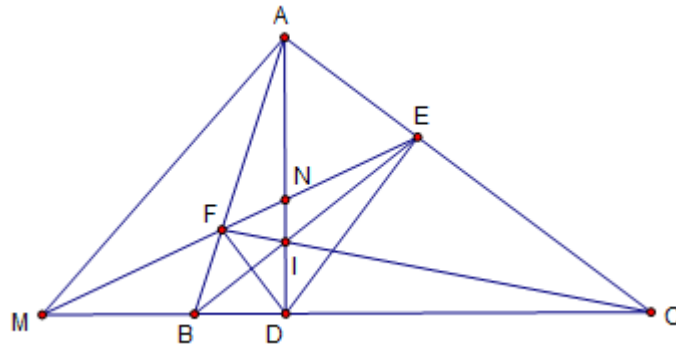
c) Dùng định nghĩa.

d) Theo a) thì M nằm trên đường đối cực của N nên N nằm trên đường đối cực của M .

e) Theo b) thì M nằm trên đường đối cực của E nên E nằm trên đường đối cực của M . Tương tự F nằm trên đường đối cực của M . $\square$

3 Các ví dụ minh họa

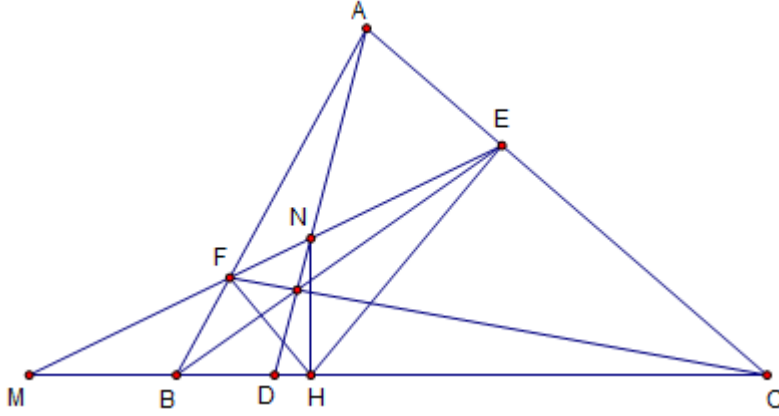
Bài toán 1. Cho tam giác ABC . Gọi D là chân đường cao kẻ từ A . Lấy điểm I trên đoạn thẳng AD . Đường thẳng BI cắt cạnh AC tại E và đường thẳng CI cắt cạnh AB tại F . Giả sử EF không song song với BC . Chứng minh rằng DA là phân giác trong của góc $\widehat{EDF}$.



Lời giải. Gọi M là giao điểm của EF và BC . Gọi N là giao điểm của EF và AD . Áp dụng mệnh đề 8 ta được $(MDBC) = -1$. Do đó, chũm

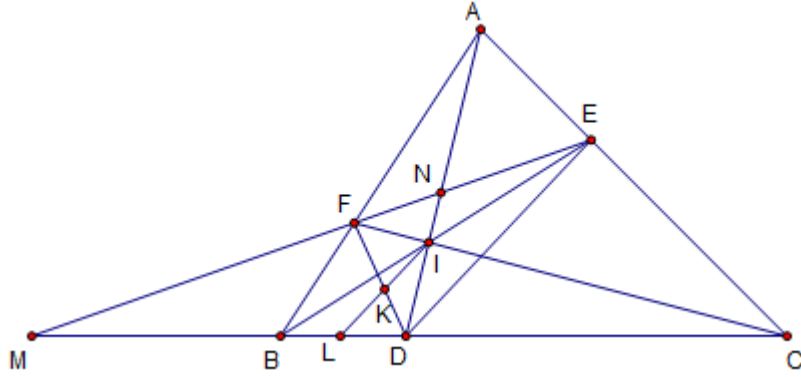
AM, AD, AB, AC là chùm điều hòa. Đường thẳng ME cắt chùm này lần lượt tại M, N, F, E nên $(MNFE) = -1$. Suy ra chùm DM, DN, DF, DE cũng là chùm điều hòa. Vì DM và DN là hai đường thẳng vuông góc nên suy ra DA là phân giác trong của góc $\widehat{EDF}$. $\square$

Bài toán 2 (Một đề thi học sinh giỏi của Iran). Cho tam giác ABC . Lấy D, E, F lần lượt thuộc các đoạn thẳng BC, CA, AB sao cho ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm. Gọi N là giao điểm của AD và EF . Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên BC . Giả sử EF không song song với BC . Chứng minh rằng NH là đường phân giác trong của góc $\widehat{EHF}$.



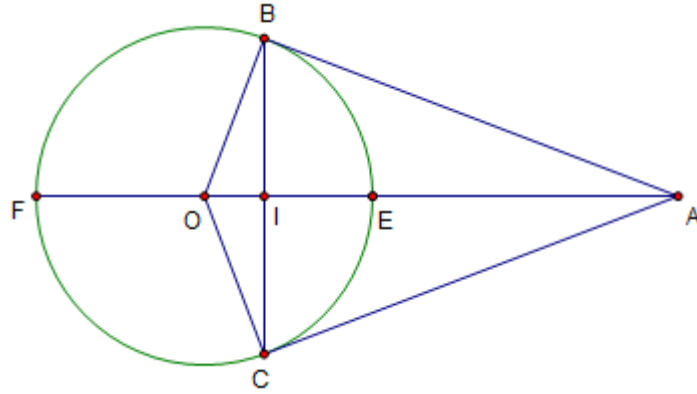
Lời giải. Gọi M là giao điểm của EF và BC . Gọi N là giao điểm của EF và AD . Tương tự bài toán 1 ta được $(MNFE) = -1$. Do đó, chùm HM, HN, HF, HE là chùm điều hòa. Vì HM và HN là hai đường thẳng vuông góc nên suy ra NH là đường phân giác trong của góc $\widehat{EHF}$. $\square$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC . Lấy D, E, F lần lượt thuộc các đoạn thẳng BC, CA, AB sao cho ba đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại điểm I . Kẻ đường thẳng d đi qua I song song với DE cắt DF, BC lần lượt tại K, L . Giả sử EF không song song với BC . Chứng minh rằng K là trung điểm của IL .



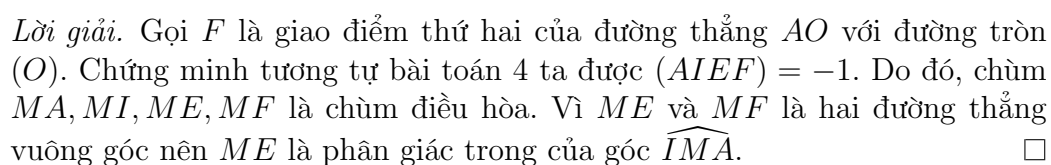
Lời giải. Gọi M là giao điểm của EF và BC . Gọi N là giao điểm của EF và AD . Tương tự bài toán 1 ta có chùm DM, DN, DF, DE là chùm điều hòa. Do đó, K là trung điểm của IL . $\square$

Bài toán 4. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC , với B, C là hai tiếp điểm. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại hai điểm E, F và cắt đường thẳng BC tại I . Chứng minh rằng $(AIEF) = -1$.

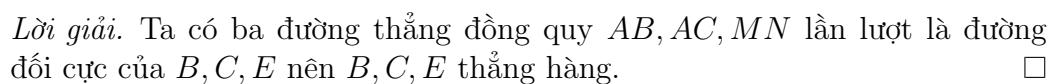


Lời giải. Ta có BC là đường đối cực của điểm A nên I và A là hai điểm liên hợp với nhau đối với đường tròn (O) . Do đó, $(AIEF) = -1$. $\square$

Bài toán 5. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC , với B, C là hai tiếp điểm. Kẻ cát tuyến AMN bất kì, trong đó N nằm giữa A và M . Đường thẳng AO cắt đoạn thẳng BC và cung nhỏ BC lần lượt tại I và E . Chứng minh rằng ME là phân giác trong của góc $\widehat{IMA}$.

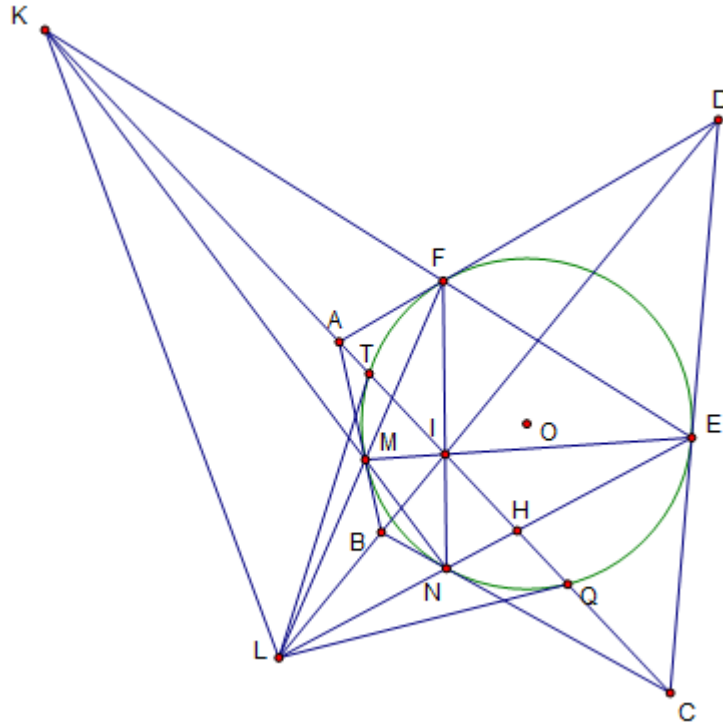


Bài toán 6. Cho một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC , với B, C là hai tiếp điểm, và một cát tuyến AMN . Giả sử hai tiếp tuyến tại M và N cắt nhau tại E . Chứng minh rằng ba điểm E, B, C thẳng hàng.



Bài toán 7. Cho đường tròn (O) nội tiếp tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn với các cạnh AB, BC, CD, DA . Gọi I là giao điểm của ME và NF . Giả sử MN và EF cắt nhau tại K , NE và MF cắt nhau tại L .

- a) Chứng minh rằng L, B, I, D thẳng hàng và $(LIBD) = -1$.
- b) Chứng minh rằng K, A, I, C thẳng hàng và $(KIAC) = -1$.
- c) Từ L kẻ hai tiếp tuyến LT, LQ với T, Q là hai tiếp điểm. Chứng minh rằng K, A, T, I, Q, C thẳng hàng.
- d) Chứng minh rằng OK vuông góc với BD , OL vuông góc với AC .



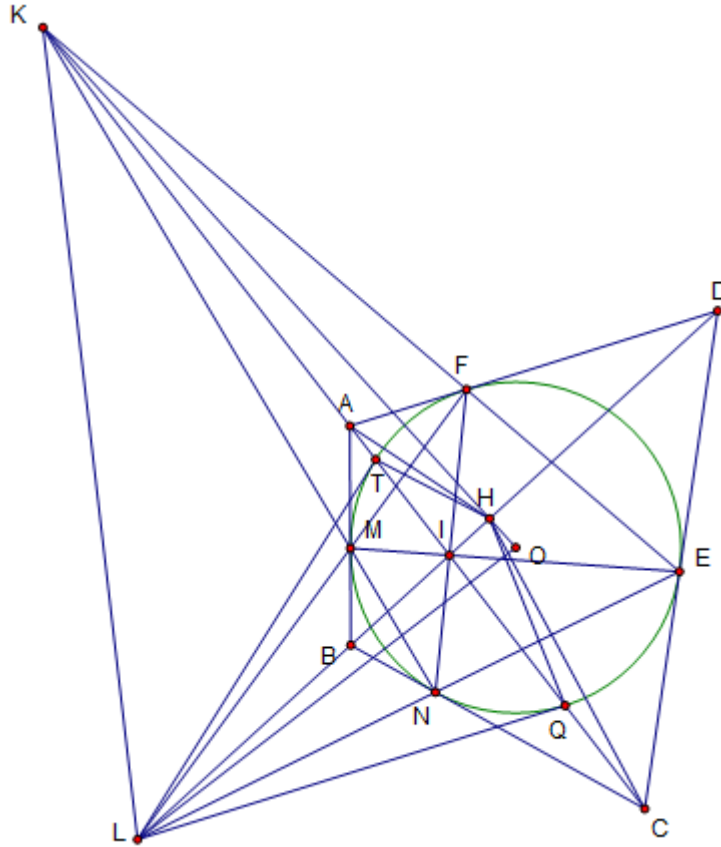
Lời giải. a) Ta có 4 đường thẳng đồng quy KI, MN, KL, EF lần lượt là đường đối cực của L, B, I, D nên 4 điểm L, B, I, D thẳng hàng. Gọi H là giao điểm của KI và NE . Vì H thuộc KI và KI là đường đối cực của L nên H và L là hai điểm liên hợp với nhau đối với đường tròn (O) , do đó $(LHNE) = -1$. Suy ra chùm CL, CH, CN, CE là chùm điều hòa. Đường thẳng BD cắt chùm này lần lượt tại L, I, B, D nên $(LIBD) = -1$.

b) Tương tự câu a).

c) Ta có đường thẳng KI và đường thẳng TQ đều là đường đối cực của điểm L nên hai đường thẳng này trùng nhau. Vậy K, A, T, I, Q, C thẳng hàng.

d) Vì IL là đường đối cực của điểm K nên OK vuông góc với IL . Suy ra OK vuông góc với BD . Tương tự, OL vuông góc với AC . $\square$

Bài toán 8 (Một bài trên tạp chí "Toán học và tuổi trẻ"). Cho đường tròn (O) nội tiếp tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn với các cạnh AB, BC, CD, DA . Giả sử MN không song song với EF , NE không song song với MF . Gọi T, Q là hai giao điểm của AC với đường tròn (O) . Kẻ OH vuông góc với BD tại H . Chứng minh rằng $\widehat{AHT} = \widehat{CHQ}$



Lời giải. Gọi I là giao điểm của ME và NF , K là giao điểm của MN và EF , L là giao điểm của MF và NE .

Từ kết quả câu c) của bài toán 7 ta suy ra LT và LQ là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Do đó, 5 điểm L, T, H, O, Q cùng thuộc đường tròn đường kính OL .

Suy ra $\widehat{IHT} = \widehat{IHQ}$ (1).

Từ kết quả câu d) của bài toán 7 ta suy ra K, H, O thẳng hàng. Do đó, HK và HI vuông góc nhau.

Từ kết quả câu b) của bài toán 7 ta có $(KIAC) = -1$.

Do đó, chùm HK, HI, HA, HC là chùm điều hòa. Vì HK và HI vuông góc

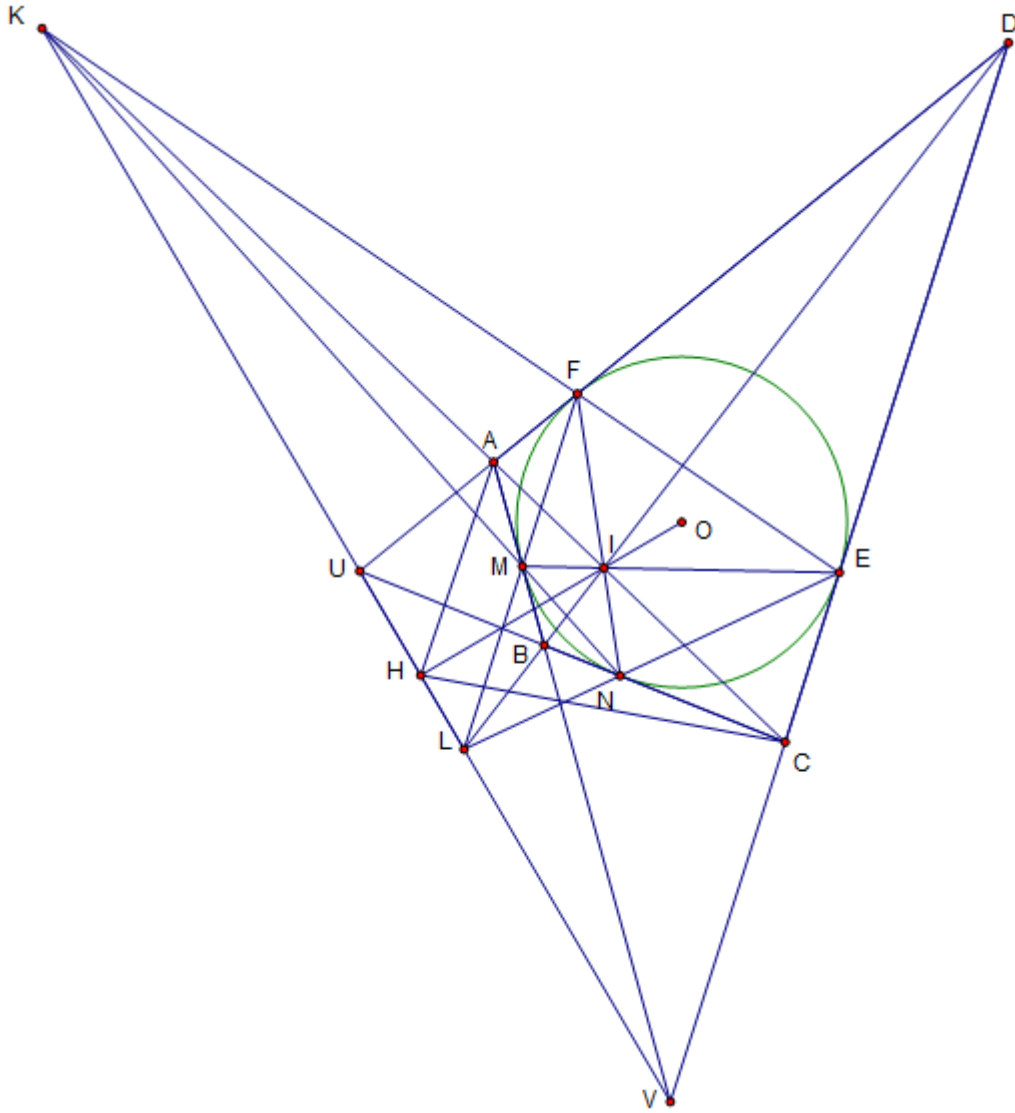
với nhau nên HI là đường phân giác trong của góc $\widehat{AHC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AHT} = \widehat{CHQ}$. □

Bài toán 9. Cho đường tròn tâm O nội tiếp tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn với các cạnh AB, BC, CD, DA . Giả sử MN và EF cắt nhau tại K , MF và NE cắt nhau tại L , AD và BC cắt nhau tại U , AB và CD cắt nhau tại V .

a) Chứng minh rằng bốn điểm K, L, U, V thẳng hàng.

b) Gọi I là giao điểm của ME và NF . Đường thẳng OI cắt đường thẳng UV tại H . Chứng minh rằng OH là phân giác trong của góc $\widehat{AHC}$.



Lời giải. a) Gọi I là giao điểm của ME và NF .

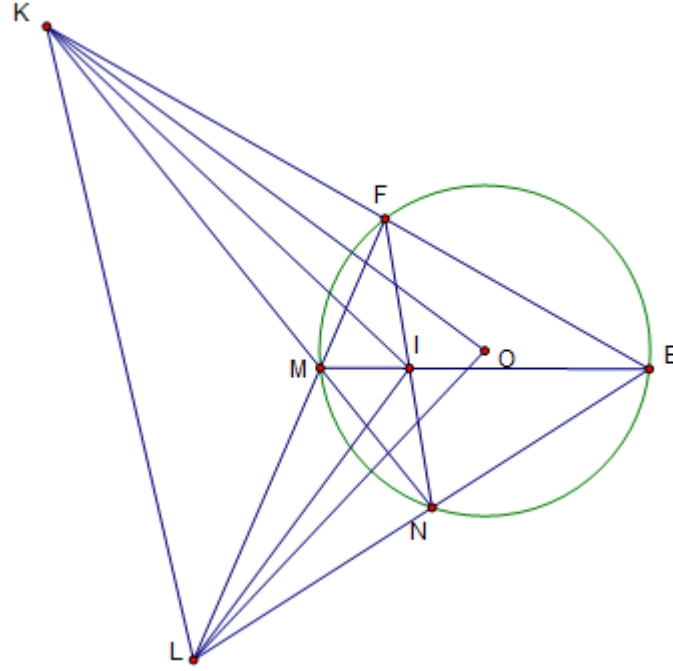
Ta có 4 đường thẳng đồng quy IL, IK, NF, ME lần lượt là đường đối cực của K, L, U, V nên K, L, U, V thẳng hàng.

b) Vì KL là đường đối cực của điểm I nên OI vuông góc với KL , do đó OH vuông góc với KL .

Theo kết quả câu b) bài toán 7 thì $(KIAC) = -1$, do đó chùm HK, HI, HA, HC là chùm điều hòa. Vì HK và HI vuông góc nên suy ra OH là phân giác trong của góc $\widehat{AHC}$. $\square$

Bài toán 10. Cho tứ giác $MNEF$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho các tiếp tuyến tại các điểm M, N, E, F đôi một cắt nhau. Giả sử MF và NE cắt nhau

tại L , MN và EF cắt nhau tại K , I là giao điểm của ME và NF . Chứng minh rằng I là trực tâm của tam giác KOL .



Lời giải. Ta có KL là đường đối cực của điểm I nên OI vuông góc KL . Tương tự, IK là đường đối cực của L nên IK vuông góc với OL . Vậy I là trực tâm của tam giác KOL . $\square$

4 Các bài tập rèn luyện

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi D và D' là chân hai đường phân giác trong và ngoài của góc A . P là giao điểm của hai tiếp tuyến của (O) tại B và C . Chứng minh rằng cực của AP đối với (O) là trung điểm DD' .

Bài toán 12. Cho điểm M nằm trong đường tròn (O) và khác O . Hai đường thẳng qua M lần lượt cắt (O) tại A, B và C, D . Các tiếp tuyến của (O) tại A và B cắt nhau ở E , các tiếp tuyến của (O) tại C và D cắt nhau tại F . Chứng minh rằng OM vuông góc với EF .

Bài toán 13. Cho đường tròn (O) đường kính AB và đường thẳng d vuông góc với AB tại I ở ngoài đường tròn. Điểm M thay đổi trên (O) , MA và MB cắt d lần lượt tại P và Q . QA cắt (O) tại N . Chứng minh rằng MN đi qua một điểm cố định.

Bài toán 14. Từ điểm P ngoài đường tròn (O) ta vẽ các tiếp tuyến PA và PB với đường tròn ấy. Từ B kẻ BD với đường kính AC tại D . Chứng minh rằng PC đi qua trung điểm BD .

Bài toán 15. Ba cạnh BC , CA , AB của tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp lần lượt tại M , N , P . Đường kính qua M cắt NP tại Q . Chứng minh rằng AQ qua trung điểm BC .

Bài toán 16. Từ trung điểm I của dây cung AB của đường tròn (O) kẻ hai dây cung MN và PQ . MP và NQ lần lượt cắt AB tại J và K . Chứng minh rằng I là trung điểm JK .

Tài liệu

- [1] Nguyễn Mộng Hy - *Các phép biến hình trong mặt phẳng* - NXBGD.
- [2] Lê Ngô Hữu Lạc Thiện - *Bài tập hình học sơ cấp* - Đại học sư phạm TPHCM 2004.
- [3] Kim Luân - *Hàng điểm điều hòa, vẻ đẹp quyến rũ trong hình học*.
- [4] Hoàng Quốc Khánh - *Khám phá ứng dụng của cực và đối cực*.
- [5] Nhóm 3 Toán 4A - *Cực và đối cực*.
- [6] Diễn đàn mathscope.org.