Chương III

PHƯƠNG PHÁP VECTƠ TRONG GIẢI TOÁN

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

NGUYỄN VIỆT HẢI *(Hải Phòng)*

Để chứng minh một đẳng thức vectơ ta thường dùng các biến đổi vectơ và sử dụng các đẳng thức vectơ cơ bản. Bài này đưa ra một phương pháp chứng minh đẳng thức vectơ khá thuận lợi trong nhiều trường hợp : Phương pháp sử dụng hình chiếu vectơ trên một trục.

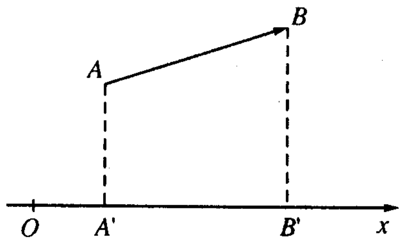
1. Hình chiếu của một vectơ trên một trục

Trên mặt phẳng cho vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ và một trục Ox. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên trục Ox (h.8). Ta gọi *hình chiếu của vectơ* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *trên trục* Ox là độ dài đại số $\overline{A'B'}$, kí hiệu là

$$\overline{A'B'} = f_x(\vec{a}) = f_x(\overrightarrow{AB}).$$

Khi chỉ chiếu trên một trục ta viết gọn là

$$\overline{A'B'} = f(\overrightarrow{AB}).$$



Hình 8

Hình chiếu của vectơ trên một trục có các tính chất sau :

1.1. $f(\vec{a}) = |\vec{a}|.\cos\varphi$, trong đó $|\vec{a}|$ là độ dài đại số của $\vec{a}$ còn φ là góc tạo bởi $\vec{a}$ và chiều dương của trục Ox.

1.2. $f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$

1.3. Với mọi $k \in \mathbb{R}$ thì $f(k\vec{a}) = k.f(\vec{a})$.

1.4. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow f_x(\vec{a}) = f_x(\vec{b})$ và $f_y(\vec{a}) = f_y(\vec{b})$ trong đó Ox và $O'y$ là hai trục không song song.

Chứng minh các tính chất 1.1, 1.2, 1.3 không khó. Ta chỉ nêu phép chứng minh 1.4.

Điều kiện cần : Hiển nhiên do áp dụng 1.1.

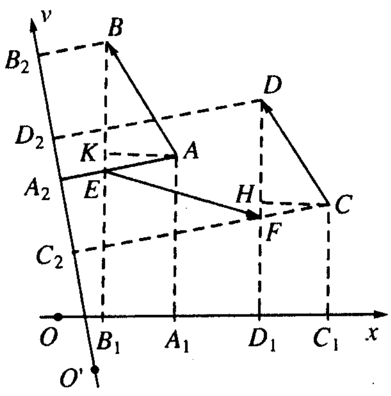
Điều kiện đủ : Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, giả sử

$$f_x(\overrightarrow{AB}) = \overline{A_1B_1}\ ;\ f_x(\overrightarrow{CD}) = \overline{C_1D_1}\ ;$$

$$f_y(\overrightarrow{AB}) = \overline{A_2B_2}\ ;\ f_y(\overrightarrow{CD}) = \overline{C_2D_2}.$$

Theo giả thiết $\overline{A_1B_1} = \overline{C_1D_1}$; $\overline{A_2B_2} = \overline{C_2D_2}$.

Gọi E là giao điểm của AA_2 và BB_1, F là giao điểm của CC_2 và DD_1 (h.9). Bằng cách xét hai tam giác vuông AEK và CFH bằng nhau ta suy ra EA // FC, $EA = FC$, nên $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CF}$.



Hình 9

Từ đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CD}$,

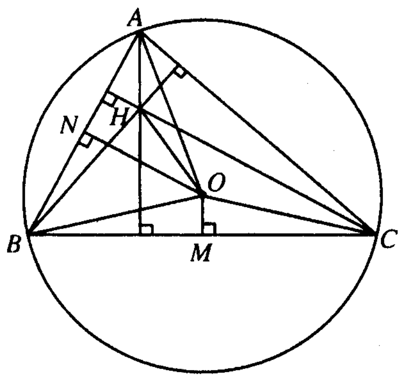
hay $\vec{a} = \vec{b}$.

2. Áp dụng

Các bài toán sau đây đều có thể giải được không cần dùng cách chiếu vectơ trên một trục. Bạn đọc có thể so sánh cách giải ở đây và các cách giải đã biết, đặc biệt hai Bài toán 3 và 4 nếu không dùng phép chiếu vectơ cách giải sẽ khó khăn hơn.

✪**Bài toán 1.** *Cho H và O theo thứ tự là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (1)$$



Hình 10

Lời giải.

• Chọn đường thẳng BC là trục theo chiều của $\overrightarrow{BC} = \vec{x}$ (h.10)

• Gọi M, N là trung điểm của BC, AB theo thứ tự. Ta có

$$f_x(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = f_x(\overrightarrow{OA}) + f_x(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$= f_x(\overrightarrow{OA}) + f_x(2\overrightarrow{OM}) = f_x(\overrightarrow{OH}) + 0$$

$$= f_x(\overrightarrow{OH})$$

• Tương tự nếu chọn AB là trục với chiều của $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ thì

$$f_v(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = f_v(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + f_v(\overrightarrow{OC})$$

$$= f_v(2\overrightarrow{ON}) + f_v(\overrightarrow{OH}) = f_v(\overrightarrow{OH}).$$

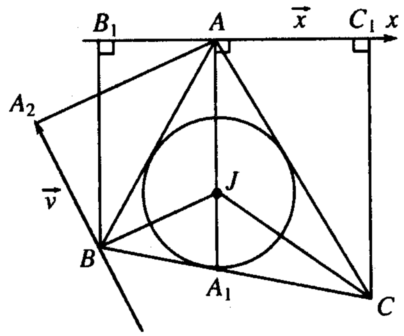
Theo tính chất 1.4 ta có đẳng thức (1). □

✪**Bài toán 2.** *Chứng minh rằng điểm J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi*

$$a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0} \qquad (2)$$

Lời giải. *Điều kiện cần*

Giả sử J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC (h.11)



Hình 11

Lấy trục là đường thẳng Ax vuông góc với JA tại A, có chiều như ở hình 11. Hạ BB_1, CC_1 vuông góc với Ax tại B_1, C_1. Đặt $\overrightarrow{AC_1} = \vec{x}$. Gọi A_1 là giao điểm của hai đường thẳng AJ và BC. Ta có

$$f_x(a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC}) = 0 + f_x(b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC})$$

$$= b\overrightarrow{AB_1} + c\overrightarrow{AC_1}$$

Ta thấy $\overrightarrow{AB_1}$ và $\overrightarrow{AC_1}$ ngược hướng mà $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c}{b}$ (theo tính chất của đường phân giác AA_1, bởi vậy

$$b\overline{AB_1} + c\overline{AC_1} = 0$$

suy ra $f_x(a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC}) = 0 = f_x(\vec{0})$. (3)

Tương tự lấy trục vuông góc với JB tại B, kẻ AA_2 vuông góc với trục đó tại A_2, đặt $\vec{v} = \overrightarrow{BA_2}$ thì

$$f_v(a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC}) = 0 = f_v(\vec{0}) \quad (4)$$

Từ (3), (4) theo tính chất 1.4 ta có đẳng thức (2).

Điều kiện đủ

Giả sử có điểm J thoả mãn (2). Gọi T là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Theo điều kiện cần, T phải thoả mãn

$$a\overrightarrow{TA} + b\overrightarrow{TB} + c\overrightarrow{TC} = \vec{0} \quad (2')$$

Từ (2) và (2') ta có

$$\vec{0} = a(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AT}) + b(\overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{BT}) + c(\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{CT})$$

$\Leftrightarrow (a+b+c)\overrightarrow{TJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{TJ} = \vec{0}$, tức là J trùng với T. ❐

✪Bài toán 3. *Gọi $(O\ ;\ R)$ và $(J\ ;\ r)$ là các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của $(J\ ;\ r)$ với BC, CA, AB. Gọi K là trọng tâm tam giác DEF. Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{3R}{r}\overrightarrow{JK} \quad (5)$$

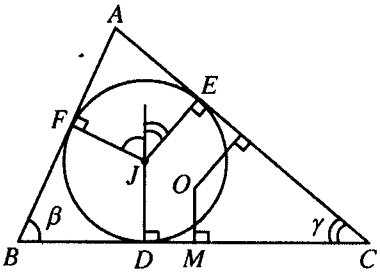
Lời giải. Để ý rằng

$$(5) \Leftrightarrow \overrightarrow{OJ} = \frac{3R}{r}.\frac{1}{3}(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JF})$$

$$= \frac{R}{r}(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JF}) \quad (6)$$

Lấy BC là trục với chiều của $\overrightarrow{BC} = \vec{x}$.

Kẻ $OM \perp BC$ tại M, gọi $\beta = \widehat{ABC}$; $\gamma = \widehat{ACB}$ (h.12)



Hình 12

Ta có

$$f_x(\overrightarrow{OJ}) = f_x(\overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{BO}) = \overline{BD} - \overline{BM}$$

$$= \frac{a+c-b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{c-b}{2}. \quad (7)$$

Mặt khác

$$f_x(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JF}) = 0 + f_x(\overrightarrow{JE}) + f_x(\overrightarrow{JF})$$

$$= r.\cos(90^\circ - \gamma) + r\cos(90^\circ + \beta).$$

(vì $\overrightarrow{JE}, \overrightarrow{JF}$ là hai vectơ có độ dài r, tạo với chiều dương của trục BC các góc tương ứng $90^\circ - \gamma$; $90^\circ + \beta$).

Sau đó áp dụng định lí sin vào tam giác ABC ta có

$$f_x(\overrightarrow{JE}) + f_x(\overrightarrow{JF}) = r(\sin\gamma - \sin\beta) = \frac{r}{2R}(c-b)$$

Từ đó và (7) có

$$f_x(\overrightarrow{OJ}) = \frac{c-b}{2} = \frac{R}{r}f_x(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JF}) \quad (8)$$

Cũng tương tự như vậy khi chọn AC là trục và đặt $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ ta cũng chứng minh được

$$f_v(\overrightarrow{OJ}) = \frac{R}{r}f_v(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JF})$$

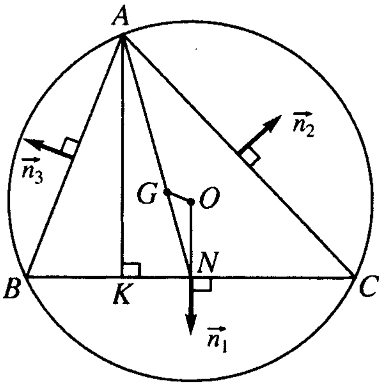
Từ đó và (8) theo tính chất 1.4 suy ra (6), do đó (5) đúng. ❐

✪Bài toán 4. *Giả sử tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Gọi G và O theo thứ tự là* *trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Đặt $S = S_{ABC}$. Gọi $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$, $\vec{n_3}$ là các vectơ đơn vị theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB, cùng chiều với các vectơ $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{JE}$, $\overrightarrow{JF}$ trong Bài toán 3.

Chứng minh rằng

$$a^3.\vec{n_1} + b^3.\vec{n_2} + c^3.\vec{n_3} = 12S.\overrightarrow{GO} \qquad (9)$$



Hình 13

Lời giải. Làm tương tự Bài toán 3, ta hạ $AK \perp BC$ tại K (h.13). Đặt $\overrightarrow{BC} = \vec{x}$. Gọi N là trung điểm của BC.

Từ $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ ta có

$$f_x(\overrightarrow{GO}) = \frac{1}{3}\left(f_x(\overrightarrow{AO}) - f_x(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$= \frac{1}{3}f_x(\overrightarrow{AO}) = \frac{1}{3}f_x(\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BA}) \text{ hay}$$

$$f_x(\overrightarrow{GO}) = \frac{1}{3}(\overline{BN} - \overline{BK}) = \frac{1}{6}(2\overline{BN} - 2\overline{BK})$$

$$= \frac{1}{6}(\overline{BC} - \overline{BK} - \overline{BK}) = \frac{1}{6}(\overline{KC} - \overline{BK})$$

$$= \frac{1}{6}.\frac{(\overline{KC} - \overline{BK})(\overline{KC} + \overline{BK})}{\overline{BC}}$$

$$= \frac{b^2 - c^2}{6a} \qquad (10)$$

(theo định lí Pythagore)

$$f_x(a^3\vec{n_1} + b^3\vec{n_2} + c^3\vec{n_3}) = f_x(b^3\vec{n_2} + c^3\vec{n_3})$$

$$= b^3\sin\gamma - c^3\sin\beta = \frac{b^3c - c^3b}{2R}$$

(xem chứng minh bài toán 3).

Do $S_{ABC} = \dfrac{abc}{4R}$ nên

$$\frac{b^3c - c^3b}{2R} = \frac{abc}{R}\frac{(b^2 - c^2)}{2a} = 4S.\left(\frac{b^2 - c^2}{2a}\right).$$

Từ đó và (10) có

$$f_x(a^3\vec{n_1} + b^3\vec{n_2} + c^3\vec{n_3})$$

$$= \frac{2S(b^2 - c^2)}{a} = 12.S.f_x(\overrightarrow{GO}) \qquad (11)$$

Hoàn toàn tương tự khi lấy AB làm trục với $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ ta cũng có

$$f_v(a^3\vec{n_1} + b^3\vec{n_2} + c^3\vec{n_3}) = 12S.f_v(\overrightarrow{GO})$$

Từ đó và (11), theo tính chất 1.4 ta suy ra điều phải chứng minh, nghĩa là (9) đúng. □

Để áp dụng phương pháp trên bạn đọc hãy tự chứng minh đẳng thức :

$$\sin2A.\overrightarrow{OB} + \sin2B.\overrightarrow{OB} + \sin2C.\overrightarrow{OC} = \vec{0} \qquad (12)$$

trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đến đây bạn đọc cũng tự thấy : Từ một đẳng thức vectơ đã biết, bằng phép chiếu trên trục thích hợp ta sẽ được các đẳng thức tương ứng. Nói cách khác, ta có thể sáng tạo ra những bài toán mới. Chẳng hạn khi ta chứng minh được (12), ta sẽ có các đẳng thức sau :

$$(b^2 - c^2)\sin2A = a^2(\sin2C - \sin2B)$$

$$(c^2 - a^2)\sin2B = b^2(\sin2A - \sin2C)$$

$$(a^2 - b^2)\sin2C = c^2(\sin2B - \sin2A)$$

TÌM THÊM NHỮNG HỆ THỨC VECTƠ TRONG TAM GIÁC

MỴ DUY THỌ *(Thanh Hoá)*

Trong các sách tham khảo về toán và trong một số đề ra trên tạp chí THTT đã cung cấp cho chúng ta một số hệ thức vectơ trong tam giác sau đây.

Cho tam giác ABC gọi G, H, O, J theo thứ tự là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó

(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

(2) $\tan A.\overrightarrow{HA}+\tan B.\overrightarrow{HB}+\tan C.\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

với ΔABC không vuông

(3). $\sin A.\overrightarrow{JA}+\sin B.\overrightarrow{JB}+\sin C.\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

(4) $\sin 2A.\overrightarrow{OA}+\sin 2B.\overrightarrow{OB}+\sin 2C.\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

Mỗi bài toán trên đã được giải theo một kiểu khác nhau.

Ta có thể đưa ra một cách chứng minh chung cho tất cả các hệ thức nêu trên trong định lí sau.

Định lí. *Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng AB và AC theo thứ tự lấy hai điểm E, F sao cho hai đường thẳng BF và CE cắt nhau ở M. Đặt* $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=p$, $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}}=q$. *Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{AM}=p\overrightarrow{MB}+q\overrightarrow{MC} \qquad (1)$$

Lời giải. Kẻ $AT \parallel BF$ và AT cắt đường thẳng CE ở T. Kẻ $AK \parallel CE$ và AK cắt đường thẳng BF ở K (h.14).

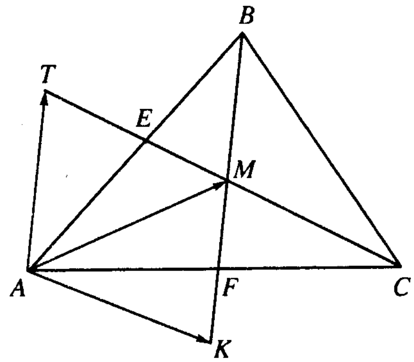
Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{AK}$.

Theo định lí Thales :

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=p \Rightarrow \overrightarrow{AT}=p\overrightarrow{MB}$$

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}=q \Rightarrow \overrightarrow{AK}=q\overrightarrow{MC}.$$

Từ đó có $\overrightarrow{AM}=p\overrightarrow{MB}+q\overrightarrow{MC}$ (đpcm) □



Hình 14

Chú ý : Khi $p+q+1=0$ thì $BF \parallel CE$.

Ta sẽ chỉ ra rằng các hệ thức vectơ nêu trên là hệ quả trực tiếp của định lí này.

1) Khi M trùng với G là trọng tâm tam giác ABC thì E, F theo thứ tự là hai trung điểm của AB và AC nên $p=q=1$, suy ra

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

2) Khi M trùng với H là trực tâm tam giác không vuông ABC thì CE, BF là hai đường cao. Xét trường hợp tam giác ABC có ba góc nhọn.

$$p=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EB}}}{\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}}=\frac{\tan\widehat{ABC}}{\tan\widehat{BAC}}$$

$$q=\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}=\frac{\tan\widehat{ACB}}{\tan\widehat{BAC}}$$

Chú ý rằng kết quả trên đúng cả khi tam giác ABC có góc tù.

Vậy $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\tan B}{\tan A}.\overrightarrow{MB}+\dfrac{\tan C}{\tan A}.\overrightarrow{MC}$ hay là

$$\tan A.\overrightarrow{MA}+\tan B.\overrightarrow{MB}+\tan C.\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

3) Khi M trùng với J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì BF và CE là hai đường phân giác trong.

Xét trường hợp tam giác ABC có ba góc nhọn.

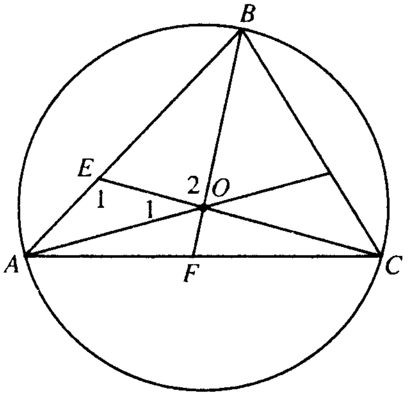
$$p = \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$q = \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\sin C}{\sin A}.$$

Chú ý rằng kết quả trên vẫn đúng khi tam giác ABC có góc tù hoặc vuông.

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{\sin B}{\sin A}.\overrightarrow{MB} + \frac{\sin C}{\sin A}.\overrightarrow{MC}$.

Hay là $\sin A.\overrightarrow{MA} + \sin B.\overrightarrow{MB} + \sin C.\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.



Hình 15

4) Giả sử M trùng với O là tâm đường tròn bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC. Kí hiệu

$$\widehat{AOE} = \widehat{O}_1,\ \widehat{BOE} = \widehat{O}_2,\ \widehat{AEO} = \widehat{E}_1 \quad \text{(h.15)}$$

Nhờ định lí sin trong các tam giác AOE và BOE ta có

$$\frac{AE}{\sin O_1} = \frac{R}{\sin E_1},\ \frac{EB}{\sin O_2} = \frac{R}{\sin(\pi - E_1)}.$$

Từ đó $\frac{AE}{EB} = \frac{\sin O_1}{\sin O_2}$.

Nhưng $\sin O_1 = \sin\widehat{AOC} = \sin 2B$ và

$\sin O_2 = \sin\widehat{BOC} = \sin 2A$, nên

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A},\ \text{tương tự}\ \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}.$$

Chú ý rằng kết quả đúng cả khi tam giác ABC có góc tù, tức là tâm O nằm ngoài tam giác.

Vậy $\overrightarrow{AO} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}.\overrightarrow{OB} + \frac{\sin 2C}{\sin 2A}.\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \sin 2A.\overrightarrow{OA} + \sin 2B.\overrightarrow{OB} + \sin 2C.\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Tiếp tục cách làm trên các bạn có thể tự tìm đến các đẳng thức sau.

(5) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, trong đó H là trực tâm tam giác ABC.

(6) Chứng minh rằng trong tam giác ABC các đường nối mỗi đỉnh với tiếp điểm của đường tròn nội tiếp trên cạnh đối diện thì đồng quy tại một điểm K và

$$\tan\frac{A}{2}.\overrightarrow{KA} + \tan\frac{B}{2}.\overrightarrow{KB} + \tan\frac{C}{2}.\overrightarrow{KC} = \vec{0}.$$

(7) Gọi O_1 là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\sin B.\overrightarrow{O_1B} + \sin C.\overrightarrow{O_1C} - \sin A.\overrightarrow{O_1A} = \vec{0}.$$

(8) Chứng minh rằng trong ΔABC các đường nối mỗi đỉnh với tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A trên cạnh đối diện hoặc phần kéo dài, đồng quy tại một điểm L và

$$\tan\frac{B}{2}.\overrightarrow{LB} + \tan\frac{C}{2}.\overrightarrow{LC} + \tan\frac{A}{2}.\overrightarrow{LA} = \vec{0}.$$

Thêm nữa xin mời các bạn hãy chứng minh các đẳng thức sau với các kí hiệu như trên :

(9) $$\frac{\cos A}{\sin B.\sin C}.\overrightarrow{OA} + \frac{\cos B}{\sin A.\sin C}.\overrightarrow{OB} + \frac{\cos C}{\sin A.\sin B}.\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

(10) $$\overrightarrow{OH} = \cot B\cot C.\overrightarrow{OA} + \cot C\cot A.\overrightarrow{OB} + \cot A\cot B.\overrightarrow{OC}$$

(11) $$3\overrightarrow{GH} = \frac{\cos(B-C)}{\sin B\sin C}.\overrightarrow{OA} + \frac{\cos(C-A)}{\sin A\sin C}.\overrightarrow{OB} + \frac{\cos(A-B)}{\sin A\sin B}.\overrightarrow{OC}$$

(12) $$2\overrightarrow{OJ} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\overrightarrow{OA} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\overrightarrow{OB} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\overrightarrow{OC}.$$

Ở đây chúng tôi chỉ mới xoay quanh một hướng để tìm đến các hệ thức. Có rất nhiều hướng khác nữa. Mong các bạn tìm thêm nhiều nữa các hệ thức vectơ trong tam giác.

TIẾP TỤC KHAI TRIỂN PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

THÍCH PHÁP MINH *(TP. Huế)*

Bài *Phương pháp vectơ* trong *Tuyển tập 5 năm Toán học và Tuổi trẻ*, NXB Giáo dục, 2003, trang 168, đã giới thiệu việc sử dụng vectơ để giải toán hình học. Sau đây tôi xin cung cấp một số phương pháp cơ bản sử dụng vectơ để giúp bạn đọc có thêm công cụ giải toán và đi từ những bài toán cơ bản.

✪Bài toán 1. (*Bài toán về trọng tâm*)

a) Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

b) Cho tứ diện ABCD, I là trung điểm AB, J là trung điểm CD, G là trung điểm IJ.

Chứng minh rằng

1) $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

2) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Xác định vị trí điểm M để

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right| \text{ bé nhất}$$

Lời giải. Bạn đọc tự chứng minh phần (a).

Xét phần (b) (h.16)

1) $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}$

Do đó

$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

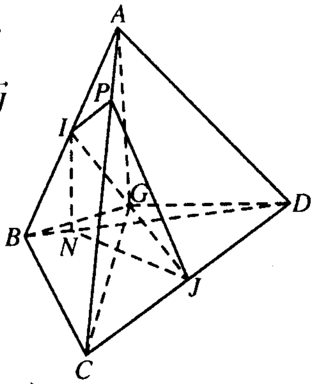
2) Ta có

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GI}$

$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GJ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

$=2(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ})=\vec{0}$.



Hình 16

Ta có

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

$=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$

Theo (2) của bài toán 1 ta có

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

Suy ra

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right| = \left|4\overrightarrow{MG}\right| = 4MG$.

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ bé nhất khi MG bé nhất, lúc đó M trùng với G. ❑

✪Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c và J là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng* $a\overrightarrow{JA}+b\overrightarrow{JB}+c\overrightarrow{JC}=\vec{0}$.

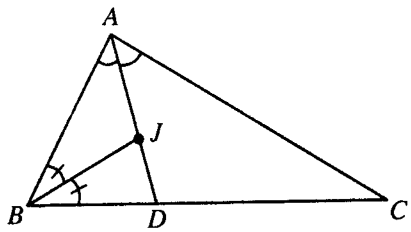
Lời giải. Gọi giao điểm của đường phân giác của góc $\widehat{BAC}$ với BC là D (h.17).

Ta có $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\dfrac{c}{b}$ (tính chất đường phân giác)

hay $\overrightarrow{DB}=-\dfrac{c}{b}.\overrightarrow{DC}$,

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{JB}-\overrightarrow{JD}=-\dfrac{c}{b}(\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{JD})$

$\Leftrightarrow \quad b\overrightarrow{JB}+c\overrightarrow{JC}=(b+c)\overrightarrow{JD}$ (1)



Hình 17

Lại có

$\overline{JD}=\dfrac{BD}{BA}.\overline{JA}$ (BJ là phân giác góc $\widehat{DBA}$).

Ta có $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{c}{b}$

$$\Rightarrow \frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{DB+DC}{c+b} = \frac{a}{c+b};$$

nên $DB = \dfrac{ac}{c+b} \Rightarrow \dfrac{DB}{BA} = \dfrac{a}{b+c}$;

vậy $\overrightarrow{JD} = -\left(\dfrac{a}{b+c}\right).\overrightarrow{JA}$.

Từ đó và (1) ta thu được $b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = -a\overrightarrow{JA}$

hay $a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (đpcm). ❐

Việc vận dụng những bài toán cơ bản trên một cách thích hợp làm phương pháp giải toán như thế nào được trình bày trong các thí dụ cụ thể sau đây.

★**Thí dụ 1.** *Cho tứ diện ABCD, I là trung điểm AB, J là trung điểm CD, P là điểm thuộc AC, N là điểm thuộc BD sao cho* $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{NB}}{\overline{ND}}$. *Chứng minh rằng bốn điểm I, J, P, N thuộc cùng một mặt phẳng.*

Lời giải. Giả sử $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BD} = h.\overrightarrow{BN}$

Từ giả thiết (h. 16)

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{ND}} \text{ suy ra } k = h$$

Theo (b1) của Bài toán 1 thì

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{AP} + k\overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BN}) = \frac{k}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IN})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IN})$$

Đẳng thức này chứng tỏ $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN}$ đồng phẳng, suy ra bốn điểm I, J, P, N thuộc cùng một mặt phẳng. ❐

★**Thí dụ 2.** *Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm M sao cho* $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ *bé nhất.*

Lời giải. Gọi I là trung điểm AB, J là trung điểm CD, G là trung điểm IJ (h.16) ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

(theo Bài toán 1). Ta có

$$MA^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}$$

Tương tự có

$$MB^2 = MG^2 + GB^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}$$

$$MC^2 = MG^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}$$

$MD^2 = MG^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GD}$, suy ra

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$$

$$= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

$$+ 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}),$$

hay

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$$

$= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$. Do đó

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$$

$$\geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng với G.

Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ bé nhất khi M trùng với G. ❐

★**Thí dụ 3.** *Cho tam giác ABC với J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Đặt a = BC, b = CA, c = AB. Chứng minh rằng*

$$\frac{JA^2}{bc} + \frac{JB^2}{ca} + \frac{JC^2}{ab} = 1$$

Lời giải. Theo Bài toán 2, (h.17) ta có

$$a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

$$(a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2JA^2 + b^2JB^2 + c^2JC^2$$

$$+ 2ab\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JB} + 2ac\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JC} + 2bc\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{JC} = 0$$

Mà $2\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JB} = JA^2 + JB^2 - AB^2$

$$2\overrightarrow{JA}.\overrightarrow{JC} = JA^2 + JC^2 - AC^2$$

$$2\overrightarrow{JB}.\overrightarrow{JC} = JB^2 + JC^2 - BC^2$$

nên

$$a^2JA^2+b^2JB^2+c^2JC^2+ab(JA^2+JB^2-AB^2)$$
$$+\ ac(JA^2+JC^2-AC^2)$$
$$+\ bc(JB^2+JC^2-BC^2)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (a^2+ab+ac)JA^2+(b^2+ab+bc)JB^2$$
$$+\ (c^2+ac+bc)JC^2-(abc^2+acb^2+bca^2)=0$$
$$\Leftrightarrow\ a(a+b+c)JA^2+b(a+b+c)JB^2$$
$$+\ c(a+b+c)JC^2-abc(a+b+c)=0$$
$$\Leftrightarrow\ (a+b+c)(aJA^2+bJB^2+cJC^2-abc)=0$$

Do $a+b\ +c>0$ nên

$$aJA^2+bJB^2+cJC^2=abc$$

hay

$$\frac{aJA^2}{abc}+\frac{bJB^2}{abc}+\frac{cJC^2}{abc}=1$$

Vậy $\frac{JA^2}{bc}+\frac{JB^2}{ac}+\frac{JC^2}{ab}=1$ (đpcm) ❐

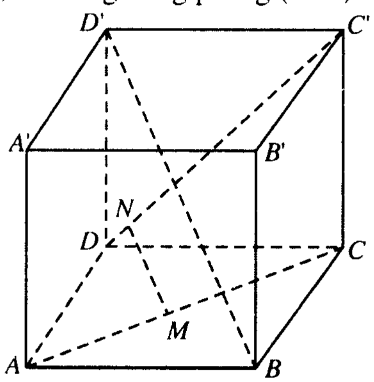
★**Thí dụ 4.** *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tìm điểm M trên AC và điểm N trên DC' sao cho MN//BD'. Tính tỉ số* $\frac{MN}{BD'}$.

Lời giải.

Do MN // BD' nên viết được $\overrightarrow{MN}=z\overrightarrow{BD'}$

Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{BB'}=\vec{c}$

với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng (h.18).



Hình 18

Ta có $\overrightarrow{BD'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Để MN // BD' thì

$$\overrightarrow{MN}=z(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) \qquad (2)$$

Mặt khác $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}$

Giả sử $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DN}=y\overrightarrow{DC'}$

• Từ $\overrightarrow{DN}=y\overrightarrow{DC'}$ ta có

$$\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BD}=y(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC'})$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{BN}-(\vec{a}+\vec{b})\ =\ y(\vec{c}-\vec{a})$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{BN}=(1-y)\vec{a}+\vec{b}+y\vec{c}$$

• Từ $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}$ ta có

$$\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=x(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\ \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{BM}-\vec{a}=x(\vec{b}-\vec{a})\ \Rightarrow\ \overrightarrow{BM}=(1-x)\vec{a}+x\vec{b}$$

Do đó

$$\overrightarrow{MN}=(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+\overrightarrow{yc} \qquad (3)$$

• Từ (2) và (3) ta có

$$(x-y)\vec{a}+(1-x)\vec{b}+\overrightarrow{yc}=z(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

Do a, b, c không đồng phẳng nên

$$\begin{cases}x-y-z=0\\1-x-z=0\\y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{1}{3}\\z=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Vậy M và N được xác định bởi

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC'}.$$

Ngoài ra $\frac{MN}{BD'}=|z|=\frac{1}{3}$ ❐

★**Thí dụ 5.** *Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng*

$$\frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3$$

Lời giải. Đặt $\frac{SB}{SM} = x$; $\frac{SD}{SN} = y$

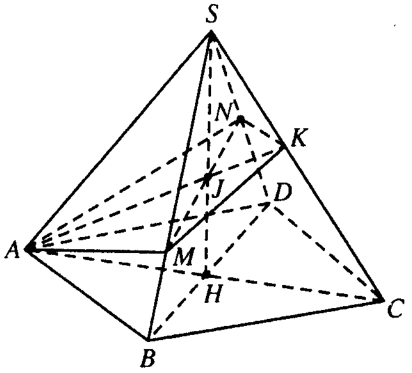
AC cắt BD tại H.

Gọi J là giao điểm của SH và AK.

Do M, J, N thẳng hàng nên

$$\overrightarrow{SJ} = \alpha.\overrightarrow{SM} + \beta.\overrightarrow{SN} \quad (1)$$

(trong đó $\alpha + \beta = 1$) (h.19).



Hình 19

Do H, K là trung điểm của AC và SC nên J là trọng tâm tam giác SAC, suy ra $SJ = \frac{2}{3}SH$.

Vậy ta có : (1) $\Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{SH} = \alpha.\frac{1}{x}\overrightarrow{SB} + \beta.\frac{1}{y}\overrightarrow{SD}$

Mà $2\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ nên

$$\frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}) = \alpha.\frac{1}{x}\overrightarrow{SB} + \beta.\frac{1}{y}\overrightarrow{SD}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{x} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SB} + \left(\frac{\beta}{y} - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SD} = \vec{0}$$

Vì $\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD}$ khác phương nên

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{3} = 0 \\ \frac{\beta}{y} - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}x \\ \beta = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

Mà $\alpha + \beta = 1$ nên $\frac{1}{3}(x+y) = 1$, suy ra $x + y = 3$.

Vậy $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$ (đpcm) ❐

Đề nghị bạn đọc tìm tòi phát hiện thêm những cách giải sử dụng vectơ ở các bài tập sau.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC với H là giao điểm ba đường cao. Tìm các số α, β, γ sao cho

$$\alpha.\overrightarrow{HA} + \beta.\overrightarrow{HB} + \gamma.\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Bài 2. Tìm tập hợp những điểm M trong mặt phẳng chứa tam giác ABC sao cho

$MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = k^2$ với k là hằng số.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc BAC. Chứng minh rằng

$$-a.\overrightarrow{JA} + b.\overrightarrow{JB} + c.\overrightarrow{JC} = \vec{0}.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC với J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng

$$\frac{JA.JB.JC}{aJA^2 + bJB^2 + cJC^2} \le \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

TÍNH CHẤT ĐẶC TRƯNG CỦA VECTƠ $\vec{0}$ VÀ ỨNG DỤNG

PHẠM CÔNG MINH *(Hải Dương)*

Trong tập hợp vectơ, có một phần tử đặc biệt là *vectơ không* $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. *Vectơ không* có độ dài bằng 0 và có hướng tuỳ ý. Muốn chứng minh vectơ $\overrightarrow{AB}$ là *vectơ không* ta chỉ cần chứng minh vectơ $\overrightarrow{AB}$ thoả mãn một trong các tính chất sau :

i) $|\overrightarrow{AB}| = 0$

ii) $\overrightarrow{AB}$ có hai hướng phân biệt.

Đó là các tính chất đặc trưng của *vectơ không*. Trong quá trình giải toán vectơ, lớp bài toán quy về chứng minh vectơ $\vec{v} = \vec{0}$ cũng khá phổ biến. Ở bài viết này tôi muốn khai thác tính chất đặc trưng của *vectơ không* để giải toán. Ta hãy bắt đầu xét một bài toán quen thuộc.

✪Bài toán 1. *Cho ngũ giác đều ABCDE có tâm O. Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}.$$

Lời giải. Đặt $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$.

Cách 1. Từ giả thiết $ABCDE$ là ngũ giác đều suy ra OA là trục đối xứng của B và E, của D và C. Do đó :

$$m\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$$

$$k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

vậy $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} =$

$$= \overrightarrow{OA}(1 + m + k).$$

Chứng minh tương tự ta cũng được

$$\vec{v} = \overrightarrow{OB}(1 + m + k).$$

Do đó $\vec{v}$ cộng tuyến với hai vectơ không cộng tuyến, nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Cách 2. Vì $ABCDE$ là ngũ giác đều, nên :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OD} \text{ (với } k < 0)$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OC}$$

Cộng từng vế của các đẳng thức trên, ta có

$$2\vec{v} = k\vec{v}$$

Để ý rằng $k < 0$ nên $\vec{v}$ có hướng ngược với chính nó. Vậy $\vec{v} = \vec{0}$.

Cách 3. Từ giả thiết $ABCDE$ là ngũ giác đều có $AB \perp OD$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OD}$

$$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OD}$$

Khi đó

$\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$

$\quad = k\overrightarrow{OD} + m\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}.(k + m + 1) = 0.$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{BC}.\vec{v} = 0$ mà $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}$ là hai vectơ không cộng tuyến nên :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{v} = 0 \\ \overrightarrow{BC}.\vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{v} \\ \overrightarrow{BC} \perp \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

Cách 4. Bây giờ ta suy nghĩ mạnh dạn hơn.

Từ giả thiết $ABCDE$ là ngũ giác đều, suy ra $OA = OB = OC = OD = OE$ nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}.\vec{v} &= OA^2 + OA^2\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \\ &+ OA^2\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) \\ &+ OA^2\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}) + OA^2\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}) \\ &= OA^2\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}\right).\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$$\overrightarrow{OB}.\vec{v} = OB^2.\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}\right).$$

Do đó $\overrightarrow{OA}.\vec{v} = \overrightarrow{OB}.\vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{v} = 0$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{v}.$$

Suy luận tương tự ta cũng có $\overrightarrow{BC} \perp \vec{v}$. Mà A, B, C không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Điều thú vị bất ngờ là ta tìm được một bài toán mới. Chẳng hạn, chứng minh rằng :

1) $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$;

2) $4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$;

3) $4\sin^2\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$;

4) $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$;

5) $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Rồi ta cũng có kết luận về các giá trị $\cos\frac{\pi}{10}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{10}$, $\cos\frac{3\pi}{10}$, ...

Cách 5. Xét phép quay Q_O^α tâm O, góc quay $\alpha=\frac{2\pi}{5}$.

Ta có $Q_O(ABCDE)=BCDEA$.

Như thế $Q_O^\alpha(\vec{v})=\vec{v}$. Vậy $\vec{v}$ có hai hướng phân biệt nên $\vec{v}=\vec{0}$.

Rõ ràng với các ý tưởng trên ta có thể mở rộng lời giải cho đa giác đều $2n+1$ cạnh. Dễ thấy tính chất như thế đúng cho đa giác đều $2n$ cạnh. Nhưng vấn đề đặt ra là : Khai thác tính chất đặc trưng của *vectơ không* để giải các dạng toán nào ? Để sáng tỏ, ta hãy theo dõi một bài toán khác.

✪Bài toán 2. *Cho tam giác ABC với O là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng*

$$a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}=\vec{0}.$$

Lời giải. Đặt $\vec{v}=a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}$

Ta có

$$\overrightarrow{OA}.\vec{v}=a.OA^2+b.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}+c.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$

$$=OA(a.OA+b.OB\cos(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})+c.OC\cos(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}))$$

$$=OA\left(a.OA+b.OB\cos\left(\pi-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)+c.OC\cos\left(\pi-\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)\right)$$

$$=OA\left(a.OA-b.OB\cos\frac{A+B}{2}-c.OC\cos\frac{A+C}{2}\right)$$

$$=OA\left(a.OA-b.OB\sin\frac{C}{2}-c.OC\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$=2R.OA\left(\sin A\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}-\sin B\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}\sin\frac{C}{2}-\sin C\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$=4R.OA.r\left(\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\right)$$

$$=4R.OA.r\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{B+C}{2}\right)=0.$$

Vậy $\overrightarrow{OA}\perp\vec{v}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{OB}\perp\vec{v}$. Nhưng O, A, B không thẳng hàng, do đó $\vec{v}=\vec{0}$. ❐

Với ý tưởng trên ta cũng giải được bài toán sau.

✪Bài toán 3. *Gọi J là tâm đường tròn bàng tiếp góc $\widehat{ACB}$ của tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$a\overrightarrow{JA}+b\overrightarrow{JB}-c\overrightarrow{JC}=\vec{0}.$$

✪Bài toán 4. *Gọi K, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của trọng tâm G của tam giác ABC trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng*

$$a^2\overrightarrow{GK}+b^2\overrightarrow{GE}+c^2\overrightarrow{GF}=\vec{0}.$$

Lời giải. Gọi AH, BM, CN là các đường cao của tam giác ABC. Áp dụng định lí Thales ta thấy

$$a^2\overrightarrow{GK}+b^2\overrightarrow{GE}+c^2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a^2\overrightarrow{AH}+b^2\overrightarrow{BM}+c^2\overrightarrow{CN}=\vec{0}.$$

Đặt $\vec{v}=a^2\overrightarrow{AH}+b^2\overrightarrow{BM}+c^2\overrightarrow{CN}$.

Ta có

$\overrightarrow{AH}.\vec{v} = \overrightarrow{AH}(a^2\overrightarrow{AH} + b^2\overrightarrow{BM} + c^2\overrightarrow{CN})$

$= AH(a^2.AH + b^2.BM\cos(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BM})$

$+ c^2.CN\cos(\overrightarrow{CN},\overrightarrow{AH}))$

$= AH.2R.2S_{ABC}(\sin A - \sin B\cos C - \sin C\cos B)$

$= AH.4R.S_{ABC}(\sin A - \sin(B+C)) = 0.$

Vậy $\overrightarrow{AH} \perp \vec{v}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{BM} \perp \vec{v}$. Nhưng A, B, M không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$. ❐

✪Bài toán 5. *Cho M là một điểm tuỳ ý trong tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$S_{MBC}.\overrightarrow{MA} + S_{MCA}.\overrightarrow{MB} + S_{MAB}.\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Lời giải. Kí hiệu các góc

$$\widehat{AMB} = M_3,\ \widehat{AMC} = M_2,\ \widehat{BMC} = M_1.$$

Đặt $\vec{v} = S_{MBC}.\overrightarrow{MA} + S_{MCA}.\overrightarrow{MB} + S_{MAB}.\overrightarrow{MC}$

Áp dụng công thức $S_{ABC} = AB.AC.\sin A$

ta có $\overrightarrow{MA}.\vec{v} = \frac{1}{2}MA^2.MB.MC\times$

$(\sin M_1 + \sin M_2\cos M_3 + \sin M_3\cos M_2)$

$= \frac{1}{2}MA^2.MB.MC(\sin M_1 + \sin(M_2 + M_3))$

$= \frac{1}{2}MA^2.MB.MC(\sin M_1 + \sin(2\pi - M_1)) = 0.$

Vậy $\overrightarrow{MA} \perp \vec{v}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\overrightarrow{MB} \perp \vec{v}$. Nhưng A, B, M không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$. ❐

Cũng bằng phương pháp này ta dễ dàng chứng minh được

$$S_{NBC}.\overrightarrow{NA} + S_{NCA}.\overrightarrow{NB} - S_{NAB}.\overrightarrow{NC} = \vec{0}$$

với N là điểm ở ngoài tam giác ABC và ở miền trong góc $\widehat{ACB}$.

✪Bài toán 6. *Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\sin 2A.\overrightarrow{OA} + \sin 2B.\overrightarrow{OB} + \sin 2C.\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Lời giải. Đặt

$$\vec{v} = \sin 2A.\overrightarrow{OA} + \sin 2B.\overrightarrow{OB} + \sin 2C.\overrightarrow{OC}$$

Ta có

$\vec{v}.\overrightarrow{OA} = R^2(\sin 2A + \sin 2B\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

$+ \sin 2C\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}))$

$= R^2(\sin 2A + \sin 2B\cos 2C + \sin 2C\cos 2B)$

$= R^2(\sin 2A + \sin(2B + 2C))$

$= R^2(\sin 2A + \sin 2(\pi - A)) = 0.$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\vec{v}.\overrightarrow{OB} = 0$.

Nhưng A, B, O không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$. ❐

Chú ý. Nếu tam giác ABC có một góc tù, bài toán vẫn đúng.

Đến đây chúng ta đã rõ, việc sử dụng các tính chất đặc trưng của *vectơ không* để chứng minh đẳng thức vectơ $\vec{v} = \vec{0}$ là cố gắng chứng minh $\vec{v}$ có hai hướng phân biệt hoặc có độ dài bằng 0. Cái khó là tạo ra tình thế để $\vec{v}$ phải lộ rõ cái tính *ba phải* của nó. Điều thú vị bất ngờ là khi cái tính *ba phải* thích chiều nào quay chiều đó của vectơ $\vec{v}$ cần được khẳng định thì cả khối lượng công việc cần chứng minh đã được giải quyết xong. Bây giờ ta hãy xem thêm một tình huống nữa.

✪Bài toán 7. *Cho tam giác ABC không vuông, H là trực tâm. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\cos A}.\overrightarrow{HA} + \frac{b}{\cos B}.\overrightarrow{HB} + \frac{c}{\cos C}.\overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Lời giải.

Đặt $\vec{v} = \frac{a}{\cos A}.\overrightarrow{HA} + \frac{b}{\cos B}.\overrightarrow{HB} + \frac{c}{\cos C}.\overrightarrow{HC}$

Bây giờ phải cố gắng chứng minh $\vec{v}$ có cái *tính ba phải*. Ta thử chọn phương án tính $\vec{v}.\overrightarrow{BC}$ (để công việc đơn giản được chăng?).

$$\vec{v}.\overrightarrow{BC} = \frac{b}{\cos B}.\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{BC} + \frac{c}{\cos C}.\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BC}$$

$$= 2R.BC\left(\frac{\sin B}{\cos B}HB\cos(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{BC})\right.$$

$$\left.+\frac{\sin C}{\cos C}.HC\cos(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{BC})\right)$$

$$= 2R.BC\left(\frac{\sin B}{\cos B}HB(-\sin C)+\frac{\sin C}{\cos C}HC\sin B\right)$$

$$= 2R.BC\sin C\sin B\left(\frac{HC}{\cos C}-\frac{HB}{\cos B}\right)$$

Vì tam giác ABC không vuông nên

$$HB = \frac{HE}{\sin\widehat{HBC}} = \frac{HE}{\cos C},$$

$$HC = \frac{HE}{\sin\widehat{HCB}} = \frac{HE}{\cos B}$$

(trong đó E là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống cạnh BC).

Do đó $\frac{HC}{\cos C} - \frac{HB}{\cos B} = 0$.

Vậy $\vec{v}.\overrightarrow{BC} = 0$. Lập luận tương tự ta cũng có kết luận $\vec{v}.\overrightarrow{AC} = 0$. Mà A, B, C không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$. □

Ta cũng vui mừng nhận ra một kết luận mới :

$$\frac{HA}{\cos A} = \frac{HB}{\cos B} = \frac{HC}{\cos C}.$$

Ta cũng có thể chứng minh $\vec{v} = \vec{0}$ bằng cách đặt vấn đề tính $\vec{v}.\overrightarrow{HA}$? Chắc là nhanh vì đã có kết luận trên. Thật vậy ta có

$$\vec{v}.\overrightarrow{HA} = HA\left(\frac{a}{\cos A}HA + \frac{b}{\cos B}HB\cos(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HA})\right.$$

$$\left.+\frac{c}{\cos C}HC\cos(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA})\right)$$

$$= HA.2R.k(\sin A - \sin B\cos C - \sin C\cos B)$$

$$= HA.2R.k(\sin A - \sin(B+C)) = 0$$

với $k = \frac{HA}{\cos A} = \frac{HB}{\cos B} = \frac{HC}{\cos C}$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $\vec{v}.\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ mà H, B, A không thẳng hàng nên $\vec{v} = \vec{0}$. □

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC

ĐINH THÀNH TRUNG *(Hà Nội)*

Trong bài này, ta sử dụng các kí hiệu quen thuộc G, H, J, O theo thứ tự là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC với ba cạnh $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Trước hết để phục vụ cho mục đích của bài này, đề nghị các bạn giải bài toán nhỏ sau.

✪Bài toán 1. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC bất kì ta có hệ thức sau*

$$a.\overrightarrow{JA} + b.\overrightarrow{JB} + c.\overrightarrow{JC} = \vec{0}.$$

Ta sẽ tính các độ dài OG, OJ, HJ, JG... thông qua a, b, c và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, sau đó so sánh các khoảng cách này.

• *Tính OG* : Xuất phát từ đẳng thức quen thuộc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, ta sẽ được

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

bình phương vô hướng hai vế rồi sử dụng hệ thức

$$2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})^2$$
$$= 2R^2 - c^2$$

và hai hệ thức tương tự ta tính được khoảng cách OG là

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} \qquad (1)$$

• Để tính *khoảng cách OJ* ta sẽ sử dụng hệ thức trong Bài toán 1. Phân tích $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JO} + \overrightarrow{OC}$ rồi nhóm lại ta được $(a+b+c)\overrightarrow{OJ} = a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB} + c.\overrightarrow{OC}$.

Tiếp tục bình phương vô hướng hai vế và sử dụng phép biến đổi ở trên suy ra

$$(a+b+c)^2 OJ^2$$
$$= R^2(a^2 + b^2 + c^2) + ab(2R^2 - c^2)$$
$$+ bc(2R^2 - a^2) + ca(2R^2 - b^2)$$

$$\Leftrightarrow OJ^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c} \qquad (2)$$

Đến đây để ý rằng với a, b, c là các số dương thì theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) \geq 9abc$$

chúng ta sẽ thu được $OG \leq OJ$. (3)

• *Khoảng cách JH* cũng có thể tính được nhờ hệ thức ở Bài toán 1 theo cách tương tự.

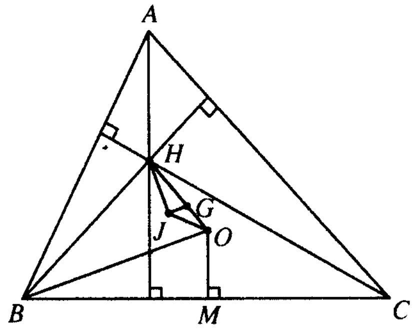
$$(a+b+c)\overrightarrow{HJ} = a.\overrightarrow{HA} + b.\overrightarrow{HB} + c.\overrightarrow{HC}$$

Bình phương vô hướng hai vế, biến đổi

$2\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB} = HA^2 + HB^2 - (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB})^2$ suy ra

$$(a+b+c)^2 HJ^2$$
$$= (a+b+c)(aHA^2 + bHB^2 + cHC^2)$$
$$-abc(a+b+c).$$

Chú ý rằng các độ dài HA, HB, HC có thể tính theo cách sau (h.20).



Hình 20

$$HA^2 = 4OM^2 = 4R^2 - a^2,$$
$$HB^2 = 4R^2 - b^2,$$
$$HC^2 = 4R^2 - c^2,$$

thay vào hệ thức ở trên ta được

$$HJ^2 = 4R^2 - \frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a+b+c} \qquad (4)$$

Từ $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ chúng ta có

$$HJ \leq 2OJ \qquad (5)$$

Đây chính là nội dung một bài toán trong kì thi chọn đổi tuyển Olympic Việt Nam năm 1993.

• Một câu hỏi đặt ra là *giữa HJ và OG có mối quan hệ như thế nào ?* Từ sự chênh lệch hệ số của R^2 giữa HJ^2 và OG^2 ta thử so sánh HJ^2 với $4OG^2$. Ta có

$$4OG^2 - HJ^2$$
$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a+b+c} - \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{9}.$$

Phải chăng ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a+b+c} \geq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{9}?$$

Khẳng định trên tương đương với

$$5(a^3 + b^3 + c^3) + 9abc$$
$$\geq 4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a).$$

Việc kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức này không phải là dễ, tuy nhiên nếu bạn bình tĩnh suy xét sẽ thấy nó chỉ là hệ quả của một bất đẳng thức quen thuộc sau mà nếu bạn chưa gặp thì có thể chứng minh lại xem như một bài tập.

✪Bài toán 2. *Chứng minh rằng với ba số thực không âm a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$a^3+b^3+c^3+3abc$$

$$\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Như vậy ta đã có được điều mong muốn

$$HJ \leq 2OG \qquad (6)$$

Từ (3) ta thấy ngay bất đẳng thức (5) chỉ là hệ quả của (6).

• Đến đây các bạn sẽ thấy còn một đại lượng ta chưa đề cập tới, đó chính là *khoảng cách JG*. Dùng hệ thức của Bài toán 1 kết hợp với công thức tính độ dài đường trung tuyến các bạn có thể tìm độ dài *JG*, ở đây tôi muốn đưa ra cách làm khác bằng việc sử dụng hệ thức Stewart cho tam giác *JOH*.

$$JH^2.OG+JO^2.HG= JG^2.OH+HG.GO.OH.$$

Ta đã biết theo định lí Euler

$OG=\frac{1}{3}OH,\ HG=\frac{2}{3}OH$, do vậy ta sẽ có

$JG^2=\frac{1}{3}JH^2+\frac{2}{3}OJ^2-2OG^2$, suy ra

$$JG^2=\frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2)-\frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{3(a+b+c)}$$

Trong tam giác ta có bất đẳng thức quen thuộc $a^2+b^2+c^2\leq 9R^2$, kết hợp với bất đẳng thức Cauchy $a^3+b^3+c^3\geq 3abc$ ta sẽ có

$$JG^2\leq 2R^2-\frac{2abc}{a+b+c}=2OJ^2 \text{ suy ra}$$

$$JG\leq\sqrt{2}OJ.$$

Để kết thúc, đề nghị các bạn hãy giải bài toán sau.

✪Bài toán 3. *Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi*

$$OH^2=5OJ^2+HJ^2.$$

Các bạn đã thấy bằng những kiến thức toán học bình thường chúng ta đã tìm được những mối quan hệ tương đối thú vị giữa các khái niệm vốn đã quen thuộc. Tất nhiên sẽ còn nhiều những tính chất như vậy, tôi mong rằng các bạn hãy tiếp tục tìm tòi, khám phá để làm giàu thêm kiến thức toán học của mình.

MỘT BẤT ĐẲNG THỨC HAY TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN THẾ PHƯƠNG *(Hà Nội)*

Sau khi đọc bài báo "*Mở rộng kết quả của Torricelli*" trong *Tuyển tập 5 năm Toán học và tuổi trẻ*, NXB Giáo dục, 2003, trang 126, tôi nhận thấy trong tam giác có một bất đẳng thức đáng chú ý sau.

Định lí. *Cho tam giác ABC và M là một điểm trong tam giác đó. Khi đó với điểm N bất kì ta có*

$$NA.\sin\widehat{BMC}+NB.\sin\widehat{CMA}+NC.\sin\widehat{AMB}$$

$$\geq MA.\sin\widehat{BMC}+MB.\sin\widehat{CMA}+MC.\sin\widehat{AMB}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi N trùng với M.

Để bạn đọc tiện theo dõi, trước khi chứng minh định lí trên, tôi xin nhắc lại kết quả cơ bản mà bài báo nêu trên đã đạt được, xem như là bổ đề.

Bổ đề. Cho tam giác *ABC* và ba số dương *x, y, z*.

a) Giả sử *x, y, z* không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó. Khi đó

1) nếu $y+z \le x$ thì $xMA+yMB+zMC$ nhỏ nhất khi M trùng A.

2) nếu $z+x \le y$ thì $xMA+yMB+zMC$ nhỏ nhất khi M trùng B.

3) nếu $x+y \le z$ thì $xMA+yMB+zMC$ nhỏ nhất khi M trùng C.

b) Giả sử x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó. Ta kí hiệu tam giác đó là $A'B'C'$ với $B'C'=x$, $C'A'=y$, $A'B'=z$. Khi đó

1) Nếu $\max\{\widehat{A}+\widehat{A'}, \widehat{B}+\widehat{B'}, \widehat{C}+\widehat{C'}\} < 180^{\circ}$ thì $xMA+yMB+zMC$ nhỏ nhất khi :

$$\begin{cases} \widehat{BMC} = 180^{\circ} - \widehat{A} \\ \widehat{CMA} = 180^{\circ} - \widehat{B} \\ \widehat{AMB} = 180^{\circ} - \widehat{C} \end{cases}$$

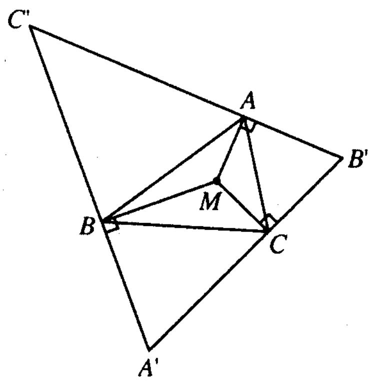
2) Nếu $\widehat{A}+\widehat{A'} \ge 180^{\circ}$ thì $xMA+yMB+zMC$ nhỏ nhất khi M trùng A.

3) Nếu $\widehat{B}+\widehat{B'} \ge 180^{\circ}$ thì $xMA+yMB+zMC$ nhỏ nhất khi M trùng B.

4) Nếu $\widehat{C}+\widehat{C'} \ge 180^{\circ}$ thì $xMA+yMB+zMC$ nhỏ nhất khi M trùng C.

Nào bây giờ chúng ta chứng minh định lí trên.

Qua A, B, C kẻ các đường thẳng $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ theo thứ tự vuông góc với AM, BM, CM và chúng cắt nhau tại C', A', B' tương ứng (h.21).



Hình 21

Ta thấy

$$\begin{cases} \widehat{BMC} = 180^{\circ} - \widehat{B'A'C'} \\ \widehat{CMA} = 180^{\circ} - \widehat{C'B'A'} \\ \widehat{AMB} = 180^{\circ} - \widehat{A'C'B'} \end{cases}$$

Vậy theo bổ đề trên thì

$$B'C'.NA + C'A'.NB + A'B'.NC$$
$$\ge B'C'.MA + C'A'.MB + A'B'.MC \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi N trùng M.

Áp dụng định lí sin cho tam giác $A'B'C'$ ta có

$$\frac{B'C'}{\sin\widehat{B'A'C'}} = \frac{C'A'}{\sin\widehat{C'B'A'}} = \frac{A'B'}{\sin\widehat{A'C'B'}}$$

Suy ra

$$\frac{B'C'}{\sin\widehat{BMC}} = \frac{C'A'}{\sin\widehat{CMA}} = \frac{A'B'}{\sin\widehat{AMB}} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$NA\sin\widehat{BMC} + NB\sin\widehat{CMA} + NC\sin\widehat{AMB}$$
$$\ge MA\sin\widehat{BMC} + MB\sin\widehat{CMA} + MC\sin\widehat{AMB}.$$

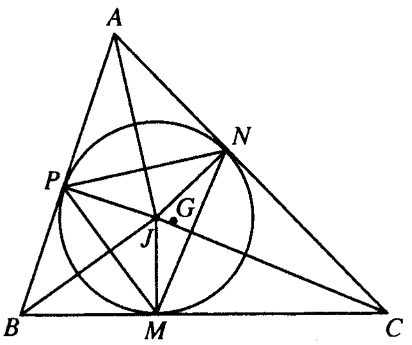
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi N trùng M. ❒

Định lí trên khá sâu sắc. Những Bài toán sau đây chứng tỏ điều đó.

✪Bài toán 1. *Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và m_a, m_b, m_c theo thứ tự là độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A, B, C. Chứng minh rằng*

$$\cos\frac{A}{2}.m_a + \cos\frac{B}{2}.m_b + \cos\frac{C}{2}.m_c \ge \frac{3}{4}(a+b+c).$$

Lời giải. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm tam giác ABC, còn M, N, P theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh BC, CA, AB (h.22).



Hình 22

Ta có

$$\begin{cases}\sin\widehat{BJC} = \sin\left(90^\circ + \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\\ \sin\widehat{CJA} = \sin\left(90^\circ + \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}\\ \sin\widehat{AJB} = \sin\left(90^\circ + \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}\end{cases}$$

Vậy theo định lí trên, ta thấy

$$GA.\cos\frac{A}{2} + GB.\cos\frac{B}{2} + GC.\cos\frac{C}{2}$$

$$\geq JA.\cos\frac{A}{2} + JB.\cos\frac{B}{2} + JC.\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(m_a\cos\frac{A}{2} + m_b\cos\frac{B}{2} + m_c\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\geq AN + BP + CM.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(m_a\cos\frac{A}{2} + m_b\cos\frac{B}{2} + m_c\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$\geq \frac{a+b+c}{2}$$

$$\Leftrightarrow m_a\cos\frac{A}{2} + m_b\cos\frac{B}{2} + m_c\cos\frac{C}{2}$$

$$\geq \frac{3}{4}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi G trùng với J, hay tam giác ABC đều. ❒

Bài toán 1 rất khó. Nó là sự mở rộng thực sự của bất đẳng thức quen biết :

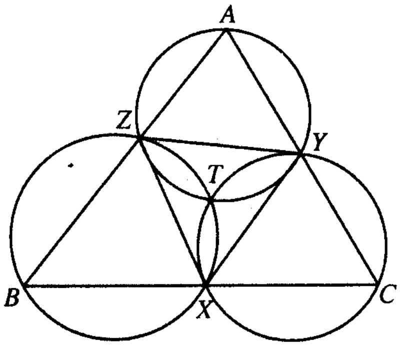
$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a+b+c).$$

✪**Bài toán 2.** *Cho tam giác nhọn ABC, các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng*

$$2(YZ.\cos A + ZX.\cos B + XY.\cos C)$$

$$\geq BC.\cos A + CA.\cos B + AB.\cos C.$$

Lời giải. Giả sử $(O_1;R_1)$, $(O_2;R_2)$, $(O_3;R_3)$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác AYZ, BZX, CXY. Dễ thấy ba đường tròn này cùng đi qua một điểm. Ta kí hiệu điểm đó là T (h.23).



Hình 23

Gọi $(O\,;\,R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nhờ định lí sin và định lí trên ta có

$$2(YZ.\cos A + ZX.\cos B + XY.\cos C)$$

$$= 4(R_1.\sin A.\cos A + R_2.\sin B.\cos B + R_3.\sin C.\cos C)$$

$$= 2(R_1.\sin 2A + R_2.\sin 2B + R_3.\sin 2C)$$

$$\geq TA.\sin 2A + TB.\sin 2B + TC.\sin 2C$$

$$= TA.\sin\widehat{BOC} + TB.\sin\widehat{COA} + TC.\sin\widehat{AOB}$$

$$\geq OA.\sin\widehat{BOC} + OB.\sin\widehat{COA} + OC.\sin\widehat{AOB}$$

$$= R.\sin 2A + R.\sin 2B + R.\sin 2C$$

$$= BC.\cos A + CA.\cos B + AB.\cos C.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}TA = 2R_1\\ TB = 2R_2\\ TC = 2R_3\\ T \equiv O\end{cases}$

hay X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. ❒

Tôi đã tìm thấy Bài toán 2 trong một tài liệu toán sơ cấp nước ngoài. Nhưng chỉ đến khi phát hiện ra định lí trên tôi mới giải được nó.

Bài toán sau đây khá quen thuộc, tuy nhiên lời giải đưa ra ở đây khác hẳn với lời giải thông thường nhờ phép đối xứng trục.

✪**Bài toán 3.** *Cho tam giác nhọn ABC. Lấy các điểm X, Y, Z theo thứ tự nằm trên các cạnh BC, CA, AB. Tìm vị trí của X, Y, Z để chu vi tam giác XYZ nhỏ nhất.*

Lời giải. Gọi $(O_1;R_1)$, $(O_2;R_2)$, $(O_3;R_3)$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác *AYZ*, *BZX*, *CXY*. Dễ thấy các đường tròn trên cùng đi qua một điểm. Ta kí hiệu điểm đó là *T* (h.23). Gọi *H* là trực tâm tam giác *ABC*. Nhờ định lí hàm số sin và định lí trên, ta có

$$XY + YZ + ZX$$

$$= 2(R_1.\sin A + R_2.\sin B + R_3.\sin C)$$

$$\geq TA.\sin A + TB.\sin B + TC.\sin C$$

$$= TA.\sin(180^\circ - \widehat{A}) + TB.\sin(180^\circ - \widehat{B})$$

$$+ TC.\sin(180^\circ - \widehat{C})$$

$$= TA.\sin\widehat{BHC} + TB.\sin\widehat{CHA} + TC.\sin\widehat{AHB}$$

$$\geq HA.\sin\widehat{BHC} + HB.\sin\widehat{CHA} + HC.\sin\widehat{AHB}$$

Dễ dàng chứng minh rằng

$$HA.\sin\widehat{BHC} + HB.\sin\widehat{CHA} + HC.\sin\widehat{AHB}$$

$$= 4R.\sin A.\sin B.\sin C$$

Vậy $XY + YZ + ZX \geq 4R\sin A.\sin B.\sin C$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} TA = 2R_1 \\ TB = 2R_2 \\ TC = 2R_3 \\ T \equiv H \end{cases}$

lúc đó *X*, *Y*, *Z* theo thứ tự là chân các đường cao hạ từ *A*, *B*, *C* của tam giác *ABC*. □

Bài toán 3 đã được giải quyết. Kết luận cụ thể xin dành cho bạn đọc.

Ngoài ba bài toán trên, nhờ định lí trên ta còn có thể giải được nhiều bài toán khác. Xin nêu ra đây một vài bài tập.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng

$$\frac{m_a}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{m_b}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{m_c}{\sin\frac{C}{2}} \geq \frac{a+b+c}{2r}.$$

Bài 2. Cho tam giác *ABC*. Chứng minh rằng

$$(b+c).a.k_a = (c+a).b.k_b + (a+b).c.k_c$$

$$\geq 4(a+b+c).S_{ABC}.$$

trong đó k_a, k_b, k_c theo thứ tự là độ dài các phân giác xuất phát từ *A*, *B*, *C* đến cạnh đối diện.

Bài 3. Cho tam giác *ABC*. Các điểm *X*, *Y*, *Z* theo thứ tự thuộc các cạnh *BC*, *CA*, *AB*. Chứng minh rằng

$$\frac{YZ}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{ZX}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{XY}{\sin\frac{C}{2}} \geq a+b+c.$$

KHAI THÁC MỘT BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

NGÔ QUANG VIỆT *(Trường THPT chuyên Quảng Bình)*

Khi nghiên cứu hình học ta thường phải xét một bài toán từ nhiều góc độ khác nhau để cố tìm ra một cái gì mới trong những cái đã biết rồi. Nếu gặp bài toán với tính khái quát cao thì khi xét những trường hợp riêng ta gặp lại một số kết quả đã biết, hoặc cả kết quả mới, nhưng chúng có những mối liên hệ với nhau, lúc đó ta có một cách nhìn các sự kiện riêng phong phú, đa dạng trong một thể thống nhất. Xin minh họa bằng các thí dụ dưới đây khi khai thác một bất đẳng thức hình học.

I. BÀI TOÁN GỐC

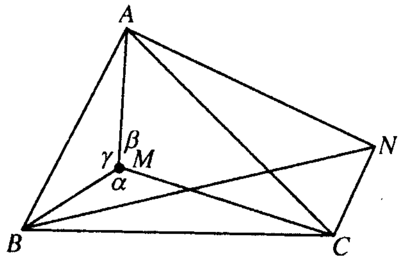
Giả sử điểm M nằm trong tam giác ABC. Đặt $\alpha = \widehat{BMC}$, $\beta = \widehat{CMA}$, $\gamma = \widehat{AMB}$. *Chứng minh rằng với điểm N bất kì (nằm trong mặt phẳng ABC) luôn có bất đẳng thức*

$NA\sin\alpha + NB\sin\beta + NC\sin\gamma$

$\geq MA\sin\alpha + MB\sin\beta + MC\sin\gamma \quad (1)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi N trùng với M.

Chứng minh (h.24).



Hình 24

Biến đổi $NA = \dfrac{NA.MA}{MA} \geq \dfrac{\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MA}}{MA}$

$= \dfrac{(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MA})\overrightarrow{MA}}{MA} = \dfrac{\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{MA}}{MA} + MA$

Tương tự đối với NB và NC, từ đó

$NA\sin\alpha + NB\sin\beta + NC\sin\gamma$

$\geq \overrightarrow{NM}\left(\dfrac{\overrightarrow{MA}}{MA}.\sin\alpha + \dfrac{\overrightarrow{MB}}{MB}.\sin\beta + \dfrac{\overrightarrow{MC}}{MC}.\sin\gamma\right)$

$+ (MA.\sin\alpha + MB.\sin\beta + MC.\sin\gamma) \quad (2)$

Vì $\dfrac{\overrightarrow{MA}}{MA}.\sin\alpha + \dfrac{\overrightarrow{MB}}{MB}.\sin\beta + \dfrac{\overrightarrow{MC}}{MC}.\sin\gamma$

$= \dfrac{2}{MA.MB.MC} \times$

$(S_{MBC}.\overrightarrow{MA} + S_{MCA}.\overrightarrow{MB} + S_{MAB}.\overrightarrow{MC}) = \vec{0} \quad (3)$

(Biểu thức vectơ trong ngoặc bằng $\vec{0}$ đã có trong nhiều tài liệu, chẳng hạn trong bài *Tính chất đặc trưng của vectơ $\vec{0}$ và ứng dụng* của chương này).

Từ (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $NA.MA = \overrightarrow{NA}.\overrightarrow{MA}$, $NB.MB = \overrightarrow{NB}.\overrightarrow{MB}$, $NC.MC = \overrightarrow{NC}.\overrightarrow{MC}$, lúc đó N trùng với M. ❐

(Chứng minh trên của TS Nguyễn Minh Hà : bài tập 5.34 trong quyển sách *Toán nâng cao Hình học 10*, tác giả : Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, NXB Giáo dục).

II. KHAI THÁC BÀI TOÁN GỐC TRONG HÌNH HỌC PHẲNG

Khi cho M (nằm trong tam giác ABC) hoặc N trùng với các điểm đặc biệt trong tam giác ABC ta được các bất đẳng thức trong các trường hợp riêng. Kí hiệu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $a + b + c = 2p$ và m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C. Gọi G, H, J, Q và R theo thứ tự là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

1) Nếu tam giác ABC có các góc đều nhỏ hơn 120^o thì tồn tại điểm T (điểm Torricelli) nằm trong tam giác mà nhìn các cạnh AB, BC, CA cùng dưới một góc 120^o. Lúc đó với điểm N bất kì từ (1) ta có

$$NA + NB + NC \geq TA + TB + TC.$$

2) Xét tam giác ABC bất kì, cho M trùng với tâm J. Lúc đó dễ thấy $\sin\alpha = \cos\dfrac{A}{2}$, $\sin\beta = \cos\dfrac{B}{2}$, $\sin\gamma = \cos\dfrac{C}{2}$ và vế phải của (1) trở thành

$$JA.\cos\frac{A}{2} + JB.\cos\frac{B}{2} + JC.\cos\frac{C}{2} = p.$$

- Khi cho N trùng với G có bất đẳng thức

$$m_a.\cos\frac{A}{2} + m_b.\cos\frac{B}{2} + m_c.\cos\frac{C}{2} \geq \frac{3p}{4}$$

- Khi cho N trùng với tâm Q có bất đẳng thức

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \geq \frac{p}{R}$$

- Khi cho N trùng với H có bất đẳng thức

$$\cos A.\cos\frac{A}{2} + \cos B.\cos\frac{B}{2} + \cos C.\cos\frac{C}{2} \geq \frac{p}{2R}$$

3) Xét tam giác ABC có ba góc nhọn, cho M trùng với trực tâm H. Lúc đó $\sin\alpha = \sin A$, $\sin\beta = \sin B$, $\sin\gamma = \sin C$ và $HA.\sin\alpha = 2R\sin A\cos A = a.\cos A$. Tương tự $HB.\sin\beta = b.\cos B$, $HC.\sin\gamma = c.\cos C$. Vế phải của (1) trở thành $a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C$. Lúc này :

• Khi cho N trùng với tâm J có bất đẳng thức

$$(b+c-a)\sin\frac{A}{2}+(a+c-b)\sin\frac{B}{2}$$
$$+\ (b+a-c)\sin\frac{C}{2}$$
$$\geq\ a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C.$$

• Khi cho N trùng với tâm Q có bất đẳng thức

$$a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C \leq p$$

• Khi cho N trùng với G có bất đẳng thức

$$2(m_a.\sin A + m_b.\sin B + m_c.\sin C)$$
$$\geq\ 3(a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C).$$

4) Xét tam giác ABC có ba góc nhọn, cho M trùng với tâm Q. Lúc đó vế phải của (1) trở thành

$$R(\sin 2A\ + \sin 2B + \sin 2C).$$

• Khi cho N trùng với G có bất đẳng thức

$$2(m_a.\sin 2A + m_b.\sin 2B + m_c.\sin 2C)$$
$$\geq\ 3R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$$

• Khi cho N trùng với tâm J có bất đẳng thức

$$(b+c-a)\cos A\sin\frac{A}{2}+(a+c-b)\cos B\sin\frac{B}{2}$$
$$+\ (a+b-c)\cos C\sin\frac{C}{2}$$
$$\geq\ \frac{R}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$$

• Khi cho N trùng với trực tâm H có bất đẳng thức

$$2(\cos A\sin 2A + \cos B\sin 2B + \cos C\sin 2C)$$
$$\geq\ \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.$$

5) Cho điểm M nằm trong tam giác ABC và điểm N bất kì. Ta có

$$S_a = S_{MBC} = \frac{MB.MC.\sin\alpha}{2}.$$

Tương tự với $S_b = S_{MCA}$, $S_c = S_{MAB}$.

Nhân theo từng vế của (1) ở bài toán gốc được bất đẳng thức

$$S_a.MA.NA+S_b.MB.NB+S_c.MC.NC$$
$$\geq\ S_a.MA^2 + S_b.MB^2 + S_c.MC^2.$$

• Khi M trùng với trọng tâm G thì

$S_a = S_b = S_c = \frac{1}{3}S_{ABC}$ nên có bất đẳng thức

$$GA.NA + GB.NB + GC.NC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$

• Khi N trùng với tâm Q có bất đẳng thức

$$R(GA + GB + GC) \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$
$$\Rightarrow 2R(m_a + m_b + m_c) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

• Khi N trùng với trực tâm H có bất đẳng thức

$$4R(m_a.\cos A + m_b.\cos B + m_c.\cos C) \geq a^2+b^2+c^2.$$

III. MỞ RỘNG BÀI TOÁN GỐC TRONG KHÔNG GIAN

Xin trình bày tóm tắt những kết quả tương tự trong không gian.

✪**Bài toán gốc.** *Giả sử điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$. Đặt $V_a = V_{MBCD}$; $V_b = V_{MACD}$; $V_c = V_{MABD}$, $V_d = V_{MABC}$. Với điểm N bất kì luôn có bất đẳng thức.*

$$V_a.MA.NA + V_b.MB.NB + V_c.MC.NC$$
$$+ V_d.MD.ND$$
$$\geq\ V_a.MA^2 + V_bMB^2\ + V_cMC^2 + V_d.MD^2.$$

Giả sử G, V, R theo thứ tự là trọng tâm, thể tích tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, từ bài toán gốc trên ta có các bất đẳng thức sau

1) $R(GA + GB + GC + GD)$
$\geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$;

2) $V_a.MA + V_b.MB + V_c.MC + V_d.MD \leq R.V.$

Việc tìm thêm một số bất đẳng thức nữa xin dành cho bạn đọc.

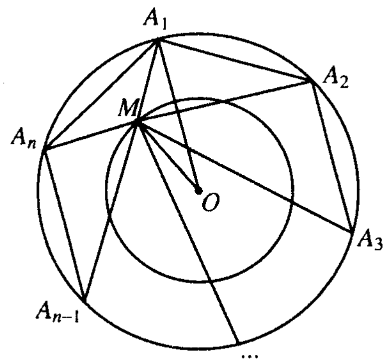
TIẾP TỤC KHAI THÁC NHỮNG TÍNH CHẤT ĐẸP CỦA ĐA GIÁC ĐỀU

NGUYỄN TIẾN THẮNG *(Hà Nội)*

Trong bài báo *Một tính chất đẹp của đa giác đều* trong *Tuyển tập 5 năm Toán học và Tuổi trẻ*, NXB Giáo dục, 2003, trang 79, đã đưa ra một tính chất rất hay của đa giác đều. Tuy nhiên, cách chứng minh để dẫn đến kết quả còn hơi dài. Sau đây, nếu sử dụng công cụ vectơ thì cách giải ngắn gọn và đơn giản hơn.

• Xét đa giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$ nội tiếp đường tròn $(O\ ;\ R)$ và M là điểm tuỳ ý trên đường tròn $(O\ ;\ r)$ thì ta có các tính chất dưới đây (h.25).

Tính chất 1. $$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i} = \vec{0}. \qquad (1)$$



Hình 25

Xem chứng minh trong bài *Tính chất đặc trưng của vectơ không và ứng dụng* ở chương này.

Ta có $$\sum_{i=1}^{n}MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA_i})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(MO^2 + OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i})$$

$$= n(R^2+r^2) + 2\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i}$$

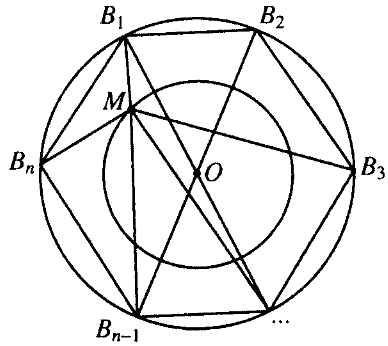
$$= n(R^2+r^2) + 2\overrightarrow{MO}.\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$$

Từ đó có :

Tính chất 2. $$\sum_{i=1}^{n}MA_i^2 = n(R^2+r^2) \qquad (2)$$

Tính chất trên chỉ có ở đa giác đều hay còn những đa giác không đều mà vẫn có tính chất này không ?

• Xét đa giác $B_1B_2...B_n$ $(n \geq 3)$ nội tiếp đường tròn $(O\ ;\ R)$ và M là điểm tuỳ ý trên đường tròn $(O\ ;\ r)$ (h.26).



Hình 26

Ta có $$\sum_{i=1}^{n}MB_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB_i})^2$$

$$= n(R^2+r^2) + 2\overrightarrow{MO}.\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OB_i}$$

$\sum_{i=1}^{n}MB_i^2$ không đổi khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MO}.\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OB_i} \text{ không đổi} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OB_i} = \vec{0}.$$

Khi đó $\sum_{i=1}^{n}MB_i^2 = n(R^2+r^2)$. Rõ ràng đa giác $B_1B_2...B_n$ (có thể không đều) chỉ cần thoả mãn điều kiện nội tiếp đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OB_i} = \vec{0}$ thì cũng có Tính chất 2 như trên.

• Chắc các bạn cũng đã từng gặp bài toán sau.

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O\,;\,R)$ và M là điểm tuỳ ý trên đường tròn $(O\,;\,r)$. Chứng minh rằng

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 = 3(R^2 + r^2)^2 + 6R^2r^2.$$

Kết quả bài toán trên làm chúng ta tin rằng đa giác đều $A_1A_2...A_n$ còn có một tính chất nữa tương tự tính chất 2.

• Xét đa giác đều $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$ nội tiếp đường tròn $(O\,;\,R)$ và M là điểm tuỳ ý trên đường tròn $(O\,;\,r)$ (h.25).

+ Lập luận như trên ta có

$$\sum_{i=1}^{n} MA_i^4 = \sum_{i=1}^{n}\left((\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})^2\right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(R^2 + r^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i})^2$$

$$= n(R^2 + r^2)^2 + 4(R^2 + r^2)\overrightarrow{MO}.\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OA_i}$$

$$+ 4\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i})^2$$

$$= n(R^2 + r^2)^2 + 4\sum_{i=1}^{n}(\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i})^2 \text{ (do có (1))}$$

$$= n(R^2 + r^2)^2 + 4R^2r^2\sum_{i=1}^{n}(-\cos\widehat{MOA_i})^2$$

hay $$\sum_{i=1}^{n} MA_i^4 = n(R^2 + r^2)^2 + 4R^2r^2\sum_{i=1}^{n}\cos^2\widehat{MOA_i} \qquad (3)$$

+ Đặt $P = \sum_{i=1}^{n}\cos^2\widehat{MOA_i}$;

$\alpha = \widehat{MOA_1}$;

$\widehat{MOA_2} = \left(\alpha + \dfrac{2\pi}{n}\right)$;

$\widehat{MOA_3} = \left(\alpha + \dfrac{4\pi}{n}\right)$;

...

$\widehat{MOA_n} = \left(\alpha + (n-1).\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

Ta có

$$P = \sum_{i=0}^{n-1}\cos^2\left(\alpha + i.\frac{2\pi}{n}\right).$$

$$\Rightarrow P = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}.\sum_{i=0}^{n-1}\cos 2\left(\alpha + i.\frac{2\pi}{n}\right). \qquad (4)$$

+ Đặt $Q = \sum_{i=0}^{n-1}\cos 2\left(\alpha + i.\dfrac{2\pi}{n}\right)$ với $n \geq 3$.

Ta có

$$2\sin\frac{2\pi}{n}.Q = \sum_{i=0}^{n-1}2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\left(2\alpha + i.\frac{4\pi}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n}(2i+1)\right) - \sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n}(2i-1)\right)\right)$$

$$= \sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{n}.(2(n-1)+1)\right) - \sin\left(2\alpha - \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= \sin\left(2\alpha + 4\pi - \frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(2\alpha - \frac{2\pi}{n}\right) = 0.$$

Vì $n > 2$ nên $Q = 0$. Thay vào (4) được

$P = \dfrac{n}{2}$. Lại thay vào (3) được

$$\sum_{i=1}^{n} MA_i^4 = n(R^2 + r^2)^2 + 2nR^2.r^2$$

Ta có định lí sau đây.

Định lí. *Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn* $(O\ ;\ R)$ và M là điểm tuỳ ý thuộc đường tròn $(O\ ;\ r)$. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} MA_i^4 = n(R^2+r^2)^2 + 2nR^2r^2 \qquad (5)$$

trong đó biểu thức ở vế phải của (5) là một hằng số, không phụ thuộc vị trí của điểm M trên đường tròn $(O\ ;\ r)$.

Tính chất trên có phải chỉ đúng cho đa giác đều không, hay còn những đa giác không đều mà vẫn có tính chất đó ?

Rất mong các bạn cùng nghiên cứu tiếp bài toán này.

BÀN VỀ MẤY BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG ĐA GIÁC

VŨ QUỐC LƯƠNG
(Trường THCS Chu Văn An, Hà Nội)

I. BA BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG TAM GIÁC VÀ MỞ RỘNG SANG ĐA GIÁC

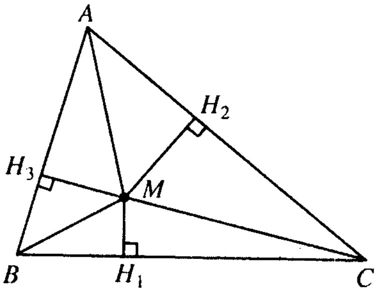
Chúng ta đã gặp ba bài toán sau (h.27).

Cho tam giác ABC. Gọi MH_1, MH_2, MH_3 là các khoảng cách từ M tới ba cạnh tam giác. Tìm điểm M thuộc miền tam giác ABC sao cho :

✪**Bài toán 1.** *Tổng $MA + MB + MC$ đạt giá trị bé nhất.*

✪**Bài toán 2.** *Tổng $MH_1 + MH_2 + MH_3$ đạt giá trị bé nhất.*

✪**Bài toán 3.** *Tổng $MH_1 + MH_2 + MH_3$ đạt giá trị lớn nhất.*



Hình 27

Bài toán 1 được gọi là bài toán Torricelli, điểm M cần tìm được gọi là điểm Torricelli. Kết quả của ba bài toán này đã được giải quyết. Cụ thể như sau :

Ở **Bài toán 1 :**

- *Nếu tam giác ABC có cả ba góc đều nhỏ hơn* 120^o *thì điểm M cần tìm là điểm nhìn ba cạnh với cùng một góc* 120^o.
- *Nếu tam giác ABC có một góc không nhỏ hơn* 120^o, *thì điểm M cần tìm là đỉnh của góc đó.*

Ở **Bài toán 2** *điểm M cần tìm trùng với đỉnh tam giác ứng với đường cao nhỏ nhất, hoặc di động trong toàn bộ miền tam giác ABC nếu tam giác đó đều.*

Ở **Bài toán 3** *điểm M cần tìm trùng với đỉnh tam giác ứng với đường cao lớn nhất, hoặc di động trong toàn bộ miền tam giác ABC nếu tam giác đó đều.*

Vấn đề đặt ra là ta cần xét xem có lời giải cho bài toán tổng quát hay không?

Ba bài toán cực trị tương ứng cho đa giác là:

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$. *Gọi* MH_i *là khoảng cách từ M tới cạnh* A_iA_{i+1} *của đa giác* (coi $A_{n+1} \equiv A_1$). *Tìm điểm M thuộc miền đa giác* $A_1A_2...A_n$ *sao cho :*

✪Bài toán 1'. (Bài toán Torricelli):

Đại lượng $\sum_{i=1}^{n} MA_i$ *đạt giá trị bé nhất.*

✪Bài toán 2'. *Đại lượng* $\sum_{i=1}^{n} MH_i$ *đạt giá trị bé nhất.*

✪Bài toán 3'. *Đại lượng* $\sum_{i=1}^{n} MH_i$ *đạt giá trị lớn nhất.*

II. NHẬN XÉT

Bài toán 1 đối với tam giác ABC có nhiều cách giải, nhưng đều không thể áp dụng vào việc giải Bài toán 1' đối với đa giác. Ta chú ý tới một tính chất sau, mà nhờ đó có thể áp dụng vào Bài toán 1' đối với đa giác tổng quát, đồng thời giải luôn được các Bài toán 2' và 3' mặc dù ta thấy rằng Bài toán 1' với Bài toán 2' và 3' không có vẻ gì liên quan với nhau.

1) Một *tính chất đẹp* của tam giác đều :

Trong một tam giác đều, tổng các khoảng cách (đoạn thẳng vuông góc) từ một điểm M bất kì tới ba cạnh tam giác là một hằng số, không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

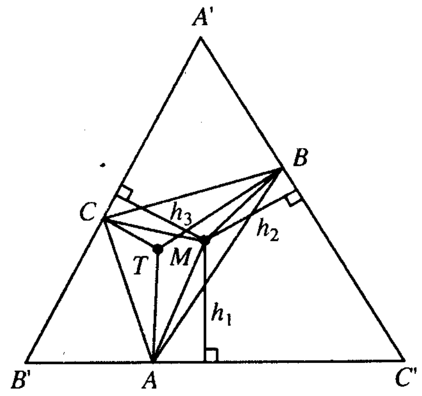
(Bạn đọc tự chứng minh).

2) Ta áp dụng tính chất trên vào giải Bài toán 1 đối với tam giác có ba góc nhỏ hơn 120^o.

Ta chứng minh mệnh đề sau :

Nếu tam giác ABC có điểm T nhìn ba cạnh của tam giác với cùng một góc 120^o *thì T chính là điểm Torricelli của tam giác đó.*

Chứng minh. Cho tam giác ABC. Qua A, B, C dựng các đường thẳng tương ứng vuông góc với TA, TB, TC. Chúng cắt nhau tại A', B', C' với A thuộc $B'C'$, B thuộc $A'C'$, C thuộc $A'B'$ (h.28).



Hình 28

Do $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{ATC} = 120^o$, nên

$$\widehat{AC'B} = \widehat{BA'C} = \widehat{CB'A} = 60^o$$

hay tam giác $A'B'C'$ đều.

Lấy M là một điểm bất kì trong tam giác ABC. Gọi h_1, h_2, h_3 theo thứ tự là các khoảng cách từ M tới ba cạnh $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ của tam giác $A'B'C'$. Rõ ràng

$$MA \geq h_1, MB \geq h_2, MC \geq h_3$$

nên $MA + MB + MC \geq h_1 + h_2 + h_3$.

Áp dụng *tính chất đẹp* cho tam giác đều $A'B'C'$, ta có

$$TA + TB + TC = h_1 + h_2 + h_3.$$

Vậy $TA + TB + TC \leq MA + MB + MC$ (đpcm). ❐

Nhận xét. Tính chất đẹp của tam giác đều còn có ở những đa giác không đều, chẳng hạn, hình bình hành cũng có *tính chất đẹp* tương tự như của tam giác đều và các đa giác đều. Ta gọi đó là những *tam giác hằng số, tứ giác hằng số, đa giác hằng số*. Muốn tìm được điều kiện cần và đủ để một đa giác lồi bất kì là *đa giác hằng số*, ta cần chính xác hóa khái niệm này và mở rộng cho cả trường hợp điểm M ở miền ngoài đa giác.

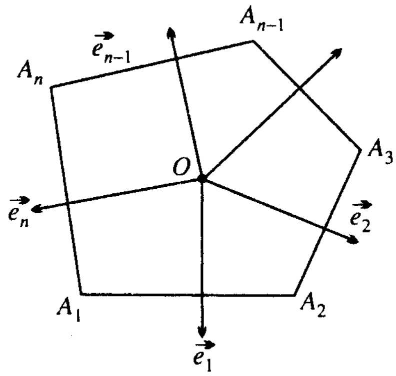
III. ĐA GIÁC HẰNG SỐ VÀ VECTƠ ĐẶC TRƯNG CỦA MỘT ĐA GIÁC

1. Định nghĩa 1.

Đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$ được gọi là một *đa giác hằng số* nếu như trong mặt phẳng chứa đa giác tổng các *khoảng cách đại số* từ một điểm M tới các cạnh của đa giác là một hằng số, không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Chú ý. Khoảng cách đại số từ M tới mỗi cạnh của đa giác được hiểu là *độ dài đại số*, khoảng cách đó là dương (hay âm) tùy theo M và đa giác ở cùng phía (hay khác phía) với đường thẳng chứa cạnh đó.

2. Định nghĩa 2 (h.29).



Hình 29

Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$. Ta gọi *hệ vectơ đơn vị của đa giác đó* là hệ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ có gốc đặt tại một điểm O tuỳ ý nằm trong đa giác, trong đó các vectơ $\vec{e}_i$ được xác định như sau :

$$\begin{cases} |\vec{e}_i| = 1 \\ (\vec{e}_i, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}) = +90^\circ, \end{cases}$$

với $i = 1, 2, ..., n$; coi A_{n+1} trùng với A_1 và chiều dương của góc định hướng ngược với chiều quay kim đồng hồ.

3. Định nghĩa 3. Ta gọi *vectơ đặc trưng* $\vec{T}$ *của đa giác lồi* $A_1A_2...A_n$ là vectơ tổng của hệ vectơ đơn vị của đa giác đó, nghĩa là $\vec{T} = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i$.

Như vậy, với một đa giác cho trước, có một hệ vectơ đơn vị (không phụ thuộc vị trí gốc O nằm trong đa giác) và một vectơ đặc trưng $\vec{T}$ duy nhất. Lúc đó khoảng cách đại số từ điểm O tới mỗi cạnh đa giác là số dương r_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

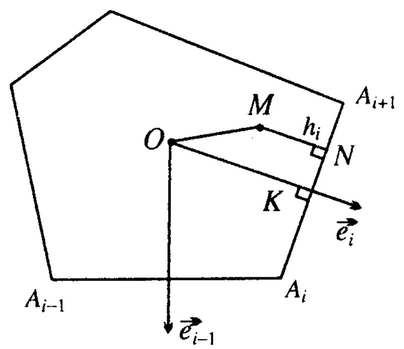
4. Định lí 1

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$ *với điểm gốc* O *tuỳ ý nằm trong đa giác và vectơ đặc trưng* $\vec{T}$. *Nếu kí hiệu* $\sum_{i=1}^{n} r_i$, $\sum_{i=1}^{n} \overline{h_i}$ *tương ứng là tổng các khoảng cách đại số từ* O *và từ một điểm* M *nào đó tới các cạnh đa giác thì*

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{h_i} = \sum_{i=1}^{n} r_i - \overrightarrow{OM}.\vec{T} \qquad (1)$$

trong đó $\overrightarrow{OM}.\vec{T}$ *là tích vô hướng của hai vectơ* $\overrightarrow{OM}$ *và* $\vec{T}$.

Chứng minh. (h.30)



Hình 30

Gọi N và K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M và O xuống cạnh A_iA_{i+1}.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KN}$.

Nhân vô hướng cả hai vế với $\vec{e}_i$, ta được

$\overline{h_i} = r_i - \overrightarrow{OM}.\vec{e}_i$. Từ đó

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{h_i} = \sum_{i=1}^{n} r_i - \overrightarrow{OM}.\vec{T} \qquad (1) \square$$

Các bạn thấy đấy: Nếu các bạn học tập một cách chủ động, sáng tạo và biết *ngạc nhiên* trước một lời giải thì bạn có thể tìm ra biết bao điều hay và thú vị. Nếu bạn đọc kĩ bài này thì bạn có thể giải được bốn bài toán tổng quát sau đây:

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) và bộ số α_i ($i = 1, 2, ..., n$). Tìm điểm M ở miền đa giác sao cho một trong các điều sau xảy ra :

1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MA_i$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MH_i$ *đạt giá trị nhỏ nhất trong đó* MH_i *(với $i = 1,2, ..., n$) là khoảng cách từ M tới các cạnh đa giác.*

3) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MH_i$ *đạt giá trị lớn nhất.*

4) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.MH_i$ *là một hằng số cho trước.*

Chúc các bạn thành công.

KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC TRỌNG TÂM CỦA HAI HỆ ĐIỂM

NGUYỄN VĂN LỘC
(ĐHSP TP. Hồ Chí Minh)

Trong sách giáo khoa Hình học 10 có công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác ABC như sau

$$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$$

trong đó $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và m là độ dài trung tuyến xuất phát từ đỉnh A. Từ đó

$$m^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2 \qquad (1)$$

Sau đó có bài toán áp dụng : "Chứng minh rằng : Trong hình tứ giác, tổng các bình phương của bốn cạnh bằng tổng các bình phương của hai đường chéo, cộng thêm bốn lần bình phương khoảng cách hai trung điểm của hai đường chéo".

Nói cách khác gọi M, N tương ứng là trung điểm hai đường chéo AC và BD của tứ giác $ABCD$ thì

$$MN^2 = \frac{1}{4}\Big(AB^2 + BC^2 + DA^2 + DC^2 - (AC^2 + BD^2)\Big) \qquad (2)$$

Chú ý rằng trọng tâm của một điểm là chính nó, trọng tâm hệ hai điểm là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó, thì công thức (1) biểu thị bình phương khoảng cách từ trọng tâm một điểm đến trọng tâm của hệ hai điểm, còn công thức (2) biểu thị bình phương khoảng cách giữa các trọng tâm của hai hệ hai điểm. Như vậy ta có thể đặt vấn đề tìm công thức tổng quát của các công thức (1) và (2).

I. TRỌNG TÂM CỦA MỘT HỆ ĐIỂM

Định nghĩa. Xét hệ m điểm sắp xếp tuỳ ý trong không gian không phân biệt thứ tự $\{A_1, A_2, ... A_m\}$. Ta gọi *trọng tâm của hệ điểm trên* là điểm G thoả mãn hệ thức :

$$\sum_{i=1}^{m} \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \qquad (3)$$

Dễ dàng chứng minh được (bằng phản chứng) rằng trọng tâm G của hệ m điểm là *xác định duy nhất.*

Hệ quả. *Nếu G là trọng tâm của hệ m điểm* $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ *và M là điểm bất kì thì*

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overrightarrow{MA_i} \qquad (4)$$

Định lí. *Giả sử* O_1 *là trọng tâm của hệ điểm* $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ *và* O_2 *là trọng tâm của hệ điểm* $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$. *Khi đó trọng tâm G của hệ tất cả m + n điểm* $A_1, ..., A_m$, $B_1, ..., B_n$ *nằm trên đoạn* O_1O_2 *và thoả mãn điều kiện* $\frac{GO_1}{GO_2} = \frac{n}{m}$

Chứng minh. Với điểm G thuộc đoạn O_1O_2 thoả mãn điều kiện $\frac{GO_1}{GO_2} = \frac{n}{m}$ thì ta có

$$m\overrightarrow{GO_1} + n\overrightarrow{GO_2} = \vec{0} \qquad (5)$$

Do O_1 là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, ..., A_m\}$ nên theo (4) có

$$\sum_{i=1}^{m}\overrightarrow{GA_i} - m\overrightarrow{GO_1} = \vec{0} \qquad (6)$$

Tương tự, O_2 là trọng tâm của hệ điểm $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ ta cũng có

$$\sum_{j=1}^{n}\overrightarrow{GB_j} - n\overrightarrow{GO_2} = \vec{0} \qquad (7)$$

Từ các hệ thức (6), (7) và (5) ta nhận được

$$\sum_{i=1}^{m}\overrightarrow{GA_i} + \sum_{j=1}^{n}\overrightarrow{GB_j} = \vec{0}.$$

Đẳng thức này chứng tỏ G là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_n\}$ đã cho.

Các trường hợp riêng

1) Với $m = n = 1$ thì trọng tâm của hệ hai điểm trùng với trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

2) Với $m = 2$, $n = 1$ thì trọng tâm của hệ ba điểm $\{A_1, A_2, A_3\}$ trùng với trọng tâm tam giác $A_1A_2A_3$ như chúng ta đã biết.

3) Với $m = 3$, $n = 1$. Trong không gian ta có : Các đoạn thẳng nối mỗi đỉnh của tứ diện với trọng tâm của mặt đối diện cắt nhau tại điểm G là *trọng tâm của tứ diện* và điểm G chia mỗi đường theo tỉ số 3 : 1 kể từ đỉnh. Đi qua G còn có ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện, thêm vào đó G là trung điểm của mỗi đoạn thẳng này.

4) Với m và $n = 1$, bằng chứng minh quy nạp ta suy ra sự tồn tại của trọng tâm của hệ điểm.

II. CÔNG THỨC LAGRANGE – JACOBI

Giả sử G là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ và M là điểm tuỳ ý, khi đó ta có công thức (4). Khi bình phương vô hướng công thức (4), ta nhận được

$$MG^2 = \frac{1}{m^2}\left(\sum_{j=1}^{m}MA_j^2 + 2\sum_{1\le i<j\le m}\overrightarrow{MA_i}.\overrightarrow{MA_j}\right) \qquad (8)$$

Bởi vì

$$2\overrightarrow{MA_i}.\overrightarrow{MA_j} = \overrightarrow{MA_i}^2 + \overrightarrow{MA_j}^2 - (\overrightarrow{MA_j} - \overrightarrow{MA_i})^2$$
$$= MA_i^2 + MA_j^2 - A_iA_j^2.$$

Khi cộng vô hướng các hệ thức này đối với mọi cặp i, j trong đó $1 \le i < j \le m$ chúng ta nhận được

$$2\sum_{1\le i<j\le m}^{m}\overrightarrow{MA_i}.\overrightarrow{MA_j}$$

$$= (m-1)\sum_{i=1}^{m}MA_i^2 - \sum_{1\le i<j\le m}A_iA_j^2 \qquad (9)$$

Khi thay (9) vào (8) và rút gọn chúng ta tìm được

$$MG^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}MA_i^2 - \frac{1}{m^2}\sum_{1\le i<j\le m}A_iA_j^2 \qquad (10)$$

Hệ thức (10) là *công thức Lagrange – Jacobi*, biểu thị bình phương khoảng cách từ điểm M đến trọng tâm G của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ qua bình phương các khoảng cách từ điểm M đến các điểm A_i và các bình phương khoảng cách A_iA_j.

III. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC TRỌNG TÂM CỦA HAI HỆ ĐIỂM

Giả sử cho hai hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ và $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$. Chúng ta tính khoảng cách d giữa các trọng tâm O_1 và O_2 của hai hệ điểm này, khi biết tất cả các khoảng cách giữa các điểm của hệ thứ nhất, tất cả các khoảng cách giữa các điểm của hệ thứ hai và khoảng cách giữa mỗi điểm của hệ này với mỗi điểm của hệ kia. Ta kí hiệu $A_iA_j = a_{ij}$, $B_sB_t = b_{st}$, $A_pB_q = c_{pq}$ với $1 \le i, j, p \le m$; $1 \le s, t, q \le n$.

Áp dụng công thức (10) ta có

$$d^2 = O_1O_2^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} O_1B_q^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{1\le s<t\le n} b_{st} \qquad (11)$$

$$O_1B_q^2 = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{m} B_qA_p^2 - \frac{1}{m^2}\sum_{1\le i<j\le m} a_{ij}^2 \qquad (12)$$

Thay (12) vào công thức (11), rút gọn ta được

$$d^2 = O_1O_2^2 = \frac{1}{m.n}\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n} c_{pq}^2$$

$$-\frac{1}{m^2}\sum_{1\le i<j\le m} a_{ij}^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{1\le s<t\le n} b_{st}^2 \qquad (13)$$

Đây là công thức tính khoảng cách giữa các trọng tâm của hai hệ điểm.

Các trường hợp riêng

1) Trở lại các công thức (1) và (2), chúng chính là các trường hợp riêng của công thức (13) khi $m = 1$, $n = 2$ và $m = 2$, $n = 2$.

2) Khi $m = 1$, $n = 3$ ta có công thức Leibnitz tính độ dài đường trung tuyến AM nối đỉnh A của tứ diện $ABCD$ với trọng tâm M của tam giác là BCD :

$$AM^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + AD^2)$$

$$-\frac{1}{9}(BC^2 + BD^2 + CD^2)$$

BÀI TẬP

Các bạn hãy làm các bài tập sau về trọng tâm các hệ điểm.

Bài 1. Chứng minh rằng tổng các bình phương các khoảng cách từ điểm bất kì của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều đến các đỉnh của đa giác là không đổi.

Bài 2. Cho tam giác ABC và đường tròn (O). Chứng minh rằng với bất kì hai điểm xuyên tâm đối P và Q của đường tròn (O), tổng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + QA^2 + QB^2 + QC^2$ có giá trị không đổi.

Bài 3. Trên đường tròn cho n điểm ($n \ge 3$). Qua trọng tâm mỗi hệ $n - 2$ điểm vẽ một đường thẳng vuông góc với đường thẳng nối hai điểm còn lại. Chứng minh rằng C_n^2 đường thẳng cắt nhau tại một điểm (gọi là trực tâm của hệ điểm đã cho).

Bài 4. Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có chung trọng tâm. Chứng minh rằng tổng

$$AA_1^2 + AB_1^2 + AC_1^2 + BA_1^2 + BB_1^2 + BC_1^2$$

$$+ CA_1^2 + CB_1^2 + CC_1^2$$

không phụ thuộc vào sự sắp xếp các tam giác đã cho trong không gian.

Bài 5. Chứng minh rằng : tổng các bình phương tất cả các cạnh và tất cả các đường chéo của n – giác đều bằng n^2R^2, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đó.

ỨNG DỤNG TÍNH CHẤT CỦA TÂM TỈ CỰ

QUÁCH GIANG *(Ninh Bình)*

1. Định nghĩa

Tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ ứng với họ hệ số $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$ mà $\sum_{i=1}^{n} k_i \neq 0$ là điểm G thoả mãn $\sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.

Với T là điểm tuỳ ý thì điểm G được xác định duy nhất bởi hệ thức

$$\overrightarrow{TG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} k_i} . \sum_{i=1}^{n} k_i \overrightarrow{TA_i}.$$

Bài viết này nêu việc ứng dụng một tính chất của tâm tỉ cự của hệ điểm để giải một số bài toán hình học phẳng cũng như hình học không gian.

2. Một tính chất của tâm tỉ cự

Mệnh đề. *Giả sử $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là hệ n điểm trong không gian có tính chất sau :*
Tồn tại một điểm G và n số thực dương $k_1, k_2, ..., k_n$ sao cho

a) $\sum_{i=1}^{n} k_i . \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$;

b) $GA_i = R\, (i = 1,\ 2, ..., n)$.

Khi đó với điểm M bất kì thì

$$\sum_{i=1}^{n} k_i . MA_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \right) R \qquad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng với điểm G.

Chứng minh. Vì $GA_i = R$ và $k_i > 0$ nên

$$k_i . MA_i = \frac{1}{R} . k_i . |\overrightarrow{MA_i}| . |\overrightarrow{GA_i}|$$

$$\geq \frac{1}{R} . k_i \overrightarrow{MA_i} . \overrightarrow{GA_i} = \frac{1}{R} . k_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}) \overrightarrow{GA_i}$$

$$= \frac{1}{R} . k_i . (\overrightarrow{MG} . \overrightarrow{GA_i}) + k_i R \qquad (2)$$

Với $i = 1, 2, ..., n$, từ (2) ta có

$$\sum_{i=1}^{n} k_i . MA_i \geq \frac{1}{R} \overrightarrow{MG} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i . \overrightarrow{GA_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} k_i R \qquad (3)$$

Từ tính chất *a)* và (3) suy ra (1) đúng.

Đẳng thức trong (1) xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA_i}$ song song cùng chiều với $\overrightarrow{GA_i}$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$, tức là M trùng với điểm G. ❒

3. Áp dụng

Từ mệnh đề trên ta giải được một lớp các bài toán hình học mà việc sử dụng phương pháp tổng hợp để giải các bài toán này nhiều khi hết sức khó khăn. Sau đây là một số thí dụ.

★**Thí dụ 1.** *Cho tứ diện gần đều ABCD với $AB = CD = a$; $AC = BD = b$; $BC = AD = c$.*
Chứng minh rằng với điểm M bất kì, ta có bất đẳng thức

$$MA + MB + MC + MD \geq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Lời giải. Vì $ABCD$ là tứ diện gần đều nên trọng tâm của tứ diện trùng với tâm G của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện nghĩa là ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

và $GA = GB = GC = GD = R$.

Áp dụng mệnh đề trên ta có

$$MA + MB + MC + MD \geq 4 . R \qquad (4)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ M trùng với tâm G. Dễ dàng tính được

$$R = \frac{\sqrt{2}}{4} . \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có đpcm. ❒

Bài toán này nếu dùng phương pháp tổng hợp để giải sẽ rất vất vả.

★**Thí dụ 2.** *Trong mặt phẳng cho đa giác $A_1A_2...A_n$ ngoại tiếp đường tròn tâm O, bán kính r. Gọi B_i $(i = 1,2, ..., n)$ là tiếp điểm của A_iA_{i+1} với đường tròn (xem $A_{n+1} \equiv A_1$).*

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.MB_i \geq 2.n.r^2 \tan\frac{\pi}{n}$$

với điểm M bất kì trong không gian.

Lời giải. Đặt $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.\overrightarrow{OB_i}$. Gọi Q_O là phép quay tâm O với góc quay 90^o và chiều quay cùng chiều với góc nhọn từ OA_1 đến OA_2. Dễ dàng thấy rằng

$$Q_O(A_iA_{i+1}.\overrightarrow{OB_i}) = r.\overrightarrow{A_iA_{i+1}} \ (i = 1, 2, ..., n)$$

nên $$Q_O(\vec{V}) = \sum_{i=1}^{n} Q_O(A_iA_{i+1}.\overrightarrow{OB_i})$$

$$= r.\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \vec{0}.$$

Do đó $\vec{V} = \vec{0}$. Mà theo giả thiết ta có $OB_i = r$ $(i = 1, 2, ..., n)$ nên áp dụng mệnh đề trên ta có

$$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.MB_i \geq r.\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1} \qquad (6)$$

Đặt $\widehat{B_iOB_{i+1}} = 2x_i$ $(i = 1, 2, ..., n$; xem $B_{n+1} = B_1)$. Dễ dàng thấy rằng $0 \leq x_i < \frac{\pi}{2}$ và $A_iA_{i+1} = r.(\tan x_i + \tan x_{i+1})$. Do vậy từ (6) ta có

$$\sum_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.MB_i \geq 2.r^2 \tan x_i \geq 2.n.r \tan\frac{\pi}{n}$$

(theo BĐT Jensen).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng với tâm O và $x_i = \frac{\pi}{n} \Leftrightarrow M$ trùng O và $A_1A_2...A_n$ là đa giác đều. ☐

★**Thí dụ 3.** *Cho hình chóp tam giác đều S.ABC ngoại tiếp mặt cầu tâm O bán kính r. Gọi S_1, A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là điểm tiếp xúc của mặt cầu với mặt đối diện với các đỉnh S, A, B, C. Gọi Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 theo thứ tự là diện tích các mặt của hình chóp đối diện với đỉnh S, A, B, C.*

Chứng minh rằng với điểm M bất kì trong không gian ta có bất đẳng thức

$$Q_1.MS_1 + Q_2.MA_1 + Q_3.MB_1 + Q_4.MC_1 \geq 24.\sqrt{3}.r^3$$

Lời giải. Theo *định lí con nhím* cho tứ diện $S.ABC$ ta có

$$Q_1.\overrightarrow{OS_1} + Q_2.\overrightarrow{OA_1} + Q_3.\overrightarrow{OB_1} + Q_4.\overrightarrow{OC_1} = \vec{0}$$

Mặt khác

$$OS_1 = OA_1 = OB_1 = OC_1 = r$$

nên theo mệnh đề trên ta có

$$Q_1.MS_1 + Q_2.MA_1 + Q_3.MB_1 + Q_4.MC_1 \geq (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4).r \qquad (7)$$

Gọi u là góc tạo bởi mặt bên và đáy hình chóp ta thấy $Q_1 = (Q_2 + Q_3 + Q_4).\cos u$, nên

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_1.\left(1 + \frac{1}{\cos u}\right)$$

$$\text{và } Q_1 = 3.\sqrt{3}.r^2 \cot\frac{u}{2}$$

Do vậy từ (7) ta có

$$Q_1.MS_1 + Q_2.MA_1 + Q_3.MB_1 + Q_4.MC_1 \geq 3.\sqrt{3}.r^3 \cot\frac{u}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos u}\right) \qquad (8)$$

Đặt $x = \tan\frac{u}{2}$; vì $0 < u < 90^o$ nên $0 < x < 1$ ta có

$$\cot\frac{u}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos u}\right) = \frac{2}{x(1-x)} \geq 8 \qquad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra đpcm. ☐

Do khuôn khổ bài viết nên tôi chỉ đưa ra một số thí dụ áp dụng mệnh đề trên (là một tính chất của một hệ điểm có tâm tỉ cự cách đều hệ điểm đã cho với hệ số tỉ cự dương). Các bài toán trên nếu sử dụng phương pháp tổng hợp để giải ta sẽ gặp khó khăn không nhỏ. Sau đây là một số bài tập mà lời giải sẽ rất gọn nếu sử dụng mệnh đề trên.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Hãy tìm giá trị bé nhất của đại lượng sau

$$S = \tan\frac{A}{2}.(MB+MC) + \tan\frac{B}{2}.(MC+MA) + \tan\frac{C}{2}.(MA+MB)$$

khi điểm M thay đổi trong không gian và tam giác ABC thay đổi sao cho nó luôn nhọn và luôn nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R cố định.

Hãy mở rộng bài toán trên cho trường hợp n – giác nội tiếp.

Bài 2. Cho x thuộc $\mathbb{R}$, hãy tìm giá trị bé nhất của

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{h_k(x)},\ \text{trong đó}$$

$$h_k(x) = x^2 + g^2(x) + 1 - 2\left(x.\cos\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right) + g(x).\sin\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

trong đó $g(x)$ là một hàm số mà đồ thị của nó qua gốc toạ độ, còn a là số thực tuỳ ý.

Tâm tỉ cự của hệ điểm có ứng dụng khá nhiều trong việc giải các bài toán hình học. Nếu các bạn chịu khó đầu tư suy nghĩ về việc áp dụng nó thì các bạn thường thành công khi tìm lời giải bài toán mà nhiều khi phương pháp tổng hợp tỏ ra ít có hiệu quả.

TÍCH NGOÀI CỦA HAI VECTƠ

NGUYỄN MINH HÀ
(Trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

Cùng với tích vô hướng, tích ngoài của hai vectơ cũng là một trong các nội dung quy định đối với cuộc thi học sinh giỏi toán quốc gia (công văn 11636/THPT). Tuy nhiên, vấn đề này vẫn được coi là mới lạ đối với nhiều giáo viên và học sinh chuyên toán. Vì lẽ đó, bài viết này xin giới thiệu với bạn đọc những tính chất cơ bản của tích ngoài cũng như những kĩ thuật quan trọng nhất để giải một bài toán bằng tích ngoài. Hi vọng rằng nó sẽ có ích đối với các bạn đồng nghiệp và các học sinh trong việc giảng dạy và học tập.

Trong toàn bộ bài viết này, mặt phẳng mà ta xét đã được định hướng ; theo quy ước thông thường, hướng dương ngược với hướng quay của kim đồng hồ, hướng âm trùng với hướng quay của kim đồng hồ.

Ta kí hiệu $(\vec{a},\vec{b})$ là góc định hướng giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH NGOÀI

1. Định nghĩa. Tích ngoài của hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \wedge \vec{b}$ và được xác định như sau :

- Nếu $\left[\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \end{array}\right.$ thì $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$

- Nếu $\begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$ thì $\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$

Từ định nghĩa trên ta có ngay hệ quả hiển nhiên là

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = 0$.

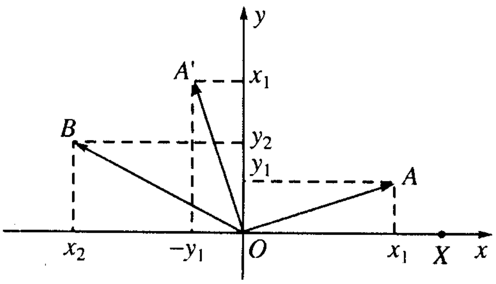
2. Biểu thức toạ độ của tích ngoài

Để có thể chứng minh được các tính chất của tích ngoài trước hết ta cần định lí sau :

Định lí 1. *Trên mặt phẳng toạ độ cho hai vectơ* $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$. *Khi đó*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = x_1y_2 - x_2y_1$$

Chứng minh. Lấy các điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (h.31).



Hình 31

Lấy điểm A' sao cho

$$\begin{cases} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 90^\circ \\ |\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OA}| \end{cases}$$

Đặt $\vec{a}' = \overrightarrow{OA'}$. Ta có

$(\vec{a}, \vec{b}) \equiv (\vec{a}, \vec{a}') + (\vec{a}', \vec{b}) \equiv 90^\circ + (\vec{a}', \vec{b})$ (mod 360°)

$\Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{a}', \vec{b})$ (1)

Mặt khác $(\overrightarrow{OX}, \vec{a}') \equiv (\overrightarrow{OX}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{a}')$

$\equiv (\overrightarrow{OX}, \vec{a}) + 90^\circ$ (mod 360°). Từ đó

$$\begin{cases} |\vec{a}'|\cos(\overrightarrow{OX}, \vec{a}') = -|\vec{a}|\sin(\overrightarrow{Ox}, \vec{a}) = -y_1 \\ |\vec{a}'|\sin(\overrightarrow{OX}, \vec{a}') = |\vec{a}|\cos(\overrightarrow{OX}, \vec{a}) = x_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{a}' = (-y_1, x_1)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}'|.|\vec{b}|\cos(\vec{a}', \vec{b})$

$= \vec{a}'.\vec{b} = (-y_1, x_1).(x_2, y_2) = x_1y_2 - x_2y_1$. ❐

Nhận xét. Khẳng định (2) sẽ được chứng minh đơn giản hơn nếu ta dùng phép quay vectơ.

3. Tính chất. *Tích ngoài của hai vectơ có các tính chất cơ bản sau đây :*

1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ *(phản giao hoán).*

2) $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$ *(phân phối)*

3) $(k\vec{a}) \wedge (t\vec{b}) = (kt)(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

Chứng minh

1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$

$= -|\vec{b}|.|\vec{a}|\sin(\vec{b}, \vec{a}) = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

2) Giả sử $\vec{a} = (x_1, y_1)$; $\vec{b} = (x_2, y_2)$;

$\vec{c} = (x_3, y_3)$, ta có

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) &= (x_1, y_1) \wedge (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= x_1(y_2 + y_3) - (x_2 + x_3)y_1 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_1y_3 - x_3y_1) \\ &= \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c} \end{aligned}$$

3) Giả sử $\vec{a} = (x_1, y_1)$; $\vec{b} = (x_2, y_2)$, ta có

$(k\vec{a}) \wedge (t\vec{b}) = (kx_1, ky_1) \wedge (tx_2, ty_2)$

$= ktx_1y_2 - ktx_2y_1$

$= kt(x_1y_2 - x_2y_1) = (kt)(\vec{a} \wedge \vec{b})$. ❐

II. HƯỚNG VÀ DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA TAM GIÁC

1. Hướng của tam giác

Cho tam giác ABC, ta thấy các hướng quay từ A đến B đến C, từ B đến C đến A, từ C đến A đến B trùng nhau và gọi là hướng của tam giác ABC. Như thế các tam giác ABC, BCA, CAB có cùng hướng.

Nếu hướng của tam giác ABC trùng với hướng của mặt phẳng thì ta nói tam giác ABC có hướng dương. Nếu tam giác ABC có hướng ngược với hướng của mặt phẳng thì ta nói tam giác ABC có hướng âm.

2. Tam giác suy biến

Theo định nghĩa thông thường, ba đỉnh của một tam giác phải là ba điểm không thẳng hàng. Tuy nhiên, khi xét các bài toán về diện tích, yêu cầu này đôi khi trở nên không cần thiết mà còn gây trở ngại cho việc làm toán. Vì vậy, ta đưa ra khái niệm *tam giác suy biến*, tức là tam giác mà ba đỉnh của nó là ba điểm thẳng hàng. Để cho thuận tiện, trong bài viết này, ta sử dụng cụm từ *tam giác* chung cho cả hai trường hợp tam giác không suy biến hoặc suy biến.

3. Diện tích đại số của tam giác

Diện tích đại số của tam giác ABC là một số đại số (có thể dương, âm hoặc bằng không), kí hiệu là $S_{[ABC]}$ và được xác định như sau :

$$S_{[ABC]} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Từ định nghĩa trên, ta có ngay hệ quả là

$$S_{[ABC]} = S_{[BCA]} = S_{[CAB]}$$

Ta chỉ cần chứng minh đẳng thức thứ nhất, còn đẳng thức thứ hai được rút ra một cách tương tự.

$$S_{[ABC]} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BA})$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = S_{[BCA]}.$$

4. Mối liên hệ giữa diện tích đại số và diện tích hình học của tam giác

Khái niệm *diện tích hình học* chính là khái niệm *diện tích* mà ta vẫn hiểu theo nghĩa thông thường, lúc đó không xét hướng của tam giác và số đo diện tích luôn là dương. Kí hiệu diện tích hình học của tam giác ABC (cũng như mở rộng cho đa giác) là S_{ABC}, lúc đó $S_{ABC} = S_{BCA} = S_{ACB}$.

Tuy nhiên khi cần phân biệt khái niệm diện tích (thường dùng) và diện tích đại số thì người ta thường thay từ *diện tích* bởi cụm từ *diện tích hình học.*

Đối với một tam giác có hướng thì diện tích đại số và diện tích hình học của nó được liên hệ bởi định lí sau đây.

Định lí 2

1) *Nếu tam giác ABC có hướng dương thì* $S_{[ABC]} = S_{ABC}$.

2) *Nếu tam giác ABC có hướng âm thì* $S_{[ABC]} = -S_{ABC}$.

Chứng minh

1) $S_{[ABC]} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

$$= \frac{1}{2}AB.AC.\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$$
$$= \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = S_{ABC}$$

2) $S_{[ABC]} = -S_{[ACB]} = -S_{ACB} = -S_{ABC}$ □

Hệ quả. *Trên mặt phẳng toạ độ cho tam giác ABC. Biết rằng* $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{AC} = (x_2, y_2)$.

Khi đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$.

5. Tính chất. *Diện tích đại số của tam giác có hai tính chất cơ bản sau.*

1) *Cho tam giác ABC, với mỗi điểm M ta có*

$$S_{[ABC]} = S_{[MAB]} + S_{[MBC]} + S_{[MCA]}$$

(hệ thức Chasles về diện tích)

2) *Cho tam giác ABC, với mỗi điểm M thuộc đường thẳng BC ta có*

$$S_{[ABC]} = S_{[MAB]} + S_{[MCA]} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA}$$

Chứng minh

1) $S_{[ABC]} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \wedge (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC}$

$- \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA})$

$= S_{[MAB]} + S_{[MBC]} + S_{[MCA]}$

2) $M \in BC$ thì $S_{[ABC]} = S_{[MAB]} + S_{[MCA]}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \wedge \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA}.$

Đẳng thức $S_{[ABC]} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA}$ chính là sự mở rộng kết quả cơ bản đối với diện tích hình học của tam giác.

$$S_{[ABC]} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}BC.MA\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MA})\ \square$$

III. HƯỚNG VÀ DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ CỦA ĐA GIÁC LỒI

Có thể mở rộng khái niệm hướng và diện tích đại số từ tam giác đến đa giác lồi. Với sự mở rộng này, khái niệm tích ngoài trở nên có hiệu lực hơn nhiều trong việc giải các bài toán hình học.

1. Định nghĩa

Diện tích đại số của đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ là một số, kí hiệu là $S_{[A_1A_2...A_n]}$ và được định nghĩa như sau.

- Nếu đa giác $A_1A_2...A_n$ có hướng dương (trùng với hướng của mặt phẳng) thì

$$S_{[A_1A_2...A_n]} = S_{A_1A_2...A_n}$$

- Nếu đa giác $A_1A_2...A_n$ có hướng âm (ngược với hướng của mặt phẳng) thì

$$S_{[A_1A_2...A_n]} = -S_{A_1A_2...A_n}$$

Từ định nghĩa trên, dễ thấy rằng

$$S_{[A_1A_2...A_{n-1}A_n]} = S_{[A_2A_3...A_nA_1]} = \dots$$
$$= S_{[A_nA_1...A_{n-2}A_{n-1}]}$$

Định lí sau đây rất quan trọng. Nó cho phép ta khai triển diện tích đại số của một đa giác lồi thành tổng các diện tích đại số của các tam giác và thường được gọi là hệ thức Chasles tổng quát về diện tích.

2. Định lí 3. *Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Với mỗi điểm M ta có*

$$S_{[A_1A_2...A_n]} = S_{[MA_1A_2]} + S_{[MA_2A_3]} + \dots + S_{[MA_nA_1]}.$$

Chứng minh. Định lí được chứng minh bằng phương pháp quy nạp và dành cho bạn đọc.

IV. MỐI LIÊN HỆ GIỮA ĐỘ DÀI ĐẠI SỐ VÀ DIỆN TÍCH ĐẠI SỐ

Hai định lí quan trọng dưới đây, cho ta thấy mối liên hệ giữa khái niệm độ dài đại số và khái niệm diện tích đại số, đồng thời chúng cũng chính là sự mở rộng các kết quả quen biết về mối liên hệ giữa khái niệm độ dài hình học và khái niệm diện tích hình học.

Định lí 4. *Cho tam giác ABC. Các điểm B', C' nằm trên đường thẳng BC. Ta có*

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{S_{[ABC]}}{S_{[AB'C']}}.$$

Chứng minh. Gọi $\vec{e}$ là vectơ chỉ phương của trục BC, lấy M trên đường thẳng BC, ta có

$$\frac{S_{[ABC]}}{S_{[AB'C']}} = \frac{\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{B'C'} \wedge \overrightarrow{MA}} = \frac{\overline{BC}(\vec{e} \wedge \overrightarrow{MA})}{\overline{B'C'}(\vec{e} \wedge \overrightarrow{MA})} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\ \square$$

Định lí 5. *Cho tam giác ABC và điểm O. Giả sử các đường thẳng AO và BC cắt nhau tại điểm M (khác B, C). Ta có*

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{S_{[OBA]}}{S_{[OCA]}}.$$

Chứng minh. Gọi $\vec{e}$ là vectơ chỉ phương của trục BC, ta có

$$\frac{S_{[OBA]}}{S_{[OCA]}} = \frac{S_{[BAO]}}{S_{[CAO]}} = \frac{\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{MC}} = \frac{\overline{MB}(\overrightarrow{AO} \wedge \vec{e})}{\overline{MC}(\overrightarrow{AO} \wedge \vec{e})}$$

$$= \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \square$$

Kết quả sau có thể coi là hệ quả trực tiếp của định lí 4 và cũng có thể coi là hệ quả trực tiếp của định lí 5.

Hệ quả. *Cho tam giác ABC và điểm M nằm trên đường thẳng BC. Ta có*

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{S_{[MBA]}}{S_{[MCA]}}.$$

MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG CỦA TÍCH NGOÀI CỦA HAI VECTƠ

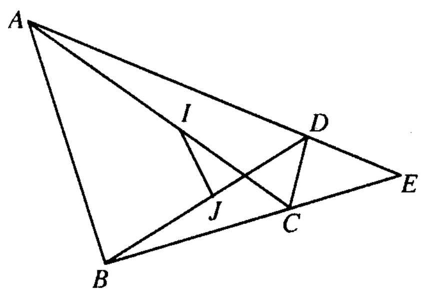
NGUYỄN MINH HÀ
(Trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

Trong bài viết trên (trang 134) đã giới thiệu về tích ngoài của hai vectơ và một số tính chất của nó. Những tính chất đó sẽ được sử dụng để giải nhiều bài toán hình học dưới đây. Chú ý rằng tích ngoài của hai vectơ cùng phương bằng số 0.

Bài này xin giới thiệu với bạn đọc những kĩ thuật quan trọng để giải một bài toán bằng tích ngoài. Những kĩ thuật này được thể hiện qua các thí dụ sau.

★**Thí dụ 1.** *Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng*

$$S_{EIJ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$



Hình 32

Lời giải. (h.32) Ta có

$$S_{[EIJ]} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EI} \wedge \overrightarrow{EJ}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}) \wedge \frac{1}{2}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED})$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED})$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} \wedge \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EC}$$

$$+ \overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{EA})$$

$$= \frac{1}{4}(S_{[EAB]} + S_{[EBC]} + S_{[ECD]} + S_{[EDA]}$$

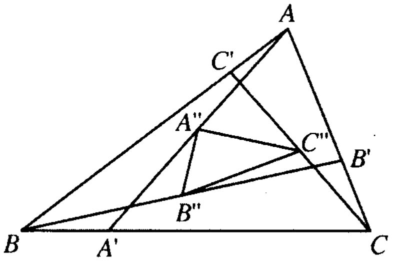
$$= \frac{1}{4}S_{[ABCD]}$$

Từ đó suy ra $S_{EIJ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ $\square$

Nhận xét. Lời giải sử dụng tích ngoài không những cho ta biết $S_{EIJ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ mà còn cho ta biết tam giác EIJ và tứ giác $ABCD$ cùng hướng (một kết quả không dễ chứng minh). Nếu không sử dụng tích ngoài thì phép chứng minh rất dễ phụ thuộc vào hình vẽ do đó phải xét quá nhiều trường hợp.

★**Thí dụ 2.** *Cho tam giác ABC với các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi A'', B'', C'' theo thứ tự là trung điểm của các đoạn AA', BB', CC'. Chứng minh rằng*

$$S_{A''B''C''}=\frac{1}{4}S_{A'B'C'}$$



Hình 33

Lời giải. (h.33)

Ta có

$$S_{[A''B''C'']}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A''B''}\wedge\overrightarrow{A''C''}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'})\wedge\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{A'C'})\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}\wedge\overrightarrow{AC}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{A'C'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}\wedge\overrightarrow{A'C'}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(S_{[ABC]}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{B'A'}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{C'A'}+S_{[A'B'C']}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(S_{[ABC]}-S_{[A'AC]}-S_{[A'BA]}+S_{[A'B'C']})$$

$$=\frac{1}{4}S_{[A'B'C']}$$

Từ đó suy ra $S_{A''B''C''}=\frac{1}{4}S_{A'B'C'}$ □

★**Thí dụ 3.** *Cho tam giác ABC. Qua điểm M bất kì dựng đường thẳng Δ cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng*

$$\frac{S_{[MBC]}}{\overline{MA_1}}+\frac{S_{[MCA]}}{\overline{MB_1}}+\frac{S_{[MAB]}}{\overline{MC_1}}=0.$$

Lời giải. Gọi $\vec{e}$ là vectơ chỉ phương đơn vị của Δ. (Bạn đọc tự vẽ hình). Ta có

$$\frac{S_{[MBC]}}{\overline{MA_1}}+\frac{S_{[MCA]}}{\overline{MB_1}}+\frac{S_{[MAB]}}{\overline{MC_1}}$$

$$=\frac{\overrightarrow{MA_1}\wedge\overrightarrow{BC}}{2\overline{MA_1}}+\frac{\overrightarrow{MB_1}\wedge\overrightarrow{CA}}{2\overline{MB_1}}+\frac{\overrightarrow{MC_1}\wedge\overrightarrow{AB}}{2\overline{MC_1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\overrightarrow{MA_1}}{\overline{MA_1}}\wedge\overrightarrow{BC}+\frac{\overrightarrow{MB_1}}{\overline{MB_1}}\wedge\overrightarrow{CA}+\frac{\overrightarrow{MC_1}}{\overline{MC_1}}\wedge\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\vec{e}\wedge\overrightarrow{BC}+\vec{e}\wedge\overrightarrow{CA}+\vec{e}\wedge\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{2}\vec{e}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\vec{e}\wedge\vec{0}=0 \ \square$$

★**Thí dụ 4.** *Cho lục giác lồi ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, DE, CD, FA, EF, BC. Chứng minh rằng : MN, PQ, RS đồng quy khi và chỉ khi $S_{AEC}=S_{BFD}$.*

Lời giải. Bạn đọc tự vẽ hình.

Lấy điểm O bất kì, ta thấy

$$4(\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\wedge\overrightarrow{OS})$$

$$=\Big((\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\wedge(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE})$$

$$+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\wedge(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA})$$

$$+(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})\wedge(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\Big)$$

$$=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}$$

$$+\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA}$$

$$+\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OB}$$

$$+\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}\wedge\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OF}\wedge\overrightarrow{OC}$$

$$=(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OE}\wedge\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OA})$$

$$-(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OF}\wedge\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}\wedge\overrightarrow{OB})$$

$$=2\big(S_{[OAE]}+S_{[OEC]}+S_{[OCA]}\big)$$

$$-2\big(S_{[OBF]}+S_{[OFD]}+S_{[ODB]}\big)$$

$$=2\big(S_{[AEC]}-S_{[BFD]}\big).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \wedge \overrightarrow{OS}$$
$$= 2\left(S_{[AEC]} - S_{[BFD]}\right)$$

Nhờ đẳng thức này bài toán được giải quyết đơn giản như sau.

Gọi O là giao điểm của MN và PQ. Ta thấy

$$OM \wedge ON = OP \wedge OQ = 0.$$

Vậy MN, PQ, RS đồng quy $\Leftrightarrow \overrightarrow{OR} \wedge \overrightarrow{OS} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \wedge \overrightarrow{OS} = 0$

$\Leftrightarrow S_{[ACE]} - S_{[BFD]} = 0$

$\Leftrightarrow S_{ACE} - S_{BFD} = 0$ (vì các tam giác ACE, BFD cùng hướng)

$\Leftrightarrow S_{ACE} = S_{BFD}$. ❐

★**Thí dụ 5.** *Cho tam giác ABC và điểm M khác A, B, C. Các đường thẳng qua M, lần lượt vuông góc với MA, MB, MC, cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại* A_1, B_1, C_1. *Chứng minh rằng* A_1, B_1, C_1 *thẳng hàng.*

Lời giải. Bạn đọc tự vẽ hình. Ta có

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{S_{[MA_1B]}}{S_{[MA_1C]}} = \frac{\overrightarrow{MA_1} \wedge \overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA_1} \wedge \overrightarrow{MC}}$$
$$= \frac{MB.\sin(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB})}{MC.\sin(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC})} \qquad (1)$$

Mặt khác ta có

$$(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{360^\circ}$$
$$(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC}) \equiv (\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) \pmod{360^\circ}$$

Có thể xảy ra một trong hai trường hợp góc $(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA}) \equiv 90^\circ \pmod{360^\circ}$ hoặc $(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MA}) \equiv -90^\circ \pmod{360^\circ}$.

Tuy nhiên, trong cả hai trường hợp ta đều có

$$\frac{\sin(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB})}{\sin(\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC})} = \frac{\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}{\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \frac{MB.\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}{MC.\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})} \qquad (3)$$

Tương tự như vậy

$$\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}} = \frac{MC.\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}{MA.\cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})} \qquad (4)$$

$$\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = \frac{MA.\cos(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})}{MB.\cos(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB})} \qquad (5)$$

Nhân theo từng vế các đẳng thức (3) (4) (5), theo định lí Menelaus thì ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. ❐

★**Thí dụ 6.** *Cho tam giác ABC. Giả sử M, N, P theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi*

$$\frac{\sin(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})}.\frac{\sin(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC})}{\sin(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA})}.\frac{\sin(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA})}{\sin(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB})} = -1.$$

Lời giải. Theo định lí Ceva ta thấy AM, BN, CP đồng quy hoặc đôi một song song, lúc đó

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{[MBA]}}{S_{[MCA]}}.\frac{S_{[NCB]}}{S_{[NAB]}}.\frac{S_{[PAC]}}{S_{[PBC]}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{[AMB]}}{S_{[AMC]}}.\frac{S_{[BNC]}}{S_{[BNA]}}.\frac{S_{[CPA]}}{S_{[CPB]}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AC}}.\frac{\overrightarrow{BN} \wedge \overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BN} \wedge \overrightarrow{BA}}.\frac{\overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CP} \wedge \overrightarrow{CB}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM.AB.\sin(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})}{AM.AC.\sin(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})}$$
$$\times \frac{BN.BC.\sin(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BC})}{BN.BA.\sin(\overrightarrow{BN},\overrightarrow{BA})}$$
$$\times \frac{CP.CA.\sin(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CA})}{CP.CB.\sin(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB})} = -1.$$

Điều này tương đương với đẳng thức phải chứng minh. ❐

Nhận xét. Kết quả trên rất có lợi trong việc chứng minh sự đồng quy của ba đường thẳng. Nó được gọi là định lí Ceva dạng sin và được chứng minh một cách chặt chẽ như trên.

★**Thí dụ 7.** *Cho tam giác ABC. Với mỗi điểm M chứng minh rằng*

$$S_{[MBC]}.\overrightarrow{MA}+S_{[MCA]}.\overrightarrow{MB}+S_{[MAB]}.\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

Lời giải. Đặt

$$\vec{u}=S_{[MBC]}.\overrightarrow{MA}+S_{[MCA]}.\overrightarrow{MB}+S_{[MAB]}.\overrightarrow{MC}.$$

Ta thấy $\vec{u}\wedge\overrightarrow{MA}$

$$=S_{[MCA]}(\overrightarrow{MB}\wedge\overrightarrow{MA})+S_{[MAB]}(\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MA})$$

$$=2\left(S_{[MCA]}.S_{[MBA]}+S_{[MAB]}.S_{[MCA]}\right)$$

$$=2\left(S_{[MCA]}.S_{[MBA]}-S_{[MBA]}.S_{[MCA]}\right)=0.$$

Tương tự như vậy có

$$\vec{u}\wedge\overrightarrow{MB}=0,\ \vec{u}\wedge\overrightarrow{MC}=0.$$

Suy ra $\vec{u}$ cùng phương với các vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.

Chú ý rằng, trong ba vectơ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ ta luôn chọn được hai vectơ không cùng phương. Vậy $\vec{u}=\vec{0}$ (đpcm). ❐

Nhận xét. Kết quả trên đôi khi được phát biểu dưới dạng khác :

Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Chứng minh rằng

$$(\vec{b}\wedge\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}\wedge\vec{a})\vec{b}+(\vec{a}\wedge\vec{b})\vec{c}=\vec{0}.$$

SỬ DỤNG TÍCH NGOÀI CỦA HAI VECTƠ VÀO GIẢI TOÁN

NGUYỄN MINH HÀ
(Trường THPT chuyên, ĐHSP Hà Nội)

Để sử dụng được tích ngoài của hai vectơ như một công cụ trong việc giải các bài toán hình học, trước hết cần nắm vững định nghĩa và các tính chất của tích ngoài của hai vectơ (đã đăng trong THTT số 294 tháng 12/2001). Một số kĩ thuật sử dụng tích ngoài của hai vectơ vào giải toán cũng đã được giới thiệu trong THTT số 295 (1/2002). Cả hai bài này đều đăng ở phần trên. Xin nhắc lại một số kiến thức.

Định nghĩa

1) $\vec{a}\wedge\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$ khi $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, còn $\vec{a}\wedge\vec{b}=0$ khi $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=\vec{0}$.

2) $S_{[ABC]}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{BC})$

$$=\begin{cases}S_{ABC} \text{ nếu } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) \text{ có hướng dương}\\ -S_{ABC} \text{ nếu } (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) \text{ có hướng âm}\end{cases}$$

trong đó S_{ABC} là diện tích tam giác ABC, M thuộc BC.

Tính chất

1) $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$

2) $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\wedge\vec{b}+\vec{a}\wedge\vec{c}$

3) $\left(k\vec{a}\right)\wedge\left(t\vec{b}\right)=(kt)\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$

4) $\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)\vec{a}+\left(\vec{c}\wedge\vec{a}\right)\vec{b}+\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{0}$

Với tam giác ABC và mỗi điểm M thì :

5) $S_{[ABC]}=S_{[MAB]}+S_{[MBC]}+S_{[MCA]}$

Đẳng thức trên được mở rộng cho đa giác lồi.

6) $S_{[MBC]}\overrightarrow{MA}+S_{[MCA]}\overrightarrow{MB}+S_{[MAB]}\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Bài viết này trình bày tiếp một số bài toán khác nhằm làm rõ hơn hiệu lực của tích ngoài của hai vectơ khi giải toán hình học.

★**Thí dụ 1.** *Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác.*

a) Chứng minh rằng các số đo $S_{MBC}.MA$, $S_{MCA}.MB$, $S_{MAB}.MC$ *là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.*

b) Tìm M sao cho diện tích tam giác nói trong câu (a) là lớn nhất.

Lời giải. a) Vì M thuộc tam giác ABC nên các tam giác MBC, MCA, MAB cùng hướng và các vectơ $S_{MBC}.\overrightarrow{MA}$, $S_{MCA}.\overrightarrow{MB}$, $S_{MAB}.\overrightarrow{MC}$ đôi một không cùng phương, theo tính chất 6 và định nghĩa phép cộng vectơ, ta thấy : $S_{MBC}.MA$, $S_{MCA}.MB$, $S_{MAB}.MC$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

b) Kí hiệu diện tích của tam giác nói trên là S_M, theo tính chất 3 có

$$S_M = \frac{1}{2}\left|S_{MCA}.\overrightarrow{MB} \wedge S_{MAB}.\overrightarrow{MC}\right|$$

$$= \left|(S_{MCA}.S_{MAB}).\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}\right|$$

$$= \left|S_{MCA}.S_{MAB}.S_{[MBC]}\right|$$

$$= S_{MCA}.S_{MAB}.S_{MBC} \le \left(\frac{S_{MCA}+S_{MAB}+S_{MBC}}{3}\right)^3$$

$$= \frac{1}{27}S_{ABC}^3.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow S_{MCA} = S_{MAB} = S_{MBC} \Leftrightarrow$ M là trọng tâm tam giác ABC. □

Tóm lại : S_M lớn nhất và bằng $\frac{1}{27}S_{ABC}^3$ khi M là trọng tâm tam giác ABC.

★**Thí dụ 2.** *Cho bốn vectơ* $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$. *Chứng minh rằng :*

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\left(\vec{c}\wedge\vec{d}\right)+\left(\vec{a}\wedge\vec{c}\right)\left(\vec{d}\wedge\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\wedge\vec{d}\right)\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=0$$

Lời giải. Theo tính chất 3 và 4 có :

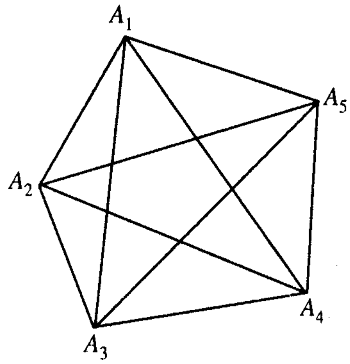
$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\left(\vec{c}\wedge\vec{d}\right)+\left(\vec{a}\wedge\vec{c}\right)\left(\vec{d}\wedge\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\wedge\vec{d}\right)\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)$$

$$= \vec{a}\wedge\left(\left(\vec{c}\wedge\vec{d}\right)\vec{b}\right)+\vec{a}\wedge\left(\left(\vec{d}\wedge\vec{b}\right)\vec{c}\right)+\vec{a}\left(\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)\vec{d}\right)$$

$$= \vec{a}\wedge\left(\left(\vec{c}\wedge\vec{d}\right)\vec{b}+\left(\vec{d}\wedge\vec{b}\right)\vec{c}+\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)\vec{d}\right)$$

$$= \vec{a}\wedge\vec{0}=0$$ □

★**Thí dụ 3.** *Cho ngũ giác lồi* $A_1A_2A_3A_4A_5$ *có diện tích S. Đặt* $a_i = S_{A_iA_{i+1}A_{i+2}}$ $(1 \le i \le 5)$ $(A_6 \equiv A_1, A_7 \equiv A_2)$. *Tính S theo* a_i $(1 \le i \le 5)$.



Hình 34

Lời giải (h.34). Áp dụng kết quả của Thí dụ 2 cho bốn véctơ $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, $\overrightarrow{A_1A_5}$ ta có :

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_3}\right)\left(\overrightarrow{A_1A_4}\wedge\overrightarrow{A_1A_5}\right)$$

$$+\left(\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_4}\right)\left(\overrightarrow{A_1A_5}\wedge\overrightarrow{A_1A_3}\right)$$

$$+\left(\overrightarrow{A_1A_2}\wedge\overrightarrow{A_1A_5}\right)\left(\overrightarrow{A_1A_3}\wedge\overrightarrow{A_1A_4}\right)=0$$

$$\Rightarrow S_{[A_1A_2A_3]}.S_{[A_1A_4A_5]}+S_{[A_1A_2A_4]}.S_{[A_1A_5A_3]}$$

$$+S_{[A_1A_2A_5]}.S_{[A_1A_3A_4]}=0 \qquad (1)$$

Ta thấy $\begin{cases}\Delta A_1A_2A_3, \Delta A_1A_4A_5 \text{ cùng hướng}\\ \Delta A_1A_2A_4, \Delta A_1A_5A_3 \text{ ngược hướng}\\ \Delta A_1A_2A_5, \Delta A_1A_3A_4 \text{ cùng hướng}\end{cases}$

$$\text{nên}\begin{cases} S_{[A_1A_2A_3]}.S_{[A_1A_4A_5]} > 0 \\ S_{[A_1A_2A_4]}.S_{[A_1A_5A_3]} < 0 \\ S_{[A_1A_2A_5]}.S_{[A_1A_3A_4]} > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra

$$S_{A_1A_2A_3}.S_{A_1A_4A_5} - S_{A_1A_2A_4}.S_{A_1A_5A_3}$$
$$+ S_{A_1A_2A_5}.S_{A_1A_3A_4} = 0$$

$$\Rightarrow a_1a_4 - (S-a_2-a_4)(S-a_1-a_3)$$
$$+ a_5(S-a_1-a_4) = 0$$

$$\Rightarrow S^2 - \left(\sum_{i=1}^{5} a_i\right)S + \sum_{i=1}^{5} a_i a_{i+1} = 0 \ (a_6 \equiv a_1)$$

Dễ thấy $S > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} a_i$. Vậy

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{5} a_i + \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{5} a_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{5} a_i a_{i+1}\right)}\right) \square$$

★**Thí dụ 4.** *Cho tứ giác lồi $A_1A_2A_3A_4$. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 theo thứ tự là trực tâm của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng*

$$S_{[H_1H_2H_3H_4]} = S_{[A_1A_2A_3A_4]}.$$

Lời giải. Vì H_1, H_2 là trực tâm các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ nên :

$$\begin{cases} A_1H_2 \perp A_3A_4 \\ A_2H_1 \perp A_3A_4 \end{cases} \Rightarrow A_1H_2 // A_2H_1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_1H_2} \wedge \overrightarrow{A_2H_1} = 0 \quad (3)$$

Lấy điểm P bất kì. Từ (3)và tính chất 2 có

$$\left(\overrightarrow{PH_2} - \overrightarrow{PA_1}\right) \wedge \left(\overrightarrow{PH_1} - \overrightarrow{PA_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA_1} \wedge \overrightarrow{PA_2} - \overrightarrow{PH_1} \wedge \overrightarrow{PH_2}$$
$$= \overrightarrow{PA_1} \wedge \overrightarrow{PH_1} - \overrightarrow{PA_2} \wedge \overrightarrow{PH_2}$$

Suy ra

$$2S_{[PA_1A_2]} - 2S_{[PH_1H_2]} = \overrightarrow{PA_1} \wedge \overrightarrow{PH_1} - \overrightarrow{PA_2} \wedge \overrightarrow{PH_2} \quad (4)$$

Tương tự có

$$2S_{[PA_2A_3]} - 2S_{[PH_2H_3]} = \overrightarrow{PA_2} \wedge \overrightarrow{PH_2} - \overrightarrow{PA_3} \wedge \overrightarrow{PH_3} \quad (5)$$

$$2S_{[PA_3A_1]} - 2S_{[PH_3H_1]} = \overrightarrow{PA_3} \wedge \overrightarrow{PH_3} - \overrightarrow{PA_1} \wedge \overrightarrow{PH_1} \quad (6)$$

Cộng theo từng vế của (4), (5), (6) và áp dụng tính chất 5 ta có

$$S_{[A_1A_2A_3]} = S_{[H_1H_2H_3]}$$

Từ đó $\Delta A_1A_2A_3$, $\Delta H_1H_2H_3$ cùng hướng và

$$S_{A_1A_2A_3} = S_{H_1H_2H_3}.$$

Tương tự ta có $S_{A_2A_3A_4} = S_{H_2H_3H_4}$,

$S_{A_3A_4A_1} = S_{H_3H_4H_1}$, $S_{A_4A_1A_2} = S_{H_4H_1H_2}$

và tất cả các tam giác trên đều cùng hướng với $A_1A_2A_3A_4$, do đó tứ giác $H_1H_2H_3H_4$ cũng lồi, cùng hướng với $A_1A_2A_3A_4$, suy ra

$$S_{[A_1A_2A_3A_4]} = S_{[H_1H_2H_3H_4]}. \square$$

★**Thí dụ 5.** *Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng*

$$S_{[ABCD]} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\right).$$

Lời giải Ta có

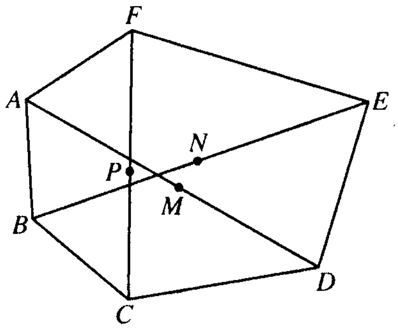
$$S_{[ABCD]} = S_{[ABC]} + S_{[ACD]}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\right) \square$$

Nhận xét. Kết quả trên là sự mở rộng của công thức quen thuộc :

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}.AC.BD.\sin(AC, BD).$$

★**Thí dụ 6.** *Cho lục giác lồi ABCDEF. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AD, BE, CF. Chứng minh rằng M, N, P cùng thuộc một đường thẳng khi và chỉ khi*

$$S_{ABCDEF} = S_{ACE} + S_{BDF}.$$



Hình 35

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử *ABCDEF* có hướng dương (h.35). Theo tính chất 2, 3 và Thí dụ 5 ta có

$$\overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DB}\right)\wedge\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DF}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{DF}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DF}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(S_{[AEC]}+S_{[DABC]}+S_{[ADEF]}+S_{[DBF]}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-S_{ACE}+S_{DABC}+S_{ADEF}-S_{BDF}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(S_{ABCDEF}-S_{ACE}-S_{BDF}\right).$$

Vậy *M, N, P* cùng thuộc một đường thẳng

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}\wedge\overrightarrow{MP} = 0$

$\Leftrightarrow S_{ABCDEF} = S_{ACE} + S_{BDF}.$

Để rèn luyện việc sử dụng tích ngoài của hai vectơ vào việc giải toán, mời các bạn làm một số bài tập dưới đây.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác *ABC* và điểm *M* nào đó khác các đỉnh. Giả sử *AM* cắt *BC* tại *A'*, *BM* cắt *CA* tại *B'*, *CM* cắt *AB* tại *C'*. Chứng minh rằng

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}}+\frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}}+\frac{\overline{MC'}}{\overline{CC'}}=1.$$

Bài 2. Cho tứ giác lồi *ABCD* có *AD = BC*. Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác *ADE, BCF* cân tại *A, B* sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{CBF}$. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng *AB, CD, EF* thẳng hàng.

Bài 3. Cho tứ giác lồi *ABCD*, *AB* cắt *CD* tại *E*, *AD* cắt *BC* tại *F*. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng *AC, BD, EF* thẳng hàng.

Bài 4. Trên ba đường thẳng *a, b, c* theo thứ tự có các điểm *A, B, C* chuyển động với vận tốc đều. Biết rằng tại thời điểm ban đầu *A, B, C* không thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại không quá hai thời điểm mà tại đó *A, B, C* thẳng hàng.

Bài 5. Cho tam giác *ABC* và hai điểm *O, O'*. Giả sử *AO* cắt *BC* tại *A'*, *BO* cắt *CA* tại *B'*, *CO* cắt *AB* tại *C''*, *AO'* cắt *B'C'* tại *A''*, *BO'* cắt *C'A'* tại *B''*, *CO'* cắt *A'B'* tại *C''*. Chứng minh rằng các đường thẳng *A'A'', B'B'', C'C''* đồng quy hoặc đôi một song song.

Bài 6. Cho tam giác *ABC*. Các điểm *A', B', C'* theo thứ tự thuộc các cạnh *BC, CA, AB*. Gọi *A'', B'', C''* tương ứng là các điểm đối xứng của các điểm *A, B, C* theo thứ tự qua các điểm *A', B', C'*. Chứng minh rằng

$$S_{A''B''C''} = 3S_{ABC} + 4S_{A'B'C'}$$

Bài 7. Cho tam giác *ABC*. Các điểm *M, N, P* theo thứ tự chạy trên các đường thẳng *BC, CA, AB* sao cho $\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$

a) Chứng minh rằng các độ dài *AM, BN, CP* tạo thành ba cạnh của một tam giác.

b) Tìm vị trí của *M, N, P* sao cho diện tích tam giác nói trong câu (a) nhỏ nhất.

Bài 8. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi G, I, O theo thứ tự là trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Chứng minh rằng

$$S_{[GOI]} = \frac{(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)}{48S_{[ABC]}}$$

Bài 9. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Gọi X, Y, Z tương ứng là trọng tâm các tam giác ANP, BPM, CMN. Chứng minh rằng

$$S_{ABC} < \frac{9}{2}S_{XYZ}$$

Bài 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. M là một điểm bất kì. X, Y, Z, T, U, V theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng AB, CD, AC, DB, AD, BC. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của XY, ZT, UV. Chứng minh rằng E, F, G thẳng hàng.

VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT BÀI TOÁN TỪ MẶT PHẲNG SANG KHÔNG GIAN

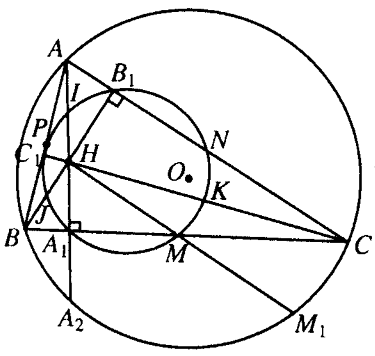
ĐÀO TAM

(Khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)

Các bạn học sinh đã biết nhiều cách giải bài toán sau :

Trong tam giác ABC với các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy ở H ; trung điểm các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự là M, N, P ; trung điểm các đoạn HA, HB, HC theo thứ tự là I, J, K thì chín điểm A_1, B_1, C_1, M, N, P, I, J, K nằm trên cùng một đường tròn (đường tròn Euler).

Dưới đây trình bày một cách giải.



Hình 36

Từ giả thiết suy ra

$$\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{HI},\ \overrightarrow{HB} = 2\overrightarrow{HJ},\ \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HK} \qquad (1)$$

Gọi M_1 là ảnh đối xứng của H qua tâm M, khi đó HBM_1C là hình bình hành (h.36) và

$$\widehat{BM_1C} + \widehat{BAC} = \widehat{BHC} + \widehat{BAC} = \widehat{C_1HB_1} + \widehat{BAC} = 180^\circ.$$

Vậy ABM_1C là tứ giác nội tiếp, suy ra M_1 thuộc đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó

$$\overrightarrow{HM_1} = 2\overrightarrow{HM} \qquad (2)$$

Gọi A_2 là ảnh đối xứng của H qua trục BC, lập luận tương tự có A_2 thuộc đường tròn (O).

Từ đó $$\overrightarrow{HA_2} = 2\overrightarrow{HA_1} \qquad (3)$$

Từ (1), (2), (3) rút ra rằng I, J, K, M, A_1 tương ứng là ảnh của A, B, C, M_1, A_2 qua phép vị tự $V_{\left(H;\frac{1}{2}\right)}$ tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$. Chứng minh tương tự, các điểm N, P, B_1, C_1 là ảnh của các điểm N_1, P_1, B_2, C_2 thuộc (O) qua $V_{\left(H;\frac{1}{2}\right)}$.

Vậy đường tròn đi qua chín điểm nói trên là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự $V_{\left(H;\frac{1}{2}\right)}$. □

Từ cách giải bài toán trên trong mặt phẳng có thể đề xuất bài toán mới tương tự trong không gian như sau.

Cho tứ diện ABCD có các đường cao AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại H, bốn trọng tâm M, N, P, Q của bốn mặt tương ứng đối diện với các đỉnh A, B, C, D và bốn điểm I, J, K, F thuộc HA, HB, HC, HD

$$\frac{HI}{HA}=\frac{HJ}{HB}=\frac{HK}{HC}=\frac{HF}{HD}=\frac{1}{3}$$

thì 12 điểm A_1, B_1, C_1, D_1, M, N, P, Q, I, J, K, F thuộc một mặt cầu (Mặt cầu mười hai điểm).

Bài toán mới đặt ra chỉ đúng cho lớp *các tứ diện trực tâm* tức là tứ diện có các đường cao đồng quy. Các bạn có thể dự đoán bài toán sẽ được giải nhờ sử dụng phép vị tự $V_{\left(H;\frac{1}{3}\right)}$ có tâm H, tỉ số $\frac{1}{3}$.

Để chứng minh chúng ta cần có bổ đề sau :

Trong một tứ diện trực tâm ABCD thì trực tâm H, trọng tâm G và tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện thẳng hàng và G là trung điểm của đoạn OH.

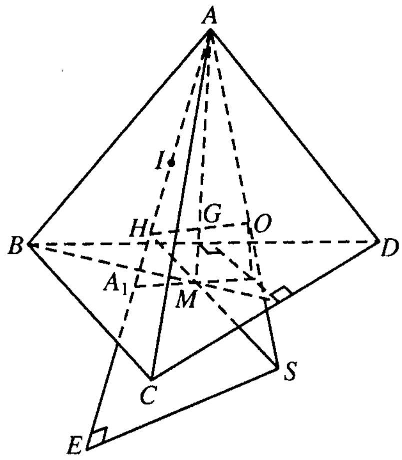
Để chứng minh bổ đề chúng ta sử dụng bài toán quen biết trong hình học phẳng :

Trong một tam giác thì trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp nằm trên một đường thẳng.

Chú ý rằng hình chiếu vuông góc của các điểm G, O, H lên hai mặt phẳng (BCD) và (ACD) tương ứng theo các phương AA_1 và BB_1 là thẳng hàng. Từ đó dẫn tới G, O, H thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau.

Chứng minh bài toán về mặt cầu mười hai điểm :

Giả sử S là điểm đối xứng của A qua tâm O của mặt cầu (O) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$; H là trực tâm và G là trọng tâm của tứ diện đó. Gọi E là điểm sao cho $\overrightarrow{HE}=3\overrightarrow{HA_1}$. (h.37)



Hình 37

Theo mệnh đề nêu trên G, M thuộc mặt phẳng (HAO) và

$$\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG})$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}-\frac{1}{3}\overrightarrow{GO}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}-\frac{1}{6}\overrightarrow{HO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{AO})$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OS})=\frac{1}{3}\overrightarrow{HS}.$$

Vậy $\overrightarrow{HM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HS}$ (4)

Từ hệ thức (4) và $\overrightarrow{HA_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$ suy ra $A_1M\,//\,ES$ và từ đó $\widehat{AES}=90^{\circ}$, hay E thuộc mặt cầu (O).

Các đẳng thức $\overrightarrow{HI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$; $\overrightarrow{HM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HS}$; $\overrightarrow{HA_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$ chứng tỏ rằng các điểm I, A_1, M