MỘT BỔ ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC THÚ VỊ

Hoàng Đức Hưng
10 Toán - THPT Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương
14/9/2014

Bất đẳng thức (BĐT) là một trong những mảng khó của toán học sơ cấp. Do đó, trong các đề thi HSG các cấp cũng như kì thi Vô địch Toán Quốc Tế (IMO) thường có những BĐT hay và thú vị. Trong bài viết nhỏ này, mình xin được giới thiệu một bổ đề BĐT rất hữu hiệu trong việc giải các BĐT, phát biểu như sau:

► Cho $a, b, c \geq 0$. Khi đó:

$$(a+b+c)^3 \geq \frac{27}{4}(a^2b+b^2c+c^2a+abc)$$

BĐT rõ ràng có hình thức khá cồng kềnh. Từ đó, ta nghĩ tới hướng CM bằng kĩ thuật chuẩn hóa vì nhận thấy vai trò các biến là như nhau.

CM: Chuẩn hóa $a+b+c=3$. Khi đó, ta phải CM:

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \leq 4 \qquad (*)$$

Giả sử b nằm giữa a và c

$$c(b-a)(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow b^2c-bc^2-abc+c^2a \leq 0 \Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc \leq a^2b+b^2c+2abc$$

$$\Leftrightarrow VT \leq b(a+c)^2 = b(3-b)^2$$

Như vậy, cần CM: $b(3-b)^2 \leq 4 \Leftrightarrow (b-1)^2(b-4 \leq 0)$ (điều này đúng)
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1; (a,b,c)=(2;1;0)$ và hoán vị □
Vì dấu bằng xảy ra tại $(2;1;0)$ nên ta có thể làm khó BĐT $(*)$bằng cách bỏ abc ở VT:

$$a^2b+b^2c+c^2a \leq 4$$

Một dạng tương đương của $(*)$là:

$$b^2a+c^2b+a^2c+abc \leq 4$$

Bây giờ, ta sử dụng BĐT $(*)$để giải quyết các bài toán sau

CÁC BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Bài toán 1: Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa $a+b+c=3$. CMR:

$$a^2+b^2+c^2 \geq a^2b+b^2c+c^2a$$

VP của BĐT đã gợi ý cho ta hướng đi. Cộng vào mỗi vế của BĐT abc, ta được:

$$a^2+b^2+c^2+abc \geq a^2b+b^2c+c^2a+abc$$

Mặt khác, theo $(*)$: $a^2b+b^2c+c^2a+abc \leq 4$. Do đó, ta phải CM:

$$a^2+b^2+c^2+abc \geq 4$$

Đây là một BĐT có nhiều cách CM, ta có thể dùng *Schur* , Hàm số,... Nhưng trong khuôn khổ bài viết, mình sẽ không CM BĐT này □

Vân dụng Bài toán 1, ta thu được hai BĐT sau đây:

Bài toán 2: Cho $a,b,c \geq 0, a+b+c=3$. CMR:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a^2+b^2+c^2$$

Bài toán 3: Cho $a,b,c \geq 0, a+b+c=3$. CMR:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq 4$$

Bài toán 4 [Phạm Kim Hùng]: Cho $a,b,c \geq 0, a+b+c=3$. CMR:

$$a\sqrt{1+b^3}+b\sqrt{1+c^3}+c\sqrt{1+a^3} \leq 5$$

Lời giải: Áp dụng BĐT $AM-GM$, ta có;

$$a\sqrt{1+b^3}=a\sqrt{(1+b)(b^2-b+1)} \leq a.\frac{1+b+b^2-b+1}{2}=\frac{ab^2+2a}{2}$$

Tương tự với các BĐT còn lại, cộng theo vế, ta có:

$$VT \leq \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{2}+a+b+c$$

Mặt khác, theo $(*)$: $ab^2+bc^2+ca^2 \leq 4$
Do đó: $VT \leq 5$ $(Q.E.D)$ □

Nhiều khi ta phải sử dụng các kĩ thuật CMBĐT để vận dụng bổ đề một cách hiệu quả nhất

Bài toán 5: Cho $a,b,c \geq 0, a+b+c=3$. CMR:

$$\frac{a}{b^3+16}+\frac{b}{c^3+16}+\frac{c}{a^3+16} \geq \frac{1}{6}$$

Lời giải: Ta có:

$$\frac{a}{b^3+16}=\frac{1}{16}\cdot\frac{16a}{b^3+16}=\frac{1}{16}\cdot\frac{a(b^3+16)-ab^3}{b^3+16}=\frac{1}{16}\left(a-\frac{ab^3}{b^3+2^3+2^3}\right)$$

Áp dụng BĐT $AM-GM$, ta có:

$$b^3+2^3+2^3\geq 3\sqrt[3]{b^3.2^3.2^3}=12b$$

Do đó:

$$\frac{1}{16}.\left(a-\frac{ab^3}{b^3+16}\right)\geq\frac{1}{16}\left(a-\frac{ab^2}{12}\right)$$

Tương tự với các BĐT còn lại, cộng theo vế, ta được:

$$VT\geq\frac{1}{16}\left(3-\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{12}\right)$$

Ta phải CM:

$$\frac{1}{16}\left(3-\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{12}\right)\geq\frac{1}{6}\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2\leq 4$$

Tuy nhiên, đây lại là trường hợp đặc biệt của $(*)$nên BĐT được CM hoàn toàn
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (a,b,c)\in\{(1;2;0);(0;1;2);(2;0;1)\}$

Trong các bài toán BĐT, thông thường những BĐT ít biến sẽ dễ CM hơn là các BĐT nhiều biến. Vì vậy, một ý tưởng ta có thể áp dụng bổ đề BĐT trên để đưa bài toán về ít biến hơn:

Bài toán 6 [Võ Quốc Bá Cẩn]: Cho $a,b,c\geq 0, a+b+c=3$. CMR:

$$\frac{1}{ab^2+8}+\frac{1}{bc^2+8}+\frac{1}{ca^2+8}\geq\frac{1}{3}$$

Lời giải: BĐT cần CM tương đương với:

$$3\sum(ab^2+8)(bc^2+8)\geq\prod(ab^2+8)$$

Để cho gọn, ta đặt $p=a^2b+b^2c+c^2a, q=ab^2+bc^2+ca^2, r=abc$. Ta có

$$3pr+48q+576\geq r^2+64q+8pr+512$$

$$\Leftrightarrow 16q+5pr+r^3\leq 64$$

Theo BĐT *Schur* :

$$(a+b+c)^3 \geq 3abc + 4(ab^2 + bc^2 + ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a)$$

$$\Leftrightarrow 27 \geq 3r + 4(p+q)$$

Lại theo $(*)$, ta có:

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq 4 \Leftrightarrow q \leq 4 - r$$

Xét hiệu:

$$16q + 5pr + r^3 - 64 = 11q + 5(p+q) + 5p(r-1) - 64 \leq 11(4-r)$$
$$+\frac{5}{4}(27 - 3r + 5(4-r)(r-1) + r^3 - 64 = \frac{1}{4}(r-1)(4r^2 - 16r + 25)$$

Mặt khác:

$$r = abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27} = 1$$

$$4r^2 - 16r + 25 > 0$$

Nên ta có $Q.E.D$ □

► Một kết quả đầy ý nghĩ rút ra từ BĐT $(*)$như sau:
Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. CMR:

$$\frac{a}{4-b} + \frac{b}{4-c} + \frac{c}{4-a} \leq 1 \qquad (**)$$

CM bằng cách biến đổi tương đương □

Với kết quả $(**)$,ta sẽ giải quyết được một bài toán hay sau:

Bài toán 7: Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. CMR:

$$\frac{a^2b}{1+a+b} + \frac{b^2c}{1+b+c} + \frac{c^2a}{1+c+a} \leq 1$$

Lời giải: BĐT cần CM tương đương với:

$$4\left(\frac{a^2b}{1+a+b} + \frac{b^2c}{1+b+c} + \frac{c^2a}{1+c+a}\right) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+\frac{a^2bc}{1+a+b}+\frac{ab^2c}{1+b+c}+\frac{abc^2}{1+c+a}\le 4$$

$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc\left(\frac{a}{4-b}+\frac{b}{4-c}+\frac{c}{4-a}\right)\le 4$$

Từ $(**) \Rightarrow VT \le a^2b+b^2c+c^2a+abc\le 4$. Nhưng đây chính là BĐT $(*)$nên ta có $Q.E.D$ □

► Ngoài ra, ta còn có một bổ đề BĐT khác với hình thức khác giống $(*)$
Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. CMR:

$$a^2b+b^2c+c^2a-abc\le 2 \qquad (***)$$

Tất nhiên, cách CM tương tự như $(*)$, đó là sử dụng dồn biến. Ta cũng có một mở rộng của $(***)$như sau:
Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. CMR:

$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\le 1$$

Qua quá trình nghiệm thu, ta có thể mở rộng điều kiện của $(**)$thành $a^2+b^2+c^2$, hoặc có thể là $a^n+b^n+c^n=3$ với $n\in \mathbb{N}^*$, n càng lớn thì BĐT càng yếu.

Do đó, ta có một BĐT khá hay sau:

Bài toán 8 [HĐH]: Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. CMR:

$$\frac{a}{(4-b)(b+2)}+\frac{b}{(4-c)(c+2)}+\frac{c}{(4-a)(a+2)}\le \frac{1}{3}$$

Thực chất BĐT này là kết quả của việc cộng hai vế BĐT $(****)$và sự mở rộng $(**)$với điều kiện $a^2+b^2+c^2=3$

★ *Tổng quát một số kết quả trên, ta thu được:*

$\boxed{1}$ Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Khi đó, $\forall n\ge 2, n\in \mathbb{N}$ thì:

$$a^n b+b^n c+c^n a\le \max\{3, \frac{3^{n+1}\, n^n}{(n+1)^{n+1}}\}$$

$\boxed{2}$ Cho $a,b,c,d\ge 0; a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=n$. CMR:

$$\frac{a_1}{a_2+(n-1)}+\frac{a_2}{a_3+(n-1)}+...+\frac{a_n}{a_1+(n-1)}\le 1$$

Bổ đề BĐT trên còn có rất nhiều ứng dụng thú vị, mong bạn đọc khám phá, chí ít là qua các bài tập sau

BÀI TẬP

$\boxed{1}$ Cho $a, b, c \geq 0, a+b+c=3$. CMR:

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b} \leq \frac{1}{3}$$

$\boxed{2}$ Cho $a, b, c \geq 0, a+b+c=3$. CMR:

$$\frac{ab}{b+c}+\frac{bc}{c+a}+\frac{ca}{a+b} \leq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}$$

$\boxed{3}$ [TTT số 120] Cho $a, b, c \geq 0, a^3+b^3+c^3=3$. CMR:

$$\frac{a}{b^2+5}+\frac{b}{c^2+5}+\frac{c}{a^2+5} \leq \frac{1}{2}$$

$\boxed{4}$ Cho $a, b, c \geq 0, a+b+c=3$. CMR:

$$\frac{ab}{\sqrt{b+c}}+\frac{bc}{\sqrt{c+a}}+\frac{ca}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{2\sqrt{2}}$$

--------------- Hết ----------------