

## PHƯƠNG TRÌNH HÀM CAUCHY TỔNG QUÁT

Trong bài giảng này chúng tôi sẽ đề cập đến một lớp bài toán phương trình hàm dạng

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = g(H(x, y)), \quad (1)$$

trong đó  $f$  và  $g$  là các hàm phải tìm còn  $H$  là hàm đã cho. Khi  $g \equiv 0$  thì (1) trở thành phương trình hàm Cauchy. Các hàm số ở đây được xét là hàm số thực, tức là tập xác định và tập giá trị của nó là  $\mathbf{R}$  hoặc tập con của  $\mathbf{R}$ .

### 1. Phương trình hàm Cauchy và Pexider

Xét phương trình Cauchy

$$f(x) + f(y) = f(x+y). \quad (2)$$

**Bài toán 1.1:** Chứng minh rằng tất cả các hàm  $f$  liên tục trên  $\mathbf{R}$  thỏa mãn phương trình Cauchy (2) đều có dạng  $f(x) = cx$ , ở đây  $c$  là hằng số bất kỳ.

**Bài toán 1.2:** Chứng minh rằng tất cả các hàm  $f$  liên tục tại một điểm thỏa mãn phương trình Cauchy (2) đều có dạng  $f(x) = cx$ , ở đây  $c$  là hằng số bất kỳ.

**Bài toán 1.3:** Chứng minh rằng tất cả các hàm  $f$  không âm (không dương) với  $x$  dương đủ nhỏ thỏa mãn (2) đều có dạng  $f(x) = cx$ , ở đây  $c$  là hằng số dương (âm) bất kỳ.

**Bài toán 1.4:** Chứng minh rằng tất cả các hàm  $f$  bị chặn trên một khoảng đủ nhỏ thỏa mãn (2) đều có dạng  $f(x) = cx$ , ở đây  $c$  là hằng số.

**Bài toán 1.5:** Chứng minh rằng tất cả các hàm  $f$  bị chặn một phía (bị chặn trên hoặc bị chặn dưới) trên một đoạn  $[a, b]$  cho trước và thỏa mãn (2) đều có dạng  $f(x) = cx$ , ở đây  $c$  là hằng số.

**Bài toán 1.6:** Chứng minh rằng tất cả các hàm  $f$  đơn điệu thỏa mãn (2) đều có dạng  $f(x) = cx$ , ở đây  $c$  là hằng số.

**Bài toán 1.7:** Chứng minh rằng tất cả các hàm  $f$  khả tích trên mọi đoạn hữu hạn và thỏa mãn (2) đều có dạng  $f(x) = cx$ , ở đây  $c$  là hằng số bất kỳ.

**Định lý 1:** Giả sử  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  là nghiệm của (2) với  $c = f(1) > 0$ . Khi đó ta có các khẳng định sau là tương đương.

(i)  $f$  liên tục tại một điểm  $x_0$ .

(ii)  $f$  liên tục.

- (iii)  $f$  là hàm đơn điệu tăng.
- (iv)  $f$  không âm với mọi  $x \geq 0$ .
- (v)  $f$  bị chặn trên trên một đoạn hữu hạn.
- (vi)  $f$  bị chặn dưới trên một đoạn hữu hạn.
- (vii)  $f$  bị chặn trên (dưới) trên một tập bị chặn có độ đo Lebesgue dương.
- (viii)  $f$  bị chặn trên một đoạn hữu hạn.
- (ix)  $f(x) = cx$ .
- (x)  $f$  khả tích Lebesgue địa phương.
- (xi)  $f$  khả vi
- (xii)  $f$  đo được Lebesgue.

**Chú ý:** Một câu hỏi đặt ra là có tại hay không những nghiệm không tuyến tính ( $f(x) \neq cx$ ) của phương trình Cauchy (2)? Lý thuyết của phương trình hàm đã có câu trả lời thông qua khái niệm cơ sở Hamel.

**Định nghĩa:** Cho  $S$  là một tập con của  $R$ . Khi đó một con  $B$  của  $S$  được gọi là một cơ sở Hamel của  $S$  nếu với mọi số thuộc  $S$  đều biểu thị tuyến tính qua các phần tử của  $B$  một cách duy nhất với các hệ số là các số hữu tỷ.

**Định lý 2:** Nghiệm tổng quát của phương trình Cauchy (2) có dạng

$$f(x) = r_1 g(b_1) + r_2 g(b_2) + \dots + r_n f(b_n),$$

trong đó  $B$  là cơ sở Hamel của  $R$  và

$$x = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_n b_n, \quad r_i \in \mathbf{Q} \text{ và } b_i \in B,$$

và  $g$  là một hàm tùy ý xác định trên cơ sở Hamel  $B$ .

Phương trình hàm

$$f(x+y) = h(x) + g(y) \tag{3}$$

được gọi là phương trình Pexider.

**Bài toán 1.8:** Chứng minh rằng nghiệm tổng quát của (3) là

$$f(t) = A(t) + a + b, \quad g(t) = A(t) + a, \quad h(t) = A(t) + b,$$

trong đó  $A$  là hàm bất kỳ thỏa mãn phương trình Cauchy (2) và  $a, b$  là các hằng số bất kỳ.

**Bài toán 1.9:** Cho  $f, g, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  thỏa mãn (3), khi đó nếu một trong các hàm  $f, g, h$  là đo được hoặc bị chặn dưới, hoặc bị chặn trên, hoặc liên tục tại một điểm thì các hàm  $f, g, h$  là liên tục. Hơn nữa chúng có dạng

$$f(t) = ct + a + b, \quad g(t) = ct + a, \quad h(t) = ct + b,$$

ở đây  $a, b, c$  là các hằng số bất kỳ.

## 2. Phương trình hàm Cauchy tổng quát

Trước hết chúng ta xét một số trường hợp đặc biệt của (1)

+  $H(x, y) = xy$ : (1) trở thành

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = g(xy). \quad (4)$$

+  $H(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  và  $g = -f$ :

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = -f(x^{-1} + y^{-1}). \quad (5)$$

+  $H(x, y) = \frac{xy(x+y)}{x^2 + y^2 + xy}$  và  $g = f$ :

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = f\left(\frac{xy(x+y)}{x^2 + y^2 + xy}\right). \quad (6)$$

Ta nhận thấy rằng các phương trình (4)-(6) là những dạng bài toán quen thuộc trong lý thuyết phương trình hàm.

**Nhận xét:**

+ Nếu  $g$  là hàm hằng, tức là  $g(x) = c$  thì với bất cứ hàm  $H$  đã cho nào (1) đều tương đương với

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = c.$$

Rõ ràng nghiệm tổng quát của phương trình trên là

$$f(x) = A(x) + c,$$

ở đây  $A(x)$  là một hàm cộng tính bất kỳ, nghĩa là  $A(x)$  là nghiệm của phương trình Cauchy (2). Vậy nghiệm của (1) trong trường hợp này là

$$f(x) = A(x) + c \text{ và } g(x) = c.$$

+ Tương tự trong trường hợp  $H(x, y) = c$ , công thức nghiệm của (1) là

$$f(x) = A(x) + g(c) \text{ và } g \text{ là hàm bất kỳ}$$

với  $A(x)$  cũng là một hàm cộng tính tùy ý.

Chúng ta gọi nghiệm  $(f, g)$  của phương trình (1) là tầm thường nếu  $f$  là afin, tức là  $f(x) = A(x) + c$ , trong đó  $A(x)$  là cộng tính và  $c$  là hằng số.

+ Đề ý rằng các phương trình (4)-(6) là dạng phương trình (1) với  $H(x, y)$  có dạng sau

$$H(x, y) = \psi(\phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y)), \quad (7)$$

vì dễ thấy (4)-(6) tương ứng với việc chọn  $\phi(x) = x^2, \ln x, x^{-1}$  và  $\psi(u) = -u/2, e^{-u}, u^{-1}$ .

Bây giờ chúng ta xét một trường hợp đặc biệt của (1) có dạng như sau

$$f(x) + f(y) - f(x + y) = g(\phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y)). \quad (8)$$

Rõ ràng nếu  $\phi$  là afin thì với mọi  $g$  phương trình (8) đều có nghiệm  $f$  là afin, tức là (8) có nghiệm tầm thường, vì vậy chúng ta xét  $\phi$  không là afin và ký hiệu  $I$  là  $(\alpha, +\infty)$  (hoặc  $[\alpha, +\infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$ ,  $(-\infty, -\alpha)$ ,  $(-\infty, -\alpha]$ ) trong đó  $\alpha \geq 0$ .

**Bài toán 2.1:** Cho  $\phi : I \rightarrow \mathbf{R}$  là giải tích và không afin, hãy tìm tất cả các nghiệm của phương trình (8).

**Giải:** Giả sử  $f$  và  $g$  là nghiệm của (8). Đặt  $F(x, y) = f(x) + f(y) - f(x + y)$ , thì  $F$  là nghiệm của phương trình

$$F(x, y) + F(x + y, z) = F(x, y + z) + F(y, z). \quad (9)$$

Do  $f$  là nghiệm của (8) nên ta có

$$F(x, y) = g(\phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y)),$$

vì vậy đẳng thức (9) tương đương với

$$\begin{aligned} & g(\phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y)) + g(\phi(x + y) + \phi(z) - \phi(x + y + z)) \\ &= g(\phi(x) + \phi(x + y + z) - \phi(y + z)) + g(\phi(y) + \phi(z) - \phi(y + z)). \end{aligned} \quad (10)$$

Đặt

$$\begin{cases} u = \phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y), \\ v = \phi(x + y) + \phi(z) - \phi(x + y + z), \\ w = \phi(y) + \phi(z) - \phi(y + z), \end{cases} \quad (11)$$

chúng ta có thể viết lại phương trình (10) dưới dạng sau

$$g(u) + g(v) = g(u + v - w) + g(w). \quad (12)$$

Ta sẽ chỉ ra rằng (11) là một phép đổi biến, tức là định thức Jacobi của phép đổi biến (11) là khác 0. Thật vậy,

$$\begin{aligned}\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} &= \det \begin{bmatrix} \phi'(x) - \phi'(x+y) & \phi'(y) - \phi'(x+y) & 0 \\ \phi'(x+y) - \phi'(x+y+z) & \phi'(x+y) - \phi'(x+y+z) & \phi'(z) - \phi'(x+y+z) \\ 0 & \phi'(y) - \phi'(y+z) & \phi'(z) - \phi'(y+z) \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} \phi'(x) - \phi'(x+y) & \phi'(y) - \phi'(x) & 0 \\ \phi'(x+y) - \phi'(x+y+z) & 0 & \phi'(z) - \phi'(x+y+z) \\ 0 & \phi'(y) - \phi'(y+z) & \phi'(z) - \phi'(y+z) \end{bmatrix} \\ &= -(\phi'(x) - \phi'(x+y))(\phi'(z) - \phi'(x+y+z))(\phi'(y) - \phi'(y+z)) \\ &\quad - (\phi'(x+y) - \phi'(x+y+z))(\phi'(y) - \phi'(x))(\phi'(z) - \phi'(y+z)).\end{aligned}$$

Giả sử tồn tại một tập con mở khác rỗng của  $I^3$  mà định thức Jacobi đồng nhất bằng 0, khi đó do  $\phi$  giải tích nên suy ra định thức Jacobi đồng nhất bằng 0 trên  $I^3$ , tức là  $u, v, w$  là các hàm phụ thuộc. Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}\frac{D(u, v)}{D(x, y)} &= \det \begin{bmatrix} \phi'(x) - \phi'(x+y) & \phi'(y) - \phi'(x+y) \\ \phi'(x+y) - \phi'(x+y+z) & \phi'(x+y) - \phi'(x+y+z) \end{bmatrix} \\ &= (\phi'(x) - \phi'(y))(\phi'(x+y) - \phi'(x+y+z)).\end{aligned}$$

Từ  $\phi$  là giải tích và không là afin nên  $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$  không thể đồng nhất bằng 0 trên

con mở khác rỗng của  $I^2$ . Vậy ta nhận được  $u, v, w$  là các hàm phụ thuộc và  $u, v$  là các hàm độc lập, suy ra tồn tại hàm khả vi  $\sigma$  sao cho

$$w(x, y, z) = \sigma(u(x, y, z), v(x, y, z)), \quad x, y, z \in I.$$

Vậy chúng ta nhận được

$$\begin{aligned}\phi(y) + \phi(z) - \phi(y+z) \\ = \sigma(\phi(x) + \phi(y) - \phi(x+y), \phi(x+y) + \phi(z) - \phi(x+y+z)), \quad \forall (x, y, z) \in I^3.\end{aligned}$$

Thay đổi vai trò của  $x$  và  $y$  cho nhau trong hệ thức trên suy ra

$$\phi(y) + \phi(z) - \phi(y+z) = \phi(x) + \phi(z) - \phi(x+z), \quad \forall (x, y, z) \in I^3$$

hay

$$\phi(y) - \phi(y+z) = \phi(x) - \phi(x+z), \quad \forall (x, y, z) \in I^3.$$

Đề ý rằng vế trái của đẳng thức trên không phụ thuộc vào  $x$  nên vế bên phải là một hàm số chỉ theo biến  $z$ , điều này không thể xảy ra vì giả thiết  $\phi$  không là afin. Vậy không tồn tại một tập con mở khác rỗng của  $I^3$  mà định thức Jacobi đồng nhất 0 trên đó, nghĩa là  $u, v, w$  là các hàm độc lập với mọi  $(x, y, z) \in I^3$ . Bởi vì  $w$

là độc lập đối với  $u$  và  $v$  nên phương trình (12) có thể xem như là phương trình Pexider

$$g(u) + g(v) = h(u + v)$$

với mọi giá trị của  $(u, v, w)$  nhận được từ  $(x, y, z) \in I^3$  qua phép đổi biến (11). Tuy nhiên do  $u, v, w$  là các hàm độc lập nên phương trình Pexider có tập xác định là tập mở khác rỗng trong  $\mathbf{R}^2$ . Theo kết quả của phương trình Pexider với mọi  $u = \phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y)$  với  $(x, y) \in I,^2$  hàm  $g$  có dạng

$$g(u) = A_1(u) + c,$$

ở đây  $A_1$  là hàm cộng tính và  $c$  là hằng số bất kỳ.

**C2:** Ta có (12) tương đương với

$$g((u - w) + w) - g(w) + g((v - w) + w) - g(w) = g((u - w) + (v - w) + w) - g(w),$$

hay

$$g(s + t + w) - g(w) = g(s + w) - g(w) + g(t + w) - g(w).$$

Đặt  $\varphi(z) = g(z + w) - g(w)$  ta nhận được

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

hay

$$\varphi(x) = A_1(x),$$

trong đó  $A_1(x)$  là một hàm cộng tính bất kỳ.

Suy ra  $g(x + y) - g(x) = A_1(x)$ , đặt  $g(x) = A_1(x) + \bar{g}(x)$  khi đó ta nhận được  $\bar{g}(x + y) = \bar{g}(x)$ , tức là  $\bar{g}(x) \equiv c$  với  $c$  là hằng số. Vậy

$$g(u) = A_1(u) + c,$$

trong đó  $A_1$  là hàm cộng tính và  $c$  là hằng số bất kỳ.

Thay biểu thức của hàm  $g$  này vào phương trình (8), ta nhận được

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) - f(x + y) &= A_1(\phi(x) + \phi(y) - \phi(x + y)) + c \\ &= A_1 \circ \phi(x) + A_1 \circ \phi(y) - A_1 \circ \phi(x + y) + c \end{aligned}$$

hay tương đương với

$$(f(x) - A_1 \circ \phi(x) - c) + (f(y) - A_1 \circ \phi(y) - c) = (f(x + y) - A_1 \circ \phi(x + y) - c).$$

Điều này chứng tỏ  $f - A_1 \circ \phi - c$  là hàm cộng tính, tức là

$$f(x) = A_1 \circ \phi(x) + A_2(x) + c, \quad \forall x \in I,$$

trong đó  $A_2$  cũng là một hàm cộng tính bất kỳ.

Ngược lại, rõ ràng các hàm  $f$  và  $g$  xác định như trên thỏa mãn phương trình (8). Vậy công thức nghiệm của phương trình (8) là

$$\begin{cases} f(x) = A_1 \circ \phi(x) + A_2(x) + c, & x \in I, \\ g(s) = A_1(s) + c, & s \in \{\phi(x) + \phi(y) - \phi(x+y) \mid x, y \in I\}, \end{cases}$$

ở đây  $A_1, A_2$  là các hàm cộng tính bất kỳ và  $c$  là hằng số tùy ý.  $\square$

**Bài toán 2.2:** Xét  $I = \mathbf{R}$  và  $\phi(x) = -x^2/2$ , khi đó phương trình (8) trở về phương trình (4). Theo Bài toán 2.1 thì nghiệm tổng quát của phương trình (4) là

$$\begin{cases} g(s) = A_1(s) + c, & s \in \mathbf{R}, \\ f(x) = A_1\left(-\frac{x^2}{2}\right) + A_2(x) + c, & x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

trong đó  $A_1, A_2$  là các hàm cộng tính và  $c$  là hằng số bất kỳ. Để ý rằng  $A_1$  là hàm cộng tính nên

$$A_1\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}A_1(x^2), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Từ đó nếu đặt  $B_1 = -\frac{1}{2}A_1$  thì nghiệm tổng quát của phương trình (4) được viết dưới dạng gọn hơn như sau

$$\begin{cases} g(s) = -2B_1(s) + c, & \forall s \in \mathbf{R}, \\ f(x) = B_1(x^2) + A_2(x) + c, & \forall x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

với  $B_1, A_2$  là các hàm cộng tính và  $c$  là hằng số tùy ý.

**Ví dụ 2.1:** Tìm  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  liên tục trên  $\mathbf{R}$  thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, & \forall x, y \in \mathbf{R}, \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

**Bình luận:** Từ hàm  $f$  thỏa mãn điều kiện

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

ta suy ra  $f$  là nghiệm của Bài toán 2.2 với  $g(s) = -2s$ . Theo kết quả của bài toán này ta có  $B_1(s) = s, \forall s \in \mathbf{R}$  và  $f(x) = x^2 + A(x)$ , trong đó  $A(x)$  là một hàm cộng tính

bất kỳ. Vì vậy ta sử dụng phép thế  $f(x) = g(x) + x^2$  thì sẽ nhận được phương trình Cauchy đối với ẩn mới  $g$ .

**Giải:** Đặt  $f(x) = g(x) + x^2$ , khi đó do  $f$  liên tục trên  $\mathbf{R}$  nên  $g$  cũng liên tục trên  $\mathbf{R}$  và điều kiện của bài toán tương đương với

$$\begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y), \\ g(1) = 0. \end{cases}$$

Đây là phương trình Cauchy, nên nghiệm của bài toán là  $g(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ . vậy bài toán đã cho có duy nhất nghiệm là  $f(x) = x^2$ .  $\square$

**Ví dụ 2.2:** Tìm  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy, \forall x, y \in \mathbf{R}, \\ f(x) = x^4 f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \neq 0. \end{cases}$$

**Giải:**

Đặt  $f(x) = g(x) + x^2$  ta có bài toán trở thành

$$\begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbf{R}, \\ g(x) = x^4 g\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \neq 0. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Từ điều kiện thứ nhất của (2.2.1) suy ra

$$g(2t) = 2g(t), \forall t \in \mathbf{R} \quad (2.2.2)$$

và

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = 2g\left(\frac{1}{2t}\right), \forall t \neq 0. \quad (2.2.3)$$

Mặt khác theo điều kiện thứ hai của (2.2.1) thì

$$g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{g(t)}{t^4}, \forall t \neq 0 \text{ và } g\left(\frac{1}{2t}\right) = \frac{g(2t)}{16t^4}, \forall t \neq 0.$$

Thế hai biểu thức trên vào (2.2.3) ta nhận được

$$g(2t) = 16g(t), \forall t \neq 0.$$

Hơn nữa, chú ý rằng từ điều kiện thứ nhất của (2.2.1) ta suy ra  $g(0) = 0$ , do đó ta có



$$g(2t) = 16g(t), \forall t \in \mathbf{R}.$$

Kết hợp đẳng thức này với (2.2.2) ta nhận được  $g(t) = 0, \forall t \in \mathbf{R}$ .

Thử lại ta có  $f(x) = x^2$  thỏa mãn, vậy bài toán có duy nhất nghiệm  $f(x) = x^2$ .  $\square$

**Nhận xét:** Ràng buộc thứ hai là một trong 4 ràng buộc đại số quen thuộc của phương trình hàm Cauchy cộng tính. Chúng ta có kết quả quen thuộc sau.

"Cho  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  thỏa mãn (2), khi đó các khẳng định sau là tương đương

(i)  $f(xy) = xf(y) + yf(x), \forall x, y \in \mathbf{R}.$

(ii)  $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x), \forall x \neq 0.$

(iii)  $f(x^2) = 2xf(x), \forall x \in \mathbf{R}.$

(iv)  $(f(x^2))^2 = 4x^2(f(x))^2, \forall x \in \mathbf{R}."$

**Ví dụ 2.3:** Xác định tất cả các hàm  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2012xy, \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

**Giải:** Đặt  $f(x) = g(x) + 1006x^2$ , khi đó điều kiện đã cho tương đương với

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

Vậy nghiệm của bài toán là  $f(x) = A(x) + 1006x^2$  với  $A$  là hàm cộng tính bất kỳ.  $\square$

**Bài toán 2.3:** Bây giờ ta lấy  $I = (0, +\infty)$ ,  $\phi(x) = -\ln x$ ,  $g(x) = h(e^x)$  thì phương trình (8) trở thành

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = h(x^{-1} + y^{-1}), \forall x, y > 0.$$

**Giải:** Áp dụng kết quả của Bài toán 2.1, ta nhận được nghiệm của bài toán đã cho là

$$\begin{cases} h(e^s) = A_1(s) + c, \forall s, \\ f(x) = -A_1(\ln x) + A_2(x) + c, \forall x > 0 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} h(s) = A_1(\ln s) + c, \forall s > 0, \\ f(x) = -A_1(\ln x) + A_2(x) + c, \forall x > 0, \end{cases}$$

ở đây  $A_1, A_2$  là các hàm cộng tính và  $c$  là hằng số bất kỳ.  $\square$

**Bình luận:** Khi lấy  $h = -f$  thì ta nhận được công thức nghiệm của (5) là

$$f(x) = A(\ln x),$$

trong đó  $A$  là hàm cộng tính tùy ý. Còn khi lấy  $h = f$  thì ta có kết luận phương trình

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = f(x^{-1} + y^{-1}), \forall x, y \neq 0$$

chỉ có nghiệm tầm thường  $f(x) = c, \forall x$  với  $c$  là hằng số bất kỳ.

**Chú ý:** Ta biết rằng nghiệm của phương trình Cauchy logarit

$$f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \neq 0 \quad (13)$$

có dạng

$$f(x) = A(\ln |x|), \forall x \neq 0,$$

trong đó  $A$  là hàm cộng tính bất kỳ.

Thật vậy, từ (13) cho  $x = y = t \neq 0$  và  $x = y = -t \neq 0$  ta có

$$f(t^2) = 2f(t) \text{ và } f(t^2) = 2f(-t), \forall t \neq 0,$$

do đó

$$f(t) = f(-t), \forall t \neq 0. \quad (2.3.1)$$

Giả sử (13) thỏa mãn với  $x, y > 0$ , khi đó đặt  $x = e^t, y = e^s$  và  $g(s) = f(e^s)$  thì (13) tương đương với phương trình Cauchy

$$g(s+t) = g(s) + g(t).$$

Suy ra  $f(x) = A(\ln x), \forall x > 0$ . Mặt khác theo (2.3.1) ta nhận được nghiệm tổng quát của (13) là

$$f(x) = A(\ln |x|), \forall x \neq 0,$$

trong đó  $A$  là một hàm cộng tính bất kỳ.

Vậy chúng ta nhận được khẳng định “Các phương trình (5) và (13) là tương đương với mọi  $x, y > 0$ .”

**Bài toán 2.4:** Chứng minh rằng các phương trình (5) và (13) là tương đương với nhau trên  $(0, +\infty)$ .

**Giải:** Giả sử  $f$  là nghiệm của (5), khi đó từ (5) với  $y = x^{-1}$  suy ra

$$f(x) + f(x^{-1}) - f(x + x^{-1}) = -f(x + x^{-1}), \forall x > 0$$

hay

$$f(x^{-1}) = -f(x), \forall x > 0 \quad (2.4.1)$$

và

$$f(1) = 0. \quad (2.4.2)$$

Đặt  $F(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$ , do  $f$  là nghiệm của (5) nên

$$F(x, y) = f(x^{-1} + y^{-1}), \forall x, y > 0$$

và dễ dàng kiểm tra được

$$F(x + y, z) + F(x, y) = F(x, y + z) + F(y, z)$$

hay

$$f\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z}\right) + f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z}\right) + f\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right), \forall x, y, z > 0. \quad (2.4.3)$$

Xét  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  với  $y, z > 0$ , khi đó ta có  $y, z > 1$  và, hơn nữa

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} = \frac{y^2 + xy - x}{y(x+y)} \quad \text{và} \quad \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x} = \frac{y^2 + xy - x}{xy^2}.$$

Áp dụng (2.4.2) vào (2.4.3) ta nhận được

$$f\left(\frac{y^2 + xy - x}{y(x+y)}\right) + f\left(\frac{x+y}{xy}\right) = f\left(\frac{y^2 + xy - x}{xy^2}\right), \forall x > 0, y > 1.$$

Đặt  $u = \frac{x+y}{xy}$ ,  $v = \frac{y^2 + xy - x}{y(x+y)}$  thì hệ thức trên trở thành

$$f(uv) = f(u) + f(v).$$

Từ  $u = \frac{x+y}{xy}$  và  $v = 1 - \frac{x}{y}(x+y)^{-1}$  suy ra

$$y = \frac{x}{ux-1} \quad (2.4.4)$$

và  $x + y = \frac{x^2 u}{ux-1}$  hay  $(x+y)^{-1} = \frac{ux-1}{x^2 u}$ , do đó  $v = 1 - \frac{(ux-1)^2}{x^2 u}$ , vậy

$$u - uv = \frac{(ux-1)^2}{x^2}.$$

Do  $u > 0$  nên ta nhận được  $0 < v < 1$ , hơn nữa kết hợp với (2.4.4) ta có

$$y = \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1-v}}.$$

Vì  $x^{-1} = u - y^{-1}$  nên  $x = \frac{1}{\sqrt{u}(\sqrt{u} - \sqrt{1-v})}$  hay tương đương với

$$x = \frac{\sqrt{u} + \sqrt{1-v}}{\sqrt{u}(u+v-1)},$$

vậy ta thu được  $u+v-1 > 0$ . Điều này được thỏa mãn nếu  $u > 1$ . Vậy với  $x, y > 0$  thì  $u > 1$  và  $0 < v < 1$ , tức là ta có

$$f(uv) = f(u) + f(v), \quad \forall u > 1, 0 < v < 1.$$

Từ (2.4.2) ta dễ thấy đẳng thức trên cũng đúng với  $u = 1$  hoặc  $v = 1$ , nói cách khác ta đã chứng minh được

$$f(uv) = f(u) + f(v), \quad \forall u \geq 1, 0 < v \leq 1. \quad (2.4.5)$$

Xét  $1 \leq P$  thì  $0 < P^{-1} \leq 1$  và  $1 \leq P \leq P^2$ , áp dụng (2.4.5) cho  $P^2$  và  $P^{-1}$  và (2.4.1) ta nhận được

$$f(P) = f(P^2 P^{-1}) = f(P^2) - f(P)$$

hay

$$f(P^2) = 2f(P), \quad \forall P \geq 1. \quad (2.4.6)$$

Xét  $1 \leq P \leq Q$ , khi đó  $0 < PQ^{-1} \leq 1$  và  $1 \leq Q \leq Q^2$ , lại áp dụng (2.4.5), (2.4.1) và (2.4.6) ta có

$$f(PQ) = f(PQ^{-1}Q^2) = f(PQ^{-1}) + f(Q^2) = f(P) - f(Q) + 2f(Q)$$

hay tương đương với

$$f(PQ) = f(P) + f(Q), \quad \forall P, Q \geq 1.$$

Mặt khác với mọi  $P, Q \geq 1$  thì theo hệ thức trên và (2.4.1) ta có

$$f(P^{-1}Q^{-1}) = -f(PQ) = -f(P) - f(Q) = f(P^{-1}) + f(Q^{-1}).$$

Vậy ta đã thiết lập được

$$f(uv) = f(u) + f(v), \quad \forall u, v > 0,$$

nói cách khác mọi nghiệm của (5) đều là nghiệm của (13).

**C2:** Với  $u, v > 0$  ta lấy  $\alpha > 0$  đủ lớn sao cho  $\alpha u > 1$  và  $\frac{v}{\alpha} < 1$ , khi đó theo (2.4.5) ta nhận được

$$f(u) = f\left(\alpha u \times \frac{1}{\alpha}\right) = f(\alpha u) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

và

$$f(v) = f\left(\frac{v}{\alpha} \times \alpha\right) = f\left(\frac{v}{\alpha}\right) + f(\alpha).$$

Suy ra

$$f(u) + f(v) = f(\alpha u) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) + f\left(\frac{v}{\alpha}\right) + f(\alpha) = f\left(\alpha u \times \frac{v}{\alpha}\right) = f(uv).$$

Ngược lại, giả sử  $f$  là nghiệm của (13) khi đó

$$f(x+y) = f(x(x+y)^{-1}y) = f(x) + f((x+y)^{-1}) + f(y), \quad \forall x, y > 0$$

hay  $f$  là nghiệm của (5). Vậy ta đã chứng minh được (5) và (13) tương đương trên  $(0, +\infty)$ .  $\square$

**Ví dụ 2.4:** Tìm tất cả các hàm  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  liên tục thỏa mãn

$$f(x) + f(y^{-1}) + f(x^{-1} + y) = f(x + y^{-1}), \quad \forall x, y > 0.$$

**Giải:** Rõ ràng phương trình đã cho tương đương với

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = -f(x^{-1} + y^{-1}), \quad \forall x, y > 0.$$

Theo kết quả của Bài toán 2.4 thì phương trình trên tương đương với

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y > 0.$$

Vậy bài toán trở thành tìm tất cả các hàm  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  sao cho

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y > 0.$$

Do  $x, y > 0$  và  $f$  liên tục trên  $\mathbf{R}^+$  nên đặt  $x = e^t, y = e^s$  và  $g(s) = f(e^s)$  thì bài toán tương đương với tìm tất cả các hàm  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  liên tục thỏa mãn

$$g(s+t) = g(s) + g(t), \quad \forall s, t,$$

tức là  $g(s) = cs$  với  $c$  là hằng số bất kỳ. Vậy nghiệm của bài toán đã cho là

$$f(x) = c \ln x, \quad \forall x > 0,$$

ở đây  $c$  là hằng số tùy ý. □

**Ví dụ 2.5:** Tìm tất cả các hàm  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x+y^{-1}) - f(x) - f(y^{-1}) = \ln |x^{-1} + y|, & \forall x, y \neq 0, xy \neq -1, \\ f(x) = x^2 f(x^{-1}) + (1+x^2) \ln |x|, & \forall x \neq 0, \\ f(x) + f(-x) = 2 \ln |x|, & \forall x \neq 0, \\ f(1) = 1 \text{ và } f(0) = 0. \end{cases}$$

**Bình luận:** Chú ý rằng phương trình đầu của hệ tương đương với

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = -\ln |x^{-1} + y^{-1}|, \quad \forall x, y \neq 0, x \neq -y,$$

đây là dạng (5) với  $f(x) = \ln |x|$ , hơn nữa dễ thấy  $f(x) = \ln |x|$  là một nghiệm riêng của phương trình trên.

**Giải:** Đặt  $f(x) = \ln |x| + g(x)$ ,  $\forall x \neq 0$ , và  $f(0) = g(0)$  ta có bài toán đã cho tương đương với

$$\begin{cases} g(x+y^{-1}) = g(x) + g(y^{-1}), & \forall y \neq 0, xy \neq -1, \\ g(x) = x^2 g(x^{-1}), & \forall x \neq 0, \\ g(-x) = -g(x), & \forall x, \\ g(1) = 1, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} g(x+y) = g(x) + g(y), & \forall x, y, \\ g(x) = x^2 g(x^{-1}), & \forall x \neq 0, \\ g(1) = 1. \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Từ phương trình đầu của (2.5.1) ta có

$$g(0) = 0 \text{ và } g(-x) = -g(x), \forall x.$$

Đề ý rằng

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0, 1,$$

do đó

$$g\left(\frac{1}{x(x-1)}\right) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) - g\left(\frac{1}{x}\right), \quad \forall x \neq 0, 1.$$

Áp dụng phương trình thứ hai và thứ ba của (2.5.1) cho hệ thức trên ta thu được

$$g(x^2) = -x^2 + 2xg(x), \quad \forall x \neq 0, 1.$$

Hơn nữa, rõ ràng hệ thức trên cũng đúng cho  $x = 0, 1$ , vậy

$$g(x^2) = -x^2 + 2xg(x), \quad \forall x. \quad (2.5.2)$$

Từ  $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$  ta suy ra

$$g(4xy) = g((x+y)^2) - g((x-y)^2), \quad \forall x, y.$$

Kết hợp hệ thức trên với (2.5.2) ta có

$$4g(xy) = -(x+y)^2 + 2(x+y)(g(x) + g(y)) + (x-y)^2 - 2(x-y)(g(x) - g(y)), \quad \forall x, y,$$

hay tương đương với

$$g(xy) = xg(y) + yg(x) - xy, \quad \forall x, y.$$

Bây giờ ta sử dụng hệ thức trên với  $x \neq 0$  và  $y = x^{-1}$  thì nhận được

$$1 = g(1) = xg(x^{-1}) + x^{-1}g(x) - 1, \quad \forall x \neq 0.$$

Áp dụng phương trình thứ hai của (2.5.1) một lần nữa, ta có đẳng thức trên tương đương với

$$g(x) = x, \quad \forall x \neq 0,$$

vậy

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln |x|, & \forall x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Thử lại, ta thấy  $f(x)$  cho bởi (2.5.3) thỏa mãn bài toán đã cho, vậy bài toán đã cho có duy nhất nghiệm cho bởi công thức (2.5.3).  $\square$

**Ví dụ 2.6:** Tìm tất cả các hàm  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  thỏa mãn

$$f((x^{-1} + y^{-1})(xy + 1)) - f(x + y^{-1}) - f(x^{-1} + y) = f((x + y)(xy + 1)), \quad \forall x, y > 0.$$

**Giải:** Với  $x, y > 0$  đặt

$$u = x + y^{-1} \quad \text{và} \quad v = x^{-1} + y,$$

khi đó  $u, v > 0$  và  $u + v = (x^{-1} + y^{-1})(xy + 1)$ ,  $u^{-1} + v^{-1} = (x + y)(xy + 1)$ . Vậy  $f$  thỏa điều kiện của bài toán khi và chỉ khi

$$f(u) + f(v) - f(u + v) = -f(u^{-1} + v^{-1}), \quad \forall u, v > 0.$$

Suy ra nghiệm của bài toán là

$$f(x) = A(\ln x), \quad \forall x > 0,$$

trong đó  $A$  là hàm cộng tính bất kỳ. □

**Bài toán 2.5:** Tìm tất cả các hàm  $f, h: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  biết

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = h\left(\frac{xy(x+y)}{x^2 + y^2 + xy}\right), \quad \forall x, y > 0. \quad (14)$$

**Giải:** Để ý rằng phương trình (14) là trường hợp riêng của (8) với

$$\phi(x) = x^{-1}, \quad \forall x > 0 \quad \text{và} \quad g(s) = h(s^{-1}), \quad \forall s > 0.$$

Do đó theo kết quả của Bài toán 2.1 thì nghiệm của bài toán đã cho là

$$\begin{cases} h(s) = A_1(s^{-1}) + c, & \forall s > 0, \\ f(x) = A_1(x^{-1}) + A_2(x) + c, & \forall x > 0, \end{cases}$$

ở đây  $A_1, A_2$  là các hàm cộng tính và  $c$  là hằng số bất kỳ. □

**Bình luận:** Nếu ta lấy  $h = f$  thì phương trình (14) trở về phương trình (6). Nói cách khác, tập hợp tất cả các hàm  $f$  thỏa mãn (6) với mọi  $x, y > 0$  là

$$f(x) = A(x^{-1}) + c,$$

trong đó  $A$  là hàm cộng tính và  $c$  là hằng số bất kỳ.

Ví dụ sau sẽ đưa ra một cách giải sơ cấp phương trình (6).

**Ví dụ 2.7:** Tìm tất cả các hàm  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  liên tục thỏa mãn

$$f(x^{-1}) + f(y^{-1}) - f((x+y)^{-1}) = f\left(\frac{x^2 + y^2 + xy}{xy(x+y)}\right), \quad \forall x, y \neq 0, x \neq -y. \quad (15)$$

**Giải:** Giả sử  $f$  là nghiệm của (15), đặt

$$F(x, y) = f(x^{-1}) + f(y^{-1}) - f((x+y)^{-1}), \quad \forall x, y \neq 0, x \neq -y.$$

Dễ dàng kiểm tra được

$$F(x, y) + F(x+y, z) = F(x, y+z) + F(y, z), \quad \forall x, y, z \neq 0, x \neq -y, y \neq -z, x+y+z \neq 0.$$

(2.7.1)

Vì  $f$  là nghiệm của (15) nên

$$F(x, y) = f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}\right), \quad F(x+y, z) = f\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z}\right),$$

và



$$F(x, y+z) = f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} - \frac{1}{x+y+z}\right), \quad F(y, z) = f\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y+z}\right).$$

Thế các biểu thức trên vào đẳng thức (2.7.1) ta nhận được

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}\right) + f\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z}\right) &= f\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} - \frac{1}{x+y+z}\right) \\ &+ f\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y+z}\right), \quad \forall x, y, z \neq 0. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Đặt

$$u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y}, \quad v = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y+z}, \quad w = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z},$$

thì (2.7.2) tương đương với

$$f(u) + f(w) = f(v) + f(u+w-v), \quad \forall u, v, w,$$

hay

$$f((u-v)+v) - f(v) + f((w-v)+v) - f(v) = f((u-v)+(w-v)+v) - f(v), \quad \forall u, v, w, \text{ hay}$$

$$f(s+t+v) - f(v) = f(s+v) - f(v) + f(t+v) - f(v), \quad \forall s, t, v.$$

Đặt  $g(z) = f(z+v) - f(v)$ ,  $\forall z$ , thì đẳng thức trên trở thành

$$g(s+t) = g(s) + g(t), \quad \forall s, t.$$

Mặt khác, vì  $f$  liên tục nên  $g$  liên tục, suy ra  $g(s) = as$  với  $a$  là hằng số bất kỳ.

Vậy ta có

$$f(x+y) - f(y) = ax, \quad \forall x, y.$$

Đặt  $f(x) = ax + h(x)$ ,  $\forall x$ , và thế vào đẳng thức trên ta nhận được

$$h(x+y) = h(y), \quad \forall x, y,$$

suy ra  $h(x) = b$ , trong đó  $b$  là hằng số bất kỳ.

Thử lại  $f(x) = ax + b$  ta thấy thỏa mãn (15), vậy nghiệm của bài toán là

$$f(x) = ax + b,$$

ở đây  $a$  và  $b$  là các hằng số tùy ý. □

Từ kết quả của Bài toán 2.1 ta dẫn đến định lý sau.

**Định lý 3:** Cho  $\phi: I \rightarrow \mathbf{R}$  là giải tích và không afin,  $H$  có dạng (7) với mọi  $x, y \in I$  trong đó  $\psi: D \rightarrow \mathbf{R}$  với  $D = \{\phi(x) + \phi(y) - \phi(x+y) : x, y \in I\}$ . Khi đó mọi nghiệm của (1) thỏa mãn

$$\begin{cases} f(x) = A_1 \circ \phi(x) + A_2(x) + c, \quad \forall x \in I, \\ g \circ \psi(s) = A_1(s) + c, \quad \forall s \in D, \end{cases} \quad (16)$$

ở đây  $A_1, A_2$  là các hàm cộng tính và  $c$  là hằng số bất kỳ. Hơn nữa nếu  $\psi$  khả ngược thì  $g$  có dạng

$$g(s) = A_1 \circ \psi^{-1}(s) + c, \quad \forall s \in \psi(D).$$

Ngược lại trong trường hợp  $\psi$  không khả ngược thì phương trình (1) với vế trái của nó là đo được chỉ có nghiệm tầm thường.

**Chứng minh:** Công thức (16) được suy ra từ kết quả của Bài toán 2.1 và trường hợp  $\psi$  khả ngược ta nhận được khẳng định ngay từ công thức nghiệm (16). Bây giờ xét trường hợp  $\psi$  không khả ngược, khi đó tồn tại  $s_1, s_2 \in D : s_1 \neq s_2$  nhưng  $\psi(s_1) = \psi(s_2)$ , kết hợp với (16) ta suy ra  $A_1(s_1) = A_1(s_2)$ . Mặt khác theo giả thiết hàm số

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - f(x+y) = A_1(\phi(x) + \phi(y) - \phi(x+y)) + c$$

đo được và do  $\phi$  liên tục và không afin nên hàm cộng tính  $A_1$  đo được, vậy ta nhận được

$$A_1(s) = bs,$$

trong đó  $b$  là hằng số. Tuy nhiên, từ đẳng thức  $A_1(s_1) = A_1(s_2)$  với  $s_1 \neq s_2$  suy ra  $b = 0$ . Vậy (1) chỉ có nghiệm tầm thường.  $\square$

**Ví dụ 2.8:** Tìm tất cả các hàm  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  liên tục sao cho

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = g(x^2 y^2), \quad \forall x, y. \quad (17)$$

**Giải:** Ta có (17) là trường hợp riêng của (1) với  $H(x, y)$  có dạng (7) trong đó

$$\phi(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi(s) = \frac{s^2}{4}, \quad \forall s \in \mathbf{R}.$$

Ta có  $\psi$  không khả ngược trên  $\mathbf{R}$  và  $g$  liên tục nên

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - f(x+y) = g(x^2 y^2)$$

liên tục hay  $F$  đo được. Áp dụng Định lý 3 ta nhận được nghiệm của (17) là

$$\begin{cases} f(x) = A(x) + b, \forall x \in \mathbf{R}, \\ g(s) = b, \forall s \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Mặt khác theo giả thiết  $f$  liên tục nên  $f(x) = ax + b, \forall x$ . Vậy nghiệm của bài toán là

$$\begin{cases} f(x) = ax + b, \forall x, \\ g(s) = b, \forall s, \end{cases}$$

trong đó  $a, b$  là các hằng số tùy ý.

**Ví dụ 2.9:** Tìm tất cả các hàm  $f, g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  liên tục thỏa mãn

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = g(x^2 y^2), \quad \forall x, y > 0.$$

**Giải:** Do  $x, y > 0$  nên  $\psi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  và  $\psi^{-1}(s) = \sqrt{s}, \forall s > 0$ . Vậy bài toán đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x > 0, \\ g(s) = -2a\sqrt{s} + c, \forall s > 0 \end{cases}$$

với  $a, b, c$  là các hằng số bất kỳ. □

**Nhận xét:** Giả sử chúng ta tìm được một nghiệm riêng không tầm thường  $(f_0, g_0)$  của phương trình (1), tức là ta có đẳng thức

$$f_0(x) + f_0(y) - f_0(x+y) = g_0(H(x, y)).$$

Do  $g_0$  khả ngược nên đẳng thức trên tương đương với

$$H(x, y) = g_0^{-1}(f_0(x) + f_0(y) - f_0(x+y)),$$

suy ra trong trường hợp này hàm  $H$  có dạng (7), vậy ta có thể coi  $H$  ở dạng (7) là điều kiện cần để (1) có nghiệm không tầm thường. Theo Định lý 3 thì mọi nghiệm của (1) có dạng

$$\begin{cases} f(x) = A_1 \circ f_0(x) + A_2(x) + c, \\ g(s) = A_1 \circ g_0(s) + c, \end{cases}$$

trong đó  $A_1, A_2$  là các hàm cộng tính và  $c$  là hằng số bất kỳ.

Một câu hỏi đặt ra là nếu  $H$  không có biểu diễn ở dạng (7) thì (1) có nghiệm không tầm thường không?

**Bài toán 2.6:** Cho hàm  $H : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  xác định như sau

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y}, & x, y > 0 : x+y \leq 1, \\ 2-x-y, & x, y \in (0,1) : x+y \geq 1, \\ 1-x, & x \in (0,1), y \geq 1, \\ 1-y, & y \in (0,1), x \geq 1, \\ (x-1)(1-y), & x, y \geq 1. \end{cases} \quad (18)$$

Chứng minh rằng  $(f, g)$  là nghiệm của (1) nếu và chỉ nếu tồn tại các hàm cộng tính  $A_1, A_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  và hằng số  $b$  sao cho

$$f(x) = \begin{cases} A_2(x) + b, & x \in (0,1), \\ A_1(x-1) + A_2(x) + b, & x \geq 1, \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} b - A_1(1), & s \leq 0, \\ A_1(s-1) + b, & s \in (0,1), \\ b, & s \geq 1. \end{cases}$$

Hơn nữa,  $H$  không có biểu diễn ở dạng (7) với  $\psi$  khả ngược.

**Giải:**

(i) Xét trường hợp  $x, y > 0$  và  $x + y \leq 1$ . Khi đó (1) trở thành

$$f(x) + f(y) = f(x+y) + g\left(\frac{1}{x+y}\right),$$

ta có thể coi vế phải của phương trình trên như là một hàm của  $x+y$  tức là ta nhận được phương trình Pexider, vì vậy ta nhận được nghiệm của (1) là

$$f(x) = A_2(x) + b, \quad \forall x \in (0,1) \quad \text{và} \quad f(x+y) + g\left(\frac{1}{x+y}\right) = A_2(x+y) + 2b, \quad x+y \leq 1,$$

hay đương đương với

$$f(x) = A_2(x) + b, \quad \forall x \in (0,1) \quad \text{và} \quad g(s) = b, \quad \forall s > 1, \quad (2.6.1)$$

trong đó  $A_2$  là hàm cộng tính và  $b$  là hằng số bất kỳ.

(ii)  $x, y \in (0,1)$  và  $x + y \geq 1$ : Do  $f(x) = A_2(x) + b$  và  $f(y) = A_2(y) + b$  nên (1) trở thành

$$f(x+y) + g(2-x-y) = A_2(x+y) + 2b,$$

hay

$$f(t) + g(2-t) = A_2(t) + 2b, \quad \forall t \geq 1. \quad (2.6.2)$$

(iii)  $x \in (0,1), y \geq 1$ : Áp dụng (2.6.1) suy ra (1) trở thành

$$(A_2(x) + b - g(1-x)) + f(y) = f(x+y).$$

Ta coi số hạng đầu của vế phải của phương trình trên là một hàm của  $x$  thì phương trình trên cũng có dạng Pexider, do đó nghiệm của nó là

$$f(y) = A_3(y) + c, \forall y \geq 1 \quad (2.6.3)$$

và

$$A_2(x) + b - g(1-x) = A_3(x), \forall x \in (0,1),$$

hay tương đương với

$$g(s) = A_2(1-s) + b - A_3(1-s), \forall s \in (0,1), \quad (2.6.4)$$

ở đây  $A_3$  là hàm cộng tính và  $c$  là hằng số.

Mặt khác từ (2.6.2) và (2.6.3) ta suy ra

$$g(s) = A_2(2-s) + 2b - A_3(2-s) - c, \forall s \in (0,1).$$

Kết hợp với (2.6.4) ta nhận được

$$A_2(1-s) + b - A_3(1-s) = A_2(2-s) + 2b - A_3(2-s) - c,$$

hay

$$c = b - (A_3(1) - A_2(1)). \quad (2.6.5)$$

(iv)  $x, y \geq 1$ : Áp dụng (2.6.3) cho (1) ta nhận được

$$g((x-1)(1-y)) = c, \forall x, y \geq 1,$$

nói cách khác

$$g(s) = c, \forall s \leq 0. \quad (2.6.6)$$

Đặt  $A_1 := A_3 - A_2$  và kết hợp với các công thức (2.6.1), (2.6.3)-(2.6.6) ta nhận được khẳng định của bài toán.

Giả sử  $H$  có dạng (7) với  $\psi, \phi$  nào đó, trong đó  $\psi$  khả ngược, khi đó với  $x, y > 0$  và  $x + y \leq 1$  thì ta có

$$\phi(x) + \phi(y) - \phi(x+y) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{x+y}\right).$$

Đặt  $F(x, y) = \phi(x) + \phi(y) - \phi(x+y)$ , khi đó

$$F(x, y) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{x+y}\right), \quad \forall x, y > 0 : x + y \leq 1.$$

Chú ý rằng ta có

$$F(x, y) + F(x + y, z) = F(x, y + z) + F(y, z),$$

do đó

$$\psi^{-1}\left(\frac{1}{x+y}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{1}{x+y+z}\right) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{x+y+z}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{1}{y+z}\right), \quad \forall x, y, z > 0 : x + y + z \leq 1.$$

Vậy

$$\psi^{-1}\left(\frac{1}{x+y}\right) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{y+z}\right), \quad \forall x, y, z > 0 : x + y + z \leq 1,$$

điều này là vô lý với  $x \neq z$ , suy ra  $H$  không thể có biểu diễn dạng (7) với  $\psi$  khả ngược.  $\square$

**Nhận xét:** Cho hàm  $H$  có dạng (18), khi đó tất cả các hàm  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  liên tục thỏa mãn (1) là

$$f(x) = \begin{cases} cx + b, & x \in (0, 1), \\ a(x-1) + cx + b, & x \geq 1 \end{cases}$$

và

$$g(s) = \begin{cases} b - a, & s \leq 0, \\ a(s-1) + b, & s \in (0, 1), \\ b, & s \geq 1. \end{cases}$$

**Kết luận:** Bài giảng này cho chúng ta cách tiếp cận đôi khi khá hiện đại về một lớp phương trình hàm. Tuy nhiên, qua đó chúng ta hoàn toàn có thể xây dựng được một số bài toán về phương trình hàm mà có thể cho học sinh phổ thông giải theo cách sơ cấp (các ví dụ trong bài giảng). Trước khi kết thúc, chúng ta có thể chỉ thêm những ví dụ sau và hy vọng bài giảng phần nào giúp các thầy, cô trong việc chuẩn bị các bài giảng bồi dưỡng học sinh giỏi Toán.

(1) Lấy  $\phi(x) = x^3$  và  $\psi(u) = -\frac{3}{u}$  thì ta nhận được bài toán: Tìm tất cả các hàm

$f, g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$  thỏa mãn

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = g\left(\frac{1}{xy(x+y)}\right), \quad \forall x, y > 0.$$

- (2) Chọn  $\phi(x) = e^x - 1$  và  $\psi(u) = u$  ta có bài toán: Tìm tất cả các hàm  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  thỏa mãn

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = g((e^x - 1)(1 - e^y)), \quad \forall x, y.$$

**Tài liệu tham khảo**

1. J. Aczel, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press New York and London, 1966.
2. B. Ebanks, Generalized Cauchy difference functional equations, *Aequationes Math*, **70** (2005) 154-176.
3. C. G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007.