

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG HẠNH

**HÀM PHẦN NGUYÊN
VÀ ỨNG DỤNG**

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TS. Tạ Duy Phụng

THÁI NGUYÊN - 2010

MỤC LỤC

Trang

Các kí hiệu	2
Lời nói đầu	3-4
Chương 1 Các kiến thức cơ bản về hàm phân nguyên	5
§1 Khái niệm về phân nguyên	5
§2 Các tính chất cơ bản của phân nguyên	6
§3 Hàm phân nguyên và đồ thị của hàm phân nguyên	11
Chương 2 Phân nguyên trong toán số học và đại số	16
§1 Phân nguyên trong các bài toán số học	16
§2 Tính giá trị của một số hoặc một biểu thức chứa phân nguyên	27
§3 Chứng minh các hệ thức chứa phân nguyên	31
§4 Phương trình và hệ phương trình chứa phân nguyên	32
Chương 3 Phân nguyên trong toán giải tích	49
§1 Một số tính chất giải tích của dãy chứa phân nguyên	49
§2 Tính tổng hữu hạn của dãy chứa phân nguyên	53
§3 Tính giới hạn của dãy chứa phân dư	56
§4 Hàm số chứa phân nguyên	62
§5 Chuỗi số chứa phân nguyên	67
Kết luận	77
Tài liệu tham khảo	78

CÁC KÝ HIỆU

Trong cuốn luận văn này ta sử dụng các ký hiệu sau:

Tập các số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}$.

Tập các số thực không âm được ký hiệu là $\mathbb{R}^+$.

Tập các số hữu tỉ được ký hiệu là $\mathbb{Q}$.

Tập các số nguyên được ký hiệu là $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Tập các số tự nhiên được ký hiệu là $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Tập các số nguyên dương được ký hiệu là $\mathbb{Z}^+$ hoặc $\mathbb{N}$.

LỜI NÓI ĐẦU

Do tính độc đáo của hàm phần nguyên, thí dụ, hàm phần nguyên vừa đơn giản (là hàm *hằng từng khúc*) lại vừa phức tạp (*gián đoạn* tại các điểm nguyên nên khó áp dụng các công cụ của giải tích), nhiều bài toán hay về phần nguyên đã được sử dụng làm đề thi học sinh giỏi các cấp, trong đó có rất nhiều các đề thi học sinh giỏi quốc gia và Olympic quốc tế. Mặt khác, hàm phần nguyên có những ứng dụng quan trọng không chỉ trong toán học phổ thông, mà còn trong nhiều vấn đề của toán ứng dụng và công nghệ thông tin (làm tròn số, tính gần đúng,...). Phần nguyên cũng thể hiện sự kết nối giữa tính liên tục và tính rời rạc, giữa toán giải tích và toán rời rạc nên khá thú vị.

Lí thuyết và bài tập về phần nguyên rải rác đã có trong các sách và các tạp chí, thậm chí đã là những chuyên đề trong một số sách về số học (xem [3], [5], [8]). Tuy nhiên, hình như chưa có một cuốn sách nào viết đủ phong phú và tổng hợp về phần nguyên. Đó chính là lí do để tác giả chọn đề tài này làm luận văn cao học.

Luận văn *Hàm phần nguyên và ứng dụng* có mục đích trình bày các kiến thức cơ bản của hàm phần nguyên và ứng dụng của nó trong giải toán sơ cấp, cụ thể là trong số học, đại số và giải tích (toán chia hết, giải phương trình, tính chất của dãy, tính giới hạn, tính tổng của dãy, chuỗi,...chứa phần nguyên). Đồng thời luận văn cũng trình bày mối quan hệ mật thiết của phần nguyên với các dạng toán khác (dãy truy hồi, nhị thức Newton, hệ đếm,...). Đặc biệt luận văn tập hợp một khối lượng lớn các bài toán thi vô địch quốc gia và quốc tế minh họa cho lí thuyết về phần nguyên.

Luận văn gồm ba chương.

Chương 1 trình bày các định nghĩa và tính chất cơ bản của hàm phần nguyên và đồ thị của hàm phần nguyên.

Chương 2 trình bày một số dạng toán chứa phần nguyên trong số học và đại số (toán chia hết; tính toán và chứng minh các hệ thức chứa phần nguyên; giải phương trình và hệ phương trình chứa phần nguyên;...).

Chương 3 trình bày một số dạng toán chứa phần nguyên trong giải tích (các tính chất như tính bị chặn, tính tuần hoàn của dãy số; tìm số hạng và tính giới hạn của dãy số, tính tổng hữu hạn của dãy số, tính tổng của chuỗi chứa phần nguyên, ...).

Nhiều ví dụ và bài toán tập hợp trong luận văn đã được đưa vào bản thảo cuốn sách của tác giả luận văn viết chung với Thầy hướng dẫn và Thạc sĩ Nguyễn Thị Bình Minh. Vì hạn chế số trang luận văn, trong mỗi chương, chúng tôi cố gắng trình bày các vấn đề lí thuyết làm cơ sở để phân loại và tổng kết các phương pháp giải từng dạng toán chứa phần nguyên. Các ví dụ minh họa phương pháp được lựa chọn mang tính chất điển hình, số lượng lớn bài tập thể hiện sự phong phú muôn hình vẻ của ứng dụng hàm phần nguyên trong giải toán và đã được giải chi tiết trong [2] nên không trình bày lại trong luận văn này.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS TS Tạ Duy Phụng. Xin được tỏ lòng cảm ơn chân thành nhất tới Thầy.

Tác giả xin chân cảm ơn Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, nơi tác giả đã hoàn thành chương trình cao học ngành toán.

Và cuối cùng, xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã cảm thông, ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian tác giả học cao học và viết luận văn.

Hà Nội, ngày 15 tháng 9 năm 2010

Tác giả

Nguyễn Thị Hồng Hạnh

Chương 1

CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ PHẦN NGUYÊN

§1 KHÁI NIỆM VỀ PHẦN NGUYÊN

Định nghĩa 1.1 Cho một số thực $x \in \mathbb{R}$. Số nguyên lớn nhất không vượt quá x được gọi là *phần nguyên* (integer part, integral part) hay *sàn* (floor) của x .

Ta thường kí hiệu phần nguyên của x là $[x]$. Nhiều tài liệu gọi phần nguyên của x là *sàn* và kí hiệu phần nguyên của x là $\lfloor x \rfloor$, vì *sàn* có liên quan mật thiết với khái niệm *trần* $\lceil x \rceil$ của x . Hai khái niệm *trần* và *sàn* thường được sử dụng trong tin học. Trong luận văn này ta sẽ dùng cả hai kí hiệu phần nguyên (*sàn*) là $[x]$ và $\lfloor x \rfloor$.

Định nghĩa 1.2 Cho một số thực $x \in \mathbb{R}$. Số nguyên bé nhất không nhỏ hơn x được gọi là *trần* của x và kí hiệu là $\lceil x \rceil$.

Định nghĩa 1.1 và Định nghĩa 1.2 tương đương với:

$$[x] = z \Leftrightarrow \begin{cases} z \leq x < z + 1; \\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x - z < 1; \\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

và

$$\lceil x \rceil = z \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 < x \leq z; \\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq z - x < 1; \\ z \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hơn nữa, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ nếu $x \in \mathbb{Z}$ và $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ với mọi $x \notin \mathbb{Z}$.

Định nghĩa 1.3 *Phần dư* (phần thập phân, phần lẻ, giá trị phân - fractional part, fractional value) của một số thực x , kí hiệu là $\{x\}$ được định nghĩa bởi công thức $\{x\} = x - [x]$.

Từ Định nghĩa 1.3 ta suy ra ngay, $0 \leq \{x\} < 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\{z\} = 0$ khi và chỉ khi z là số nguyên.

Ta biết rằng, với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì tồn tại số nguyên $z \in \mathbb{Z}$ sao cho $z \leq x < z + 1$.

Định nghĩa 1.4 Giá trị nhỏ nhất giữa hai số $x - z$ và $z + 1 - x$ được gọi là *khoảng cách* từ x đến số nguyên gần nó nhất và được kí hiệu là $]x[$.

Ta có $]x[= |x - z| \leq 0,5$ với mọi x .

Định nghĩa 1.5 Số nguyên gần một số thực x nhất được kí hiệu là (x) và (x) được gọi là *số làm tròn* của x .

Khái niệm làm tròn số được sử dụng rộng rãi trong máy tính.

Để xác định, nếu có hai số nguyên cùng gần x nhất (nghĩa là khi $x = z + 0,5 = (z + 1) - 0,5$ thì z và $z + 1$ cùng có khoảng cách tới x bằng $0,5$ ($x - z = z + 1 - x = 0,5$) thì ta qui ước chọn số lớn, tức là nếu $z \leq x < z + 0,5$, thì $(x) = z$, còn nếu $z + 0,5 \leq x \leq z + 1$ thì $(x) = z + 1$.

§2 CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHẦN NGUYÊN

Từ các Định nghĩa 1.1 - Định nghĩa 1.5 ta đi đến các tính chất tuy đơn giản nhưng rất cơ bản và hay sử dụng sau đây của phần nguyên. Các tính chất này đã được chứng minh chi tiết trong [2], vì vậy dưới đây chúng tôi chỉ liệt kê mà không chứng minh.

Tính chất 2.1 Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

a) $[x] \leq x < [x] + 1$ hay $x - 1 < [x] \leq x$;

b) $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$ hay $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x là số nguyên.

Tính chất 2.2 $x = [x] + \{x\}$; $0 \leq \{x\} < 1$; $x = \{x\} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$.

Hệ quả 2.1 $[x + z] = z$ thì $z \in \mathbb{Z}$ và $0 \leq x < 1$.

Tính chất 2.3 $[x + z] = [x] + z$; $\{x + z\} = \{x\}$ với mọi $z \in \mathbb{Z}$.

Đảo lại, $\{x\} = \{y\}$ thì $y = x + z$ với $z \in \mathbb{Z}$ nào đó.

Tính chất 2.4 Nếu $x \in \mathbb{Z}$ thì $[x] = x$ và $\{x\} = 0$.

Ngược lại nếu $[x] = x$ hoặc $\{x\} = 0$ thì $x \in \mathbb{Z}$.

Nếu $x \in \mathbb{Q}$ là số hữu tỉ nhưng không phải là số nguyên thì $\{x\}$ cũng là một số hữu tỉ thuộc khoảng $(0;1)$.

Nếu $x \in \mathbb{R}$ là số vô tỉ thì $\{x\}$ cũng là một số vô tỉ thuộc khoảng $(0;1)$.

Tính chất 2.5 Phần dư, sàn và trần có tính chất *lũy đẳng* (idempotent), tức là khi hai lần áp dụng phép toán thì kết quả không đổi:

$$\{\{x\}\} = \{x\}; \quad [[x]] = [x] \quad \text{và} \quad \lceil \lceil x \rceil \rceil = \lceil x \rceil \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa, $\{[x]\} = [\{x\}] = \{\lceil x \rceil\} = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nhưng $\lceil \{x\} \rceil = 0$ và $\lceil [x] \rceil = \lceil \lceil x \rceil \rceil = x$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$;

$$\lceil \{x\} \rceil = 1, \quad \lceil [x] \rceil = [x] = \lceil x \rceil - 1 = \lceil \lceil x \rceil \rceil - 1 \quad \text{với mọi } x \notin \mathbb{Z}.$$

Tính chất 2.6 Các qui tắc đổi chỗ (hoán vị), kết hợp của phép toán cộng và phép toán nhân; qui tắc kết hợp giữa phép toán nhân và phép toán cộng vẫn đúng cho phần nguyên và phần dư.

Tính chất 2.7 Phép làm tròn số (x) thông thường như đã nêu trong Định nghĩa 1.5 chính là phép lấy phần nguyên của $x + 0,5$, tức là $(x) = [x + 0,5]$.

Tính chất 2.8 Nếu $[x] = [y]$ thì $|x - y| < 1$ hay $-1 < x - y < 1$.

Tính chất 2.9 Nếu $x \geq y$ thì $[x] \geq [y]$. Đảo lại, nếu $[x] > [y]$ thì $x > y$.

Tính chất 2.10

- a) Cả hai số x và y là hai số nguyên khi và chỉ khi $\{x\} + \{y\} = 0$.
- b) Trong hai số x và y có một số nguyên và một số không phải là số nguyên thì $0 < \{x\} + \{y\} < 1$.
- c) Hai số x và y không nguyên có tổng $x + y$ là một số nguyên khi và chỉ khi $\{x\} + \{y\} = 1$.

Tính chất 2.11a Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\} \leq \{x + y\} + 1; [x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$$

Nhận xét 2.1 Tính chất 2.11a có thể được phát biểu dưới dạng sau.

Tính chất 2.11b $[x + y] = \begin{cases} [x] + [y] & \text{khi } 0 \leq \{x\} + \{y\} < 1; \\ [x] + [y] + 1 & \text{khi } 1 \leq \{x\} + \{y\} < 2. \end{cases}$

Tính chất này cũng được viết dưới dạng sau đây.

Tính chất 2.11c $[x] + [y] = \begin{cases} [x + y] & \text{khi } 0 \leq \{x\} + \{y\} < 1; \\ [x + y] - 1 & \text{khi } 1 \leq \{x\} + \{y\} < 2. \end{cases}$

Hệ quả 2.2 $[2x] \geq 2[x]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hệ quả 2.3 $[-x] = -[x]$ và $\{-x\} = \{x\} = 0$ nếu $x \in \mathbb{Z}$;

$$[x] + [-x] = -1 \text{ và } \{-x\} = 1 - \{x\} \text{ nếu } x \notin \mathbb{Z}.$$

Hệ quả 2.4 $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tính chất 2.12a Với mọi x và y là các số thực ta có

$$[2x] + [2y] \geq [x] + [y] + [x + y] \geq 2([x] + [y])$$

và $[2\{x\}] + [2\{y\}] \geq [\{x\} + \{y\}].$

Nhận xét 2.2 Tính chất 2.12a có thể được viết dưới dạng sau.

Tính chất 2.12b a) Nếu $\max\{\{x\}, \{y\}\} < \frac{1}{2}$ thì

$$\lceil 2\{x\} \rceil + \lceil 2\{y\} \rceil = 0 = \lceil \{x\} + \{y\} \rceil$$

và $\lceil 2x \rceil + \lceil 2y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil + \lceil x + y \rceil = 2\lceil x \rceil + 2\lceil y \rceil.$

b) Nếu $\min\{\{x\}, \{y\}\} < \frac{1}{2} \leq \max\{\{x\}, \{y\}\} \leq \{x\} + \{y\} < 1$ thì

$$\lceil 2\{x\} \rceil + \lceil 2\{y\} \rceil = 1 = \lceil \{x\} + \{y\} \rceil + 1$$

và $\lceil 2x \rceil + \lceil 2y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil + \lceil x + y \rceil + 1 = 2\lceil x \rceil + 2\lceil y \rceil + 1.$

c) Nếu $\min\{\{x\}, \{y\}\} < \frac{1}{2} \leq \max\{\{x\}, \{y\}\} < 1 \leq \{x\} + \{y\}$ thì

$$\lceil 2\{x\} \rceil + \lceil 2\{y\} \rceil = 1 = \lceil \{x\} + \{y\} \rceil$$

và $\lceil 2x \rceil + \lceil 2y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil + \lceil x + y \rceil = 2\lceil x \rceil + 2\lceil y \rceil + 1.$

d) Nếu $\frac{1}{2} \leq \min\{\{x\}, \{y\}\}$ thì $\lceil 2\{x\} \rceil + \lceil 2\{y\} \rceil = 2 = \lceil \{x\} + \{y\} \rceil + 1$

và $\lceil 2x \rceil + \lceil 2y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil + \lceil x + y \rceil + 1 = 2\lceil x \rceil + 2\lceil y \rceil + 2.$

Tính chất 2.13 Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$\left\lceil \{x\} + \frac{1}{2} \right\rceil = \lceil 2\{x\} \rceil \text{ và } \left\lceil x + \frac{1}{2} \right\rceil = \lceil 2x \rceil - \lceil x \rceil.$$

Hệ quả 2.5 Với mọi số nguyên dương ta luôn có $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = n.$

Tính chất 2.14a Với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$\lceil \{x\} - \{y\} \rceil \leq 0 \text{ và } \lceil x \rceil - \lceil y \rceil \geq \lceil x - y \rceil.$$

Nhận xét 2.5 Tính chất 2.14a có thể phát biểu dưới dạng sau đây.

Tính chất 2.14b $\lceil x - y \rceil = \begin{cases} \lceil x \rceil - \lceil y \rceil & \text{khi } \{y\} \leq \{x\}; \\ \lceil x \rceil - \lceil y \rceil - 1 & \text{khi } \{x\} < \{y\}. \end{cases}$

Tính chất 2.14c $\lceil x \rceil - \lceil y \rceil = \begin{cases} \lceil x - y \rceil & \text{khi } \{y\} \leq \{x\}; \\ \lceil x - y \rceil + 1 & \text{khi } \{x\} < \{y\}. \end{cases}$

Tính chất 2.15 Với mọi số tự nhiên n và với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$n[x] \leq [nx] \leq n[x] + n - 1.$$

Tính chất 2.16 Với mọi số thực x không phải là số nguyên và với mọi số nguyên n ta luôn có $[x] + [n - x] = n - 1$.

Tính chất 2.17 Với mọi số nguyên dương n và với mọi số thực x ta luôn có:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx].$$

Tính chất 2.18 Với mọi $x \in \mathbb{R}$ và n là số tự nhiên ta luôn có $\left[\frac{x}{n} \right] = \left[\frac{[x]}{n} \right]$.

Tính chất 2.19 Với mọi số tự nhiên $k > 3$ và mọi số tự nhiên n ta có

$$\left[\frac{2n}{k} \right] \geq \left[\frac{n}{k} \right] + \left[\frac{n+2}{k} \right].$$

Tính chất 2.20 Cho $k_1, k_2, \dots, k_n$ là bộ n số nguyên dương. Khi ấy

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n \geq \left[\frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n} \right] + n - 1.$$

Tính chất 2.21 Với mọi số nguyên k ta luôn có $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil = k$.

Tính chất 2.22 Cho α, β là những số vô tỉ dương sao cho $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Tập

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \dots\}$ và $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{[\beta], [2\beta], [3\beta], \dots\}$ tạo thành một phân hoạch của tập số nguyên dương, tức là $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ là các tập không giao nhau và hợp của chúng bằng chính tập tất cả các số nguyên dương.

Tính chất dưới đây được sử dụng nhiều trong tin học.

Tính chất 2.23 Cho a và $b \geq 2$ là các số tự nhiên bất kì. Khi ấy $[\log_b a] + 1$ chính là số các chữ số của một số a viết trong hệ đếm cơ số b .

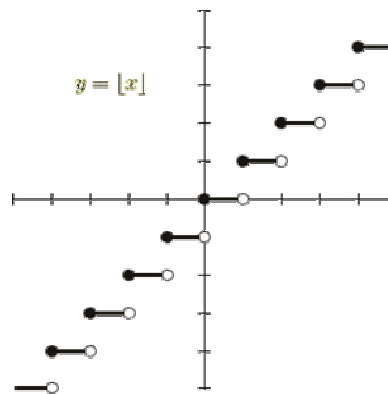
§3 HÀM PHẦN NGUYÊN VÀ ĐỒ THỊ HÀM PHẦN NGUYÊN

Từ các định nghĩa phần nguyên (sàn), trần, phần dư, số làm tròn trong §1, ta có thể đưa ra các định nghĩa sau đây.

Hàm sàn Hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) := \lfloor x \rfloor$ cho tương ứng mỗi số $x \in \mathbb{R}$ với phần nguyên $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ của nó được gọi là *hàm phần nguyên*.

Trong một số tài liệu, *hàm phần nguyên* còn được gọi là *hàm sàn* (floor function) và ngoài kí hiệu $f(x) := \lfloor x \rfloor$ còn được kí hiệu là $f(x) := \lfloor x \rfloor$.

Đồ thị của hàm phần nguyên



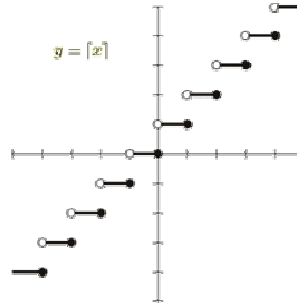
Hình 1

Hàm phần nguyên là hàm *hằng số từng khúc* (nhận giá trị không đổi trên từng nửa khoảng $[z; z+1)$ với $z \in \mathbb{Z}$); *gián đoạn loại một* tại các điểm $z \in \mathbb{Z}$ với độ lệch không đổi bằng 1 ($\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = 1$, tức là hiệu giữa giới hạn của hàm số khi đối số x tiến tới z từ bên phải và từ bên trái bằng 1).

Như vậy, hàm phần nguyên không liên tục (gián đoạn loại 1), nhưng là nửa liên tục trên. Do nó là hàm hằng từng khúc nên đạo hàm của nó tồn tại và bằng 0 tại mọi điểm không nguyên và đạo hàm không tồn tại (thậm chí hàm số không liên tục) tại các điểm nguyên.

Hàm trần Hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) := \lceil x \rceil$ cho tương ứng mỗi số $x \in \mathbb{R}$ với trần $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ của nó được gọi là *hàm trần*.

Đồ thị của hàm trần



Hình 2

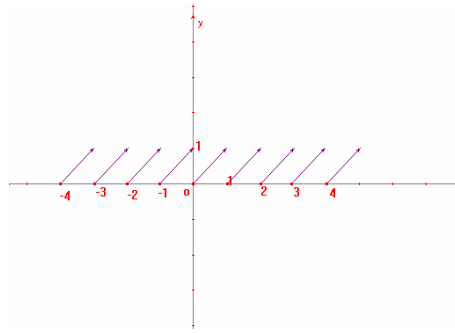
Hàm trần là hàm *hằng số từng khúc* (nhận giá trị không đổi trên từng nửa khoảng $(z; z+1]$ với $z \in \mathbb{Z}$); *gián đoạn loại một* tại các điểm $x = z$, $z \in \mathbb{Z}$ với độ lệch không đổi bằng 1 ($\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = 1$).

Vậy, hàm trần không liên tục, nhưng là nửa liên tục dưới. Do nó là hàm hằng từng khúc nên đạo hàm của nó tồn tại và bằng 0 tại mọi điểm không nguyên và đạo hàm không tồn tại tại các điểm nguyên.

Mặt khác, đồ thị của hàm trần có thể nhận được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $f(x) := \lfloor x \rfloor$ lên trên (theo trục tung) 1 đơn vị trên các khoảng $(z; z+1)$, $z \in \mathbb{Z}$. Tuy nhiên, tại các điểm nguyên thì chúng nhận các giá trị khác.

Hàm phần dư Hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow [0;1)$ từ tập số thực $\mathbb{R}$ vào tập con $[0;1)$ của tập số thực $\mathbb{R}$, $f(x) := \{x\}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ cho tương ứng mỗi số thực x với phần dư $\{x\}$ của nó được gọi là *hàm phần dư* (hay *hàm phần phân*, *hàm phần lẻ*).

Đồ thị của hàm phần dư $f(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

**Hình 3**

Hàm phần dư chỉ nhận giá trị trong nửa khoảng $[0;1)$, *tăng từng khúc* (tăng trên từng nửa khoảng $[z; z+1)$ với $z \in \mathbb{Z}$) và *gián đoạn loại một* tại các điểm $x = z$, $z \in \mathbb{Z}$ với $\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = 1$. Đặc biệt, hàm phần dư là *hàm tuần hoàn* với chu kỳ 1, nghĩa là $\{x+1\} = \{x\}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm khoảng cách Hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow [0;0,5]$ cho tương ứng mỗi số thực x với khoảng cách tới số nguyên gần nó nhất được gọi là *hàm khoảng cách* từ x tới số nguyên gần nó nhất và kí hiệu là $f(x) :=]x[$.

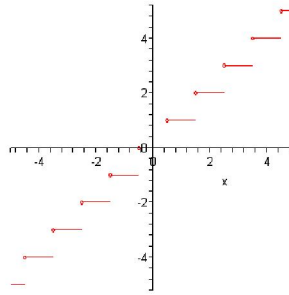
Hàm khoảng cách chỉ nhận giá trị trong đoạn $[0;0,5]$, *tăng từng khúc* trên từng đoạn $[z; z+0,5]$ và *giảm từng khúc* trên $[z+0,5; z+1]$ với $z \in \mathbb{Z}$. Hàm khoảng cách là hàm liên tục và *tuyến tính từng khúc*. Đặc biệt, hàm khoảng cách là *hàm tuần hoàn* với chu kỳ 1, nghĩa là $]x+1[=]x[$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hàm làm tròn Hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ từ tập số thực $\mathbb{R}$ vào tập số nguyên $\mathbb{Z}$ của tập số thực $\mathbb{R}$, cho tương ứng mỗi số thực x với số nguyên gần nó nhất được gọi là *hàm làm tròn* và kí hiệu là $f(x) := (x)$.

Nhận xét 3.1 Ta luôn có $(x) = [x+0,5]$ với mọi x (xem Tính chất 2.7 §2).

Đồ thị của hàm làm tròn $f(x) = (x) = [x+0,5]$

Đồ thị của hàm $f(x) = (x)$ chính là đồ thị của hàm $f(x) = [x]$ tịnh tiến sang bên trái 0,5 đơn vị (có thể thấy rõ điều này qua so sánh hai đồ thị).

**Hình 4**

Từ Tính chất 2.3 §2 suy ra một tính chất thú vị của hàm phần dư sau đây.

Tính chất 3.1 Hàm phần dư và hàm khoảng cách (từ x tới số nguyên gần nó nhất) là hàm tuần hoàn với chu kỳ nhỏ nhất bằng 1.

Ta nhắc lại rằng hàm $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và nhận giá trị cũng trong tập số thực $\mathbb{R}$ được gọi là *tuần hoàn* nếu tồn tại một số dương T sao cho $x+T \in X$ và $\varphi(x+T) = \varphi(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Số T được gọi là *chu kỳ* của hàm tuần hoàn $\varphi(x)$.

Hiển nhiên, nếu $\varphi(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T thì $\varphi(x)$ cũng là hàm tuần hoàn chu kỳ nT với mọi số tự nhiên n . Thật vậy, vì $\varphi(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T nên với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\varphi(x+nT) = \varphi(x+(n-1)T+T) = \varphi(x+(n-1)T) = \dots = \varphi(x).$$

Chứng tỏ $\varphi(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ nT với mọi số tự nhiên n .

Số $T_0 > 0$ nhỏ nhất (nếu có) trong số tất cả các chu kỳ được gọi là *chu kỳ chính* hay *chu kỳ cơ sở* của hàm tuần hoàn $\varphi(x)$.

Để ngắn gọn, khi nói hàm $\varphi(x)$ là tuần hoàn với chu kỳ T , người ta thường hiểu T là chu kỳ chính T_0 (nếu có) của $\varphi(x)$.

Thí dụ, vì $\{x+n\} = \{x\}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên hàm phần dư $y = \{x\}$ có chu kỳ là $T = n$ với mọi n là số tự nhiên và chu kỳ chính là $T_0 = 1$ (xem Hình 3).

Tương tự, vì $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên hàm $y = \lfloor x \rfloor$ có chu kỳ là $T = n$ với mọi n là số tự nhiên và chu kỳ chính là $T_0 = 1$.

Nhận xét 3.2 Có những hàm tuần hoàn không có chu kỳ chính.

Thí dụ Hàm Dirichlet $y = \chi(x)$ được định nghĩa như sau: $y = \chi(x) = 1$ khi x là số hữu tỉ; $y = \chi(x) = 0$ khi x là số vô tỉ là một hàm tuần hoàn có chu kỳ là số hữu tỉ q bất kỳ. Tuy nhiên, vì tập $\mathbb{Q}^+$ các số hữu tỉ không âm không có số nhỏ nhất (với mỗi số hữu tỉ $q > 0$ ta có thể tìm được số $\frac{q}{2}$ nhỏ hơn q cũng là số hữu tỉ) nên hàm số $y = \chi(x)$ không có chu kỳ chính, tức là không tồn tại số $T_0 > 0$ sao cho $T_0 \leq q$ với mọi chu kỳ q (với mọi số hữu tỉ q). Vậy $y = \chi(x)$ là hàm tuần hoàn không có chu kỳ chính.

Định nghĩa Hàm $y = f(x)$ xác định trên tập $X \subseteq \mathbb{R}$ được gọi là *phản tuần hoàn* chu kỳ $T > 0$ nếu với mọi $x \in X$ ta có

$$x + T \in X \text{ và } f(x + T) = -f(x).$$

Tính chất 3.2 Nếu $y = f(x)$ là phản tuần hoàn với chu kỳ $T > 0$ thì $y = f(x)$ là tuần hoàn với chu kỳ $2T > 0$. Đảo lại không đúng.

Chương 2

PHẦN NGUYÊN TRONG TOÁN SỐ HỌC VÀ ĐẠI SỐ

§1 PHẦN NGUYÊN TRONG TOÁN SỐ HỌC

1.1 Một số tính chất bổ sung về số nguyên và áp dụng trong toán số học

Nhiều bài toán số học liên quan mật thiết với phần nguyên.

Ngoài các tính chất chung cho phần nguyên nêu trong §2 Chương 1, ta còn có một số tính chất khác khá thú vị riêng cho các số nguyên và hay được áp dụng trong bài tập sau đây. Chứng minh các tính chất này có thể xem trong [2].

Tính chất 1.1 Giả sử r là phần dư khi chia một số nguyên m cho một số nguyên dương n , $m = pn + r$ với $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Khi ấy $r = m - n \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$.

Tính chất 1.2 Nếu p và q là những số nguyên dương sao cho $\frac{p}{q}$ không phải

là số nguyên thì $\frac{p}{q} \geq \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \frac{1}{q}$.

Tính chất 1.3 Cho q là số tự nhiên, x là số thực dương bất kì. Có đúng $\left\lfloor \frac{x}{q} \right\rfloor$

số tự nhiên không vượt quá x và chia hết cho q .

Hệ quả 1.1 Cho q và n là các số tự nhiên bất kỳ. Trong dãy các số $1, 2, \dots, n$

có đúng $\left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor$ số chia hết cho q ; $\left\lfloor \frac{n}{q^2} \right\rfloor$ số chia hết cho q^2 ; $\left\lfloor \frac{n}{q^3} \right\rfloor$ số chia hết

cho q^3 ; ...; $\left\lfloor \frac{n}{q^k} \right\rfloor$ số chia hết cho q^k .

Ta nhắc lại, một số tự nhiên bao giờ cũng có một phân tích duy nhất ra thừa số nguyên tố, tức là $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ với p_i là các số nguyên tố khác nhau và α_i là các số tự nhiên.

Tính chất 1.4 (Công thức Polignac) Số mũ cao nhất k của thừa số nguyên tố

q trong phân tích $n!$ ra thừa số nguyên tố bằng $k = \left[\frac{n}{q} \right] + \left[\frac{n}{q^2} \right] + \left[\frac{n}{q^3} \right] + \dots$

Thí dụ Phân tích $6!$ ra thừa số nguyên tố: $6! = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} 7^{\alpha_4} \dots p_k^{\alpha_k}$.

$$\text{Ta có } \alpha_1 = \left[\frac{6}{2} \right] + \left[\frac{6}{2^2} \right] + \left[\frac{6}{2^3} \right] + \dots = \left[\frac{6}{2} \right] + \left[\frac{6}{2^2} \right] = 3 + 1 = 4;$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{6}{3} \right] + \left[\frac{6}{3^2} \right] + \left[\frac{6}{3^3} \right] + \dots = \left[\frac{6}{3} \right] + \left[\frac{6}{3^2} \right] = 2 + 0 = 2;$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{6}{5} \right] + \left[\frac{6}{5^2} \right] + \left[\frac{6}{5^3} \right] + \dots = \left[\frac{6}{5} \right] + \left[\frac{6}{5^2} \right] = 1 + 0 = 1; \alpha_4 = \alpha_5 = \dots = 0.$$

Vậy $6! = 2^4 3^2 5$.

Tính chất 1.5 Nếu p là số nguyên tố thì $C_{p^k}^i = \frac{p^k!}{i!(p^k - i)!}$ chia hết cho p với

mọi i thỏa mãn điều kiện $1 \leq i \leq p^k - 1$.

Tính chất 1.6 (Công thức Legendre) Số các số trong dãy $1, 2, 3, \dots, n$ không chia hết cho một trong các số nguyên tố $p_1, p_2, \dots, p_k$ được tính theo công thức

$$\begin{aligned} B(n; p_1, p_2, \dots, p_k) &= n - \left(\left[\frac{n}{p_1} \right] + \left[\frac{n}{p_2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p_k} \right] \right) + \\ &+ \left(\left[\frac{n}{p_1 p_2} \right] + \left[\frac{n}{p_1 p_3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p_{k-1} p_k} \right] \right) - \left(\left[\frac{n}{p_1 p_2 p_3} \right] + \left[\frac{n}{p_1 p_2 p_4} \right] + \dots + \left[\frac{n}{p_{k-2} p_{k-1} p_k} \right] \right) \\ &+ \dots + (-1)^k \left[\frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k} \right]. \end{aligned}$$

Thí dụ 2.1 Trong dãy số $1, 2, \dots, 32$ có 9 số $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ không chia hết cho một trong các số $2, 3, 5$. Ta có

$$\begin{aligned} B(32; 2, 3, 5) &= 32 - \left(\left[\frac{32}{2} \right] + \left[\frac{32}{3} \right] + \left[\frac{32}{5} \right] \right) + \left(\left[\frac{32}{2.3} \right] + \left[\frac{32}{2.5} \right] + \left[\frac{32}{3.5} \right] \right) - \left[\frac{32}{2.3.5} \right] \\ &= 32 - (16 + 10 + 6) + (5 + 3 + 2) - 1 = 9. \end{aligned}$$

Các tính chất nêu trên được sử dụng trong một số dạng toán số học dưới đây.

Bài toán 1 Tìm chữ số tận cùng của một số tự nhiên

Phương pháp Sử dụng các tính chất của phần nguyên

Để tìm chữ số tận cùng của một số ta thường sử dụng các tính chất chung về phần nguyên trong §2 Chương 1 và các tính chất của phần nguyên nêu trên.

Đặc biệt, một số chẵn chục (có tận cùng bằng 0) phải chia hết cho 2 và cho 5.

Thí dụ 2.2 (Olympic Moscow, Vòng 1, 1940)

Hỏi $100!$ có tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0.

Giải Theo Tính chất 1.4, số mũ cao nhất của 2 và của 5 trong phân tích $100!$ ra thừa số nguyên tố sẽ là:

$$\begin{aligned} \left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{2^2} \right] + \left[\frac{100}{2^3} \right] + \left[\frac{100}{2^4} \right] + \left[\frac{100}{2^5} \right] + \left[\frac{100}{2^6} \right] &= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97. \\ \left[\frac{100}{5} \right] + \left[\frac{100}{25} \right] + \left[\frac{100}{125} \right] &= 20 + 4 + 0 = 24. \end{aligned}$$

Như vậy, $100! = 5^{24} \times 2^{97} \times k = (5 \times 2)^{24} \times q = 10^{24} \times q$.

Trong phân tích số q ra thừa số nguyên tố không có số 5 nào nên q là số chẵn nhưng không phải là số chẵn chục. Vậy $100!$ có tận cùng là 24 chữ số 0.

Thí dụ 2.3 (Thi học sinh giỏi bang New York, 1985. Câu hỏi đồng đội)

Có bao nhiêu số nguyên dương n sao cho $n!$ có tận cùng bởi 25 chữ số 0.

Giải Để $n!$ có tận cùng bởi 25 chữ số 0 thì $n!$ phải được phân tích ra thừa số nguyên tố dạng $n! = 10^{25} q = (5.2)^{25} q = 5^{25} . 2^{25} . q$, trong đó q không phải là số

chẵn chục, nghĩa là 25 phải là số mũ cao nhất của 5 trong phân tích của $n!$ ra thừa số nguyên tố.

Theo Tính chất 1.4, số mũ cao nhất của 5 trong phân tích của $n!$ chính là:

$$S_n = \left[\frac{n}{5} \right] + \left[\frac{n}{5^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{5^k} \right] = 25. \quad (*)$$

Dễ thấy rằng với $n=105$ thì $S_{105} = \left[\frac{105}{5} \right] + \left[\frac{105}{5^2} \right] = 25$. Hơn nữa, vì

$$S_{104} = \left[\frac{104}{5} \right] + \left[\frac{104}{5^2} \right] = 24 \text{ nên } n=105 \text{ là số nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này.}$$

Bốn số tiếp theo là 106, 107, 108 và 109 cũng thỏa mãn điều kiện (*). Với

$$n=110 \text{ ta có } S_{110} = \left[\frac{110}{5} \right] + \left[\frac{110}{5^2} \right] = 26. \text{ Vậy chỉ có năm số } 105!, 106!, 107!,$$

108! và 109! có tận cùng bằng đúng 25 chữ số 0.

Bài toán 2 Toán chia hết

Phương pháp Sử dụng các tính chất của phần nguyên

Thí dụ 2.4 Chứng minh rằng $n! = 1.2.3...n$ không chia hết cho 2^n .

Giải Theo Tính chất 1.4, số mũ cao nhất của 2 trong phân tích $n!$ ra thừa số

$$\text{nguyên tố là: } k = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{2^m} \right] \text{ với } 2^m \leq n < 2^{m+1}.$$

$$\text{Vì } [x] \leq x \text{ với mọi } x \text{ nên } \left[\frac{n}{2} \right] \leq \frac{n}{2}; \left[\frac{n}{2^2} \right] \leq \frac{n}{2^2}; \left[\frac{n}{2^m} \right] \leq \frac{n}{2^m}.$$

Cộng từng vế của m bất đẳng thức trên ta có:

$$k \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^m} = n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) = n \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) < n.$$

Vậy $k < n$ và $n! = 1.2.3...n$ không chia hết cho 2^n .

Bài tập 2.1 (Olympic 30.4 lần thứ 14, 2008. Đề thi đề nghị, THPT chuyên Lê Quý Đôn) Có bao nhiêu số nguyên dương n không vượt quá 2008 thỏa mãn C_{2n}^n không là bội của 4. (C_n^k là kí hiệu tổ hợp chập k của n phần tử)

Bài tập 2.2 Tìm lũy thừa cao nhất k của 7 mà $1000!$ có thể chia hết cho 7^k .

Bài tập 2.3 Chứng minh rằng $1300!$ chia hết cho 169^{53} .

Bài tập 2.4 (Thi học sinh giỏi các vùng của Miền, 1986. Câu hỏi cá nhân; Olympic 30.4 lần thứ 10, 2004, lớp 10. Đề thi đề nghị, THPT Sa Dec, Đồng Tháp) Tìm số nguyên dương nhỏ nhất N sao cho $N!$ chia hết cho 12^{12} .

Bài tập 2.5 Chứng minh rằng nếu $(n-1)!$ chia hết cho n thì n không phải là số nguyên tố.

Bài tập 2.6 Trong các số tự nhiên từ 1 đến 250 có bao nhiêu số không chia hết cho đúng hai trong ba số 2, 5, 7.

Bài tập 2.7 Trong các số tự nhiên từ 1 đến 10^6 có bao nhiêu số đồng thời không chia hết cho 6, 9, 15.

Bài tập 2.8 (Thi học sinh giỏi Quốc gia, 1995) Tìm số tự nhiên lớn nhất k thỏa mãn điều kiện: $(1994!)^{1995}$ chia hết cho 1995^k .

Thí dụ 2.5 (Thi học sinh giỏi bang New York, 1986) Khi biểu diễn trong hệ đếm cơ số 8, $N!$ được kết thúc bởi đúng 21 chữ số 0. Hãy tìm số nguyên dương lớn nhất N có tính chất này (tìm biểu diễn của N trong cơ số 10).

Giải Trước tiên ta giải thích đôi chút về hệ đếm cơ số 8.

Theo thuật toán Euclid, bất kì một số tự nhiên n nào cũng đều phân tích được ra lũy thừa của 8 dưới dạng $n = a_k 8^k + a_{k-1} 8^{k-1} + \dots + a_1 8 + a_0$, trong đó $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ nhận một trong các giá trị 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và $a_k \neq 0$. Điều này cho phép biểu diễn bất kì số tự nhiên n nào dưới dạng $n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$ với các hệ số là một trong 8 kí tự 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Biểu diễn này được gọi là *biểu diễn của n trong hệ đếm cơ số 8*.

Để tìm biểu diễn của một số trong cơ số 8 ta phải phân tích số đó dưới dạng lũy thừa của 8. Thí dụ, $16_{10} = 20_8$; $63_{10} = 77_8$; ...

Để một số là “chẵn chục” trong hệ đếm cơ số 8, số đó phải có dạng $a.8^k$ trong hệ đếm cơ số 10. Thí dụ, $16_8 = 2.8^1$; $100_8 = 8^2 = 64$; $1000_8 = 8^3 = 512$, ...

Bây giờ ta đi giải bài toán.

Vì khi biểu diễn trong hệ đếm cơ số 8, số $N!$ được kết thúc bởi đúng 21 chữ số 0 nên $N!$ phải là bội của $8^{21} = 2^{63}$, nhưng $N!$ không là bội của $8^{22} = 2^{66}$. Nghĩa là, trong phân tích của ra thừa số nguyên tố thì số mũ cao nhất S_N của 2 phải thỏa mãn điều kiện $63 \leq S_N < 66$. Theo Tính chất 1.4 §1 Chương 2, số mũ cao nhất của 2 trong phân tích của $N!$ ra thừa số nguyên tố được tính theo

$$\text{công thức } 63 \leq S_N = \left[\frac{N}{2} \right] + \left[\frac{N}{2^2} \right] + \dots + \left[\frac{N}{2^k} \right] < 66.$$

Số N nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức trên là $N = 64$ vì

$$S_{64} = \left[\frac{64}{2} \right] + \left[\frac{64}{2^2} \right] + \left[\frac{64}{2^3} \right] + \left[\frac{64}{2^4} \right] + \left[\frac{64}{2^5} \right] + \left[\frac{64}{2^6} \right] = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63,$$

còn

$$S_{63} = \left[\frac{63}{2} \right] + \left[\frac{63}{2^2} \right] + \left[\frac{63}{2^3} \right] + \left[\frac{63}{2^4} \right] + \left[\frac{63}{2^5} \right] = 31 + 15 + 7 + 4 + 1 = 58.$$

Ta có: $64! = 2^{63} \times q$; $65! = 64! \times 65 = 2^{63} \times 65q$;

$$66! = 64! \times 65 \times 66 = 2^{63} \times 65 \times 66q = 2^{63} \times 2 \times 65 \times 33q = 2^{64} \times q_1,$$

$$67! = 64! \times 65 \times 66 \times 67 = 2^{64} q_1 \times 67 = 2^{64} \times q_2; \text{ với } q, q_1, q_2 \text{ là số lẻ;}$$

Nhưng

$$68! = 64! \times 65 \times 66 \times 67 \times 68 = 2^{64} q_2 \times 68 = 2^{64} q_2 \times 2^4 \times 17 = 2^{66} \times q_3.$$

Vậy, $68!$ có thừa số $2^{66} = 8^{22}$ trong phân tích ra thừa số nguyên tố, hay $68!$ có 22 chữ số 0 trong hệ cơ số 8. Do đó số N lớn nhất mà trong phân tích $N!$ ra thừa số chứa $2^{63} = 8^{21}$, hay $N!$ có 21 chữ số 0 trong hệ cơ số 8 là $N = 67$.

Bài tập 2.9 (Vô địch toán Bungaria, 1968) Chứng minh rằng C_n^k là số lẻ khi và chỉ khi số $k, n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện: Nếu ở một hàng nào đó của số k trong hệ đếm cơ số 2 là chữ số 1, thì ở cùng hàng đó của số n trong hệ đếm cơ số 2 cũng là chữ số 1.

1.2 Nhị thức Newton và ứng dụng trong toán số học chứa phần nguyên

Đẳng thức 2.1 Với mọi a, b là các số nguyên; x là số nguyên dương không chính phương; n là số tự nhiên, ta có thể biểu diễn $(a \pm b\sqrt{x})^n$ dưới dạng

$$(a + b\sqrt{x})^n = A_n + B_n\sqrt{x} \text{ và } (a - b\sqrt{x})^n = A_n - B_n\sqrt{x},$$

trong đó A_n, B_n là các số nguyên.

Chứng minh 1 Với $n = 2$ ta có: $(a + b\sqrt{x})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{x} + b^2x = A_2 + B_2\sqrt{x}$.

Suy ra $A_2 = a^2 + b^2x$ và $B_2 = 2ab$, A_2 và B_2 là những số nguyên.

Tương tự, $(a - b\sqrt{x})^2 = a^2 - 2ab\sqrt{x} + b^2x = A_2 - B_2\sqrt{x}$.

Theo giả thiết qui nạp ta có:

$$(a + b\sqrt{x})^{n+1} = (A_n + B_n\sqrt{x})(a + b\sqrt{x}) = (aA_n + bB_nx) + (aB_n + bA_n)\sqrt{x}.$$

Vậy $A_{n+1} = aA_n + bB_nx$ và $B_{n+1} = aB_n + bA_n$ là những số nguyên.

Và ta cũng có:

$$\begin{aligned}(a - b\sqrt{x})^{n+1} &= (A_n - B_n\sqrt{x})(a - b\sqrt{x}) = (aA_n + bB_nx) - (aB_n + bA_n)\sqrt{x} \\ &= A_{n+1} - B_{n+1}\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Vậy Đẳng thức 2.1 được chứng minh.

Đẳng thức 2.2

a) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{2n} = A_n + B_n\sqrt{xy}$ và $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{2n} = A_n - B_n\sqrt{xy}$.

$$b) \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{2n+1} = A_n \sqrt{x} + B_n \sqrt{y} \text{ và } \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^{2n+1} = A_n \sqrt{x} - B_n \sqrt{y}.$$

Chứng minh a) Với $n=1$:

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = (x+y) + 2\sqrt{xy} = A_1 + B_1\sqrt{xy}.$$

Suy ra $A_1 = x+y$ và $B_1 = 2$, A_1 và B_1 là những số nguyên.

Tương tự,

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = (x+y) - 2\sqrt{xy} = A_1 - B_1\sqrt{xy}.$$

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{2(n+1)} &= \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{2n} \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = \left(A_n + B_n\sqrt{xy}\right)(x+y+2\sqrt{xy}) \\ &= A_n(x+y) + 2B_nxy + (2A_n + B_n(x+y))\sqrt{xy} = A_{n+1} + B_{n+1}\sqrt{xy}, \end{aligned}$$

$A_{n+1} = A_n(x+y) + 2B_nxy$ và $B_{n+1} = 2A_n + B_n(x+y)$ là những số nguyên.

Tương tự,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^{2(n+1)} &= \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^{2n} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = \left(A_n - B_n\sqrt{xy}\right)(x+y-2\sqrt{xy}) \\ &= A_n(x+y) + 2B_nxy - (2A_n + B_n(x+y))\sqrt{xy} = A_{n+1} - B_{n+1}\sqrt{xy}. \end{aligned}$$

b) Với $n=1$ ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^3 &= \left(\sqrt{x}\right)^3 + 3\left(\sqrt{x}\right)^2\sqrt{y} + 3\sqrt{x}\left(\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^3 \\ &= x\sqrt{x} + 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{x}y + y\sqrt{y} = (x+3y)\sqrt{x} + (y+3x)\sqrt{y} = A_1\sqrt{x} + B_1\sqrt{y}. \end{aligned}$$

Suy ra: $A_1 = x+3y$ và $B_1 = y+3x$, A_1 và B_1 là những số nguyên.

Tương tự,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^3 &= \left(\sqrt{x}\right)^3 - 3\left(\sqrt{x}\right)^2\sqrt{y} + 3\sqrt{x}\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{y}\right)^3 \\ &= x\sqrt{x} - 3x\sqrt{y} + 3\sqrt{x}y - y\sqrt{y} = (x+3y)\sqrt{x} - (y+3x)\sqrt{y} = A_1\sqrt{x} - B_1\sqrt{y}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp ta có:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{2n+3} &= (\sqrt{x} + \sqrt{y})^{2n+1} (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (A_n \sqrt{x} + B_n \sqrt{y})(x + y + 2\sqrt{xy}) \\&= A_n(x + y)\sqrt{x} + 2A_n x \sqrt{y} + B_n(x + y)\sqrt{y} + 2B_n y \sqrt{x} = A_{n+1}\sqrt{x} + B_{n+1}\sqrt{y},\end{aligned}$$

trong đó

$$A_{n+1} = A_n(x + y) + 2B_n y \text{ và } B_{n+1} = 2A_n x + B_n(x + y)$$

là những số nguyên. Tương tự,

$$\begin{aligned}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^{2n+3} &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})^{2n+1} (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = (A_n \sqrt{x} - B_n \sqrt{y})(x + y - 2\sqrt{xy}) \\&= A_n(x + y)\sqrt{x} - 2A_n x \sqrt{y} - B_n(x + y)\sqrt{y} + 2B_n y \sqrt{x} = A_{n+1}\sqrt{x} - B_{n+1}\sqrt{y}.\end{aligned}$$

Vậy các công thức trong Đẳng thức 2.2 được chứng minh.

Nhị thức Newton (các Đẳng thức 2.1 và 2.2) được áp dụng rất hiệu quả vào nhiều bài toán, trong đó có các bài toán số học.

Phương pháp 2 Áp dụng nhị thức Newton

Thí dụ 2.6 Cho $a = 5 + 2\sqrt{6}$; $b = 5 - 2\sqrt{6}$. Đặt $S_n = a^n + b^n$.

a) Chứng minh: $a^2 = 10a - 1$; $b^2 = 10b - 1$.

b) Chứng minh S_{n+4} và S_n là các số nguyên có cùng chữ số tận cùng.

c) Tìm chữ số hàng đơn vị của $\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{48}\right]$.

d) Tìm chữ số tận cùng của $\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{250}\right]$.

Giải a) Ta có: $a^2 = (5 + 2\sqrt{6})^2 = 49 + 20\sqrt{6} = 10(5 + 2\sqrt{6}) - 1 = 10a - 1$.

Tương tự, $b^2 = (5 - 2\sqrt{6})^2 = 50 - 20\sqrt{6} - 1 = 10(5 - 2\sqrt{6}) - 1 = 10b - 1$.

Nhận xét rằng, a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 10x + 1 = 0$.

b) Ta có $a^2 = 10a - 1$ và $b^2 = 10b - 1$.

Suy ra $a^{n+2} = 10a^{n+1} - a^n$ và $b^{n+2} = 10b^{n+1} - b^n$.

Vậy $a^{n+2} + b^{n+2} = 10a^{n+1} + 10b^{n+1} - a^n - b^n$ hay $S_{n+2} = 10S_{n+1} - S_n$.

Thay n bằng $n+2$ ta có $S_{n+4} = 10S_{n+3} - S_{n+2}$. Suy ra

$$S_{n+4} = 10S_{n+3} - S_{n+2} = 10S_{n+3} - (10S_{n+1} - S_n) = 10(S_{n+3} - S_{n+1}) + S_n$$

hay $S_{n+4} - S_n = 10(S_{n+3} - S_{n+1})$ chia hết cho 10.

Vậy S_{n+4} và S_n là hai số nguyên có cùng chữ số tận cùng.

c) Ta có $S_0 = (5 + \sqrt{6})^0 + (5 - \sqrt{6})^0 = 2$; $S_1 = (5 + \sqrt{6})^1 + (5 - \sqrt{6})^1 = 10$

$$\text{và } (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{48} = \left((\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 \right)^{24} = (5 + 2\sqrt{6})^{24}.$$

Số $S_{24} = (5 + 2\sqrt{6})^{24} + (5 - 2\sqrt{6})^{24}$ là số nguyên có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của S_0 vì

$$S_{24} - S_0 = (S_{24} - S_{20}) + (S_{20} - S_{16}) + \dots + (S_4 - S_0).$$

Mỗi số hạng $S_{4n+4} - S_{4n}$ với $n = 0, 1, 2, \dots, 5$ đều chia hết cho 10 nên $S_{24} - S_{20}$ chia hết cho 10, mà $S_0 = 2$ nên S_{24} có chữ số tận cùng là 2.

Mặt khác, $0 < 5 - 2\sqrt{6} < 1$. Suy ra $(5 - 2\sqrt{6})^{24} < 1$. Vậy

$$S_{24} - 1 = (5 + 2\sqrt{6})^{24} + (5 - 2\sqrt{6})^{24} - 1 < (5 + 2\sqrt{6})^{24} < S_{24}.$$

Chúng ta $\left[(5 + 2\sqrt{6})^{24} \right] = S_{24} - 1$. Vì S_{24} có chữ số tận cùng là 2 nên

$$\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{48} \right] = \left[(5 + 2\sqrt{6})^{24} \right] = S_{24} - 1 \text{ có chữ số tận cùng là 1.}$$

d) Ta có $\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{250} \right] = \left[(5 + 2\sqrt{6})^{125} \right].$

Vì $125 - 1 = 124 = 4 \times 31$ nên S_{125} có chữ số tận cùng là 0 (trùng với chữ số tận cùng của S_1). Mặt khác, $0 < 5 - 2\sqrt{6} < 1$ nên $0 < (5 - 2\sqrt{6})^{250} < 1$. Vậy

$$S_{125} - 1 = (5 + 2\sqrt{6})^{125} + (5 - 2\sqrt{6})^{125} - 1 < (5 + 2\sqrt{6})^{125} < S_{125}.$$

Chứng tỏ $\left[\left(5 + 2\sqrt{6} \right)^{125} \right] = S_{125} - 1$. Mà S_{125} có chữ số tận cùng là 0.

Vậy số $\left[\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} \right)^{250} \right] = \left[\left(5 + 2\sqrt{6} \right)^{125} \right]$ có số tận cùng là 9.

Thí dụ 2.7 (Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, tháng 2, 2005) Tìm số nguyên tố p

nhỏ nhất để $\left[\left(3 + \sqrt{p} \right)^{2n} \right] + 1$ chia hết cho 2^{n+1} với mọi số tự nhiên n .

Giải Với $p = 2$, chọn $n = 2$ thì $\left[\left(3 + \sqrt{2} \right)^4 \right] + 1 = 378$ không chia hết cho 2^3 .

Với $p = 3$, chọn $n = 1$ thì $\left[\left(3 + \sqrt{3} \right)^2 \right] + 1 = 23$ không chia hết cho 2^2 .

Như vậy, số nguyên tố nhỏ nhất thỏa mãn đầu bài chỉ có thể $p = 5$.

Với $p = 5$ ta có: $x_1 = \left(3 + \sqrt{5} \right)^2 = 14 + 6\sqrt{5}$ và $x_2 = \left(3 - \sqrt{5} \right)^2 = 14 - 6\sqrt{5}$. Vậy

$\left(3 + \sqrt{5} \right)^2 + \left(3 - \sqrt{5} \right)^2 = 28$ và $\left(3 + \sqrt{5} \right)^2 \cdot \left(3 - \sqrt{5} \right)^2 = 16$ hay $x_{1,2}$ là nghiệm của

phương trình bậc hai $x^2 - 28x + 16 = 0$. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ ta có:

$$S_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} = (x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1^n + x_2^n) = 28S_{n+1} - 16S_n.$$

Như vậy, S_n là nghiệm của phương trình sai phân cấp hai

$$S_{n+2} - 28S_{n+1} + 16S_n = 0. \text{ Do } 0 < x_2 = \left(3 - \sqrt{5} \right)^2 = 14 - 6\sqrt{5} < 1 \text{ nên } 0 < x_2^n < 1.$$

Suy ra $S_n > x_1^n = S_n - x_2^n > S_n - 1$ hay $\left[x_1^n \right] + 1 = S_n$.

Ta có $S_1 = 28$ chia hết cho $2^2 = 4$. Giả sử S_n chia hết cho 2^{n+1} và S_{n+1} chia

hết cho 2^{n+2} . Khi ấy $\left[x_1^{n+2} \right] + 1 = S_{n+2} = 28S_{n+1} + 16S_n = 2^{n+3}(7q_1 + 2q_2)$ chia

hết cho 2^{n+3} hay $\left[\left(3 + \sqrt{5} \right)^{2n} \right] + 1 = \left[x_1^n \right] + 1$ chia hết cho 2^{n+1} với mọi n .

Bài tập 2.10 Tìm hai chữ số tận cùng của số $\left[\left(29 + \sqrt{21} \right)^{2010} \right]$.

Bài tập 2.11 Chứng minh số $(8 + 3\sqrt{7})^7$ có bảy chữ số 9 liên sau dấu phẩy.

Bài tập 2.12 (Tập chí *Toán học và Tuổi trẻ*) Chứng minh rằng trong biểu diễn thập phân của số $(7 + 4\sqrt{3})^n$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, có ít nhất n chữ số 9 ngay sau dấu phẩy.

Bài tập 2.13 (Tập chí *Toán học và Tuổi trẻ*) Chứng minh rằng phần thập phân của $(5 + 2\sqrt{6})^n$, với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, bắt đầu bằng n chữ số giống nhau.

Bài tập 2.14 Tìm số mũ cao nhất của 2 trong phân tích $\left[(1 + \sqrt{3})^n\right]$, $n \in \mathbb{N}$ thành tích các thừa số nguyên tố.

Bài tập 2.15 (Olympic 30.4 lần thứ 7, 2001, Lớp 10. Đề thi đề nghị, THPT chuyên Trà Vinh) Tìm số k lớn nhất sao cho $\left[(1 + \sqrt{3})^{2001}\right]$ chia hết cho 2^k .

Bài tập 2.16 (Olympic 30.4 lần thứ 15, 2009, lớp 10. Đề thi đề nghị, Quốc học Huế) Cho $x_n = \left[(4 + \sqrt{15})^n\right]$ với $n \in \mathbb{N}$. Tìm số dư của x_n khi chia cho 8.

Bài tập 2.17 (Olympic 30.4 lần thứ 10, 2004. Đề thi đề nghị, THPT Lý Tự Trọng, Cần Thơ) Chứng minh rằng $\left[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2n}\right]$ không chia hết cho 5 với mọi số tự nhiên n .

§2 TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT SỐ HOẶC MỘT BIỂU THỨC CHỨA PHẦN NGUYÊN

Tính giá trị của một số hoặc một biểu thức chứa phần nguyên là một dạng toán độc lập, đồng thời nó liên quan mật thiết và có thể hỗ trợ để giải các dạng toán khác (chứng minh hệ thức chứa phần nguyên; giải phương trình và hệ phương trình chứa phần nguyên;...).

Để tính một số hoặc một biểu thức chứa phần nguyên, ta cần sử dụng các tính chất của phần nguyên nêu trong §2 Chương 1, kết hợp với các kĩ thuật tính toán khác, đặc biệt là:

Phương pháp “kẹp”

Đánh giá số hạng để “kẹp” số cần tính phần nguyên giữa hai số nguyên liên tiếp: Đưa biểu thức về dạng $z \leq A < z + 1$ và kết luận $[A] = z$;

Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Thí dụ 2.8 (Tập chí *Toán học trong nhà trường*, 1981)

Tìm phần nguyên của $a_n = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}}_n$ (n dấu căn).

Giải Dãy $\{a_n\}$ là dãy tăng và $a_n > a_1 = \sqrt{6} > 2$ với mọi n .

Ta lại có: $a_1 = \sqrt{6} \approx 2,449489742 < 3$. Vậy $[a_1] = 2 < 3$.

Ta có $a_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}} = \sqrt{6 + a_1} < \sqrt{6 + 3} = 3$.

Theo quy nạp ta có $2 < a_n < 3$ với mọi n . Suy ra $[a_n] = 2$ với mọi n .

Thí dụ 2.9 Tìm phần nguyên của số $b_n = \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}}_n$.

Giải Dãy $\{b_n\}$ là dãy tăng và $b_n > b_1 = \sqrt[3]{6} \approx 1,8171205928 > 1$ với mọi n .

Ta có: $b_1 = \sqrt[3]{6} \approx 1,8171205928 < 2$; $b_2 = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6}} < \sqrt[3]{6 + 2} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Theo quy nạp ta có $b_{n+1} = \sqrt[3]{6 + \underbrace{\sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}_{n+1}} = \sqrt[3]{6 + b_n} < \sqrt[3]{6 + 2} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Vậy $1 < b_n < 2$ với mọi n hay $[b_n] = 1$ với mọi n .

Thí dụ 2.10 (Tập chí *Toán học trong nhà trường*, 1986) Tìm phần nguyên

của số $c_n = \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}}}}_n + \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}}}_n$.

Giải Ta có: $4 < c_n = a_n + b_n < 3 + 2 = 5$ với mọi n . Suy ra $[c_n] = 4$ với mọi n .

Thí dụ 2.11 Tìm phần nguyên của $A_n = \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}$.

Giải Ta có: $2n + 1 < \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}} < 2(n + 1)$.

Vì $2n + 1$ và $2n + 2$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên $[A_n] = 2n + 1$ với mọi n .

Thí dụ 2.12 (Thi học sinh giỏi các vùng của Mĩ, 1987) Biết phương trình $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6 = 0$ có đúng hai nghiệm thực x_1 và x_2 . Tính $[x_1]$ và $[x_2]$.

Giải Ta có $-2 < x_1 < -1$ và $3 < x_2 < 4$. Suy ra $[x_1] = -2$ và $[x_2] = 3$.

Thí dụ 2.13 Tính phần nguyên của $A = \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Giải Ta có $n^2 + 3n < A < n^2 + 3n + 1$ hay $[A] = x = n^2 + 3n$.

Thí dụ 2.14 Tính $\left[\frac{[m\alpha]n}{\alpha} \right]$, với m, n là các số nguyên dương và α là số vô tỉ, $\alpha > n$.

Giải Do α là số vô tỉ nên $m\alpha$ cũng là số vô tỉ. Theo định nghĩa phần nguyên ta có $[m\alpha] = m\alpha - \{m\alpha\}$, $0 < \{m\alpha\} < 1$. Vậy

$$\left[\frac{[m\alpha]n}{\alpha} \right] = \left[\frac{(m\alpha - \{m\alpha\})n}{\alpha} \right] = \left[mn - \frac{\{m\alpha\}n}{\alpha} \right] = mn + \left[-\frac{\{m\alpha\}n}{\alpha} \right].$$

Do $\alpha > n > 0$ nên $-1 < -\frac{n}{\alpha} < 0$ và ta có:

$$0 < \{m\alpha\} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\{m\alpha\} < 0 \Leftrightarrow -n < -n\{m\alpha\} < 0 \Leftrightarrow -\frac{n}{\alpha} < -\frac{n\{m\alpha\}}{\alpha} < 0.$$

Suy ra $-1 < -\frac{n\{m\alpha\}}{\alpha} < 0$ hay $\left[-\frac{\{m\alpha\}n}{\alpha} \right] = -1$. Vậy $\left[\frac{[m\alpha]n}{\alpha} \right] = mn - 1$.

Thí dụ 2.15 (Tập chí Toán học và Tuổi trẻ, số 364, 2007) Tính $[S]$ với

$$S = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}.$$

Giải Nhận xét rằng mọi số hạng trong tổng S đều lớn hơn 1 nên

$$S = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3+1}{3}} + \sqrt[4]{\frac{4+1}{4}} + \dots + \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} > n-1.$$

Mặt khác, ta lại có bất đẳng thức $1+kx < (1+x)^k$ hay $\sqrt[k]{1+kx} < 1+x$ với mọi

$$x > 0. \text{ Chọn } x = \frac{1}{k^2}, \text{ ta được } \sqrt[k]{1+kx} = \sqrt[k]{1+\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} < 1 + \frac{1}{k^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên với $k = 2, 3, \dots, n$ và cộng lại, ta được

$$\begin{aligned} S &< (n-1) + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < (n-1) + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= n-1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = (n-1) + 1 - \frac{1}{n} = n - \frac{1}{n} < n. \end{aligned}$$

Suy ra $n-1 < S < n$. Vậy $[S] = n-1$.

Phương pháp sử dụng nhị thức Newton

Thí dụ 2.16 (Olympic 30.4 lần thứ 9, 2003, lớp 10. Đề thi đề nghị, THPT Trung Vương, thành phố Hồ Chí Minh)

Chứng minh rằng $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ là một số lẻ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh Theo Đẳng thức 2.1 tồn tại hai số nguyên A, B thỏa mãn

$$(2+\sqrt{3})^n = A+B\sqrt{3} \text{ và } (2-\sqrt{3})^n = A-B\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2A.$$

Mặt khác, vì $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ nên $0 < (2-\sqrt{3})^n < 1$, hay $-1 < -(2-\sqrt{3})^n < 0$.

Cộng vế với vế hai bất đẳng thức trên ta được: $2A-1 < (2+\sqrt{3})^n < 2A$.

Suy ra $\left[(2+\sqrt{3})^n\right] = 2A-1$ là một số lẻ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 2.18 (Tập chí *Toán học và Tuổi trẻ*) Tính $\left[\left(4 + \sqrt{15} \right)^7 \right]$

Bài tập 2.19 (Olympic 30.4 lần thứ 7, 2001, lớp 11. Đề thi đề nghị, THPT Thoại Ngọc Hầu, An Giang) Tính $\left[\left(45 + \sqrt{2001} \right)^{2001} \right]$.

§3 CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC CHỨA PHẦN NGUYÊN

Chứng minh các hệ thức chứa phần nguyên thực chất có thể coi là chứng minh các tính chất của phần nguyên. Để chứng minh các hệ thức chứa phần nguyên ta phải sử dụng các tính chất đã nêu trong §2 Chương 1, kết hợp với các kỹ thuật tính toán đại số khác để sử dụng được phương pháp “kẹp”. Những bài tập chứng minh các hệ thức chứa phần nguyên cũng liên quan chặt chẽ với các bài tập tính giá trị của biểu thức chứa phần nguyên. Dưới đây là các ví dụ.

Thí dụ 2.17 (Cuộc thi mang tên Niels Henrik Abel, 1995-1996, vòng chung kết) Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng: $\left[\sqrt{4n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+2} \right]$.

Chứng minh Đặt $\left[\sqrt{4n+2} \right] = a$; $\left[\sqrt{4n+1} \right] = b$. Rõ ràng $a \geq b$.

Do $\left[\sqrt{4n+2} \right] = a$ nên $0 < a \leq \sqrt{4n+2}$ hay $a^2 \leq 4n+2$.

Giả sử $a^2 = 4n+2$. Khi ấy $a^2 \equiv 2 \pmod{4}$. Vô lí vì một số a chỉ có thể có dạng $a = 4k$; $a = 4k+1$; $a = 4k+2$ hoặc $a = 4k+3$, tức là a^2 chỉ có thể chia hết cho 4 (khi $a = 4k$ hoặc $a = 4k+2$) hoặc chia cho 4 dư 1 (khi $a = 4k+1$ hoặc $a = 4k+3$). Suy ra $a^2 < 4n+2$ hay $a^2 \leq 4n+1$, tức là $a \leq \sqrt{4n+1}$. Do a là số nguyên nên $a \leq \left[\sqrt{4n+1} \right]$. Vậy $a \leq b$. Do đó $a = b$.

Bài tập 2.20 (Olympic Áo, 1974; Đề thi chọn đội tuyển Hồng Kông dự thi Quốc tế 1988) Chứng minh rằng: $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+2} \right]$.

Bài tập 2.21 (Olympic Canada, 1987) Cho n là số tự nhiên. Chứng minh rằng: $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+2} \right] = \left[\sqrt{4n+3} \right]$.

Bài tập 2.22 (Tạp chí Kvant, M532) Cho $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ và $b_n = \sqrt{4n+2}$, n là số tự nhiên. Chứng minh rằng: a) $[a_n] = [b_n]$; b) $0 < b_n - a_n < \frac{1}{16n\sqrt{n}}$.

Bài tập 2.23 a) Chứng minh rằng $\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right] = \left[\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \right]$.

b) Tìm x để $\left[\sqrt{n+x} + \frac{1}{2} \right] = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} \right]$ đúng với mọi số n nguyên dương.

§4 GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA PHẦN NGUYÊN

Phương trình và hệ phương trình chứa phần nguyên có một lượng bài toán rất đa dạng và phong phú. Giải mỗi phương trình thường đòi hỏi một số suy luận đặc biệt. Tương tự như phương trình chứa trị tuyệt đối, giải phương trình chứa phần nguyên thường đưa về giải hệ bất phương trình, nhưng khó hơn vì có thêm “điều kiện nguyên” (ẩn hoặc biểu thức chứa ẩn là số nguyên). Phương trình chứa phần nguyên cũng khó hơn phương trình vô tỉ vì phương trình vô tỉ thường tương đương với một hệ phương trình và bất phương trình trên tập số thực mà không đòi hỏi “điều kiện nguyên”. Trong § này chúng tôi trình bày một số phân loại các dạng phương trình và các phương pháp giải chung. Các thí dụ minh họa được chọn lựa nhằm làm sáng tỏ phương pháp. Các bài tập nêu trong chương này nhằm minh họa số lượng phong phú và đa dạng của phương trình chứa phần nguyên, lời giải chi tiết các bài tập đã được trình bày trong [2].

4.1 PHƯƠNG TRÌNH CHỨA MỘT DẤU PHẦN NGUYÊN DẠNG

$$[f(x)] = \varphi(x)$$

Phương pháp 1 Sử dụng định nghĩa

$$[f(x)] = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \leq f(x) < 1 + \varphi(x); \\ \varphi(x) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Như vậy, để giải phương trình $[f(x)] = \varphi(x)$, ta đưa nó về giải hệ bất

$$\text{phương trình } \begin{cases} f(x) - \varphi(x) \geq 0; \\ f(x) - \varphi(x) < 1; \\ \varphi(x) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Trong những bài toán cụ thể, ta thường chỉ giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} f(x) - \varphi(x) \geq 0; \\ f(x) - \varphi(x) < 1. \end{cases} \quad (*)$$

để được nghiệm, sau đó kiểm tra điều kiện $\varphi(x) \in \mathbb{Z}$ với các nghiệm tìm được. Ngược lại, trong một số bài tập, nhiều khi ta lại giải phương trình $\varphi(x) = z$ với z là số nguyên để được x hoặc $[x]$ (thường là tập hữu hạn các số nguyên), sau đó thử vào hệ (*) để được nghiệm.

Nhận xét 4.1 Tương tự như phương trình chứa trị tuyệt đối, nhiều phương trình chứa phần nguyên có nhiều nghiệm, thậm chí có vô số nghiệm hoặc nghiệm là cả một đoạn nào đó của đường thẳng thực.

Thí dụ 2.18 Giải phương trình $3[x] - 2x = 3,6$.

Cách giải 1 Ta có:

$$3[x] - 2x = 3,6 \Leftrightarrow [x] = \frac{2x + 3,6}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x + 3,6}{3} \leq x < \frac{2x + 3,6}{3} + 1; \\ \frac{2x + 3,6}{3} \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Giải (1): $(1) \Leftrightarrow 3,6 \leq x < 3 + 3,6 \Leftrightarrow 3,6 \leq x < 6,6$.

Do $3,6 \leq x < 6,6$ nên $3,6 \leq \frac{2x + 3,6}{3} < 5,6$. Vì $\frac{2x + 3,6}{3} \in \mathbb{Z}$ nên $\frac{2x + 3,6}{3}$ chỉ có thể bằng 4 hoặc 5.

Nếu $\frac{2x+3,6}{3} = 4$ thì $x = 4,2$ (thỏa mãn điều kiện $3,6 \leq x < 6,6$);

Nếu $\frac{2x+3,6}{3} = 5$ thì $x = 5,7$ (thỏa mãn điều kiện $3,6 \leq x < 6,6$);.

Cách giải 2 Giải (2):

(2) $\Leftrightarrow \frac{2x+3,6}{3} \in \mathbb{Z}$ hay $\frac{2x}{3} + 1,2 = z$ với z là một số nguyên. Hai số $\frac{2x}{3}$ và $1,2$ không phải là số nguyên có tổng là một số nguyên nên theo tính chất 2.10

§2 Chương 1 ta có $\left\{ \frac{2x}{3} \right\} + \{1,2\} = 1$ hay $\left\{ \frac{2x}{3} \right\} = 0,8$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3,6 \leq x < 3+3,6 \Leftrightarrow 3,6 \leq x < 6,6$.

Vì $3,6 \leq x < 6,6$ nên $2,4 \leq \frac{2x}{3} < 4,4$. Do $\left\{ \frac{2x}{3} \right\} = 0,8$ nên chỉ có hai khả năng

sau: 1) $\frac{2x}{3} = 2,8$. Suy ra $x = 4,2$ hoặc 2) $\frac{2x}{3} = 3,8$. Suy ra $x = 5,7$.

Đáp số: $x = 4,2$ hoặc $x = 5,7$.

Thí dụ 2.19 Giải phương trình $x^2 - 8[x] + 7 = 0$.

Giải Ta có: $x^2 - 8[x] + 7 = 0 \Leftrightarrow [x] = \frac{x^2 + 7}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 7}{8} \leq x < \frac{x^2 + 7}{8} + 1; \\ \frac{x^2 + 7}{8} \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1)$

Giải (1): (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 15 > 0; \\ x^2 - 8x + 7 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5; x < 3; \\ 1 \leq x \leq 7. \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 3 \text{ hoặc } 5 < x \leq 7$.

Suy ra: $[x]$ chỉ có thể bằng 1; 2; 5; 6; 7. Từ $x^2 - 8[x] + 7 = 0$ ta suy ra $x^2 = 8[x] - 7$. Vậy x^2 chỉ có thể bằng 1; 9; 33; 41; 49. Chứng tỏ $x \in \{1, 3, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7\}$, $x = 3$ bị loại. Ta đi đến **Đáp số:** $x \in \{1, \sqrt{33}, \sqrt{41}, 7\}$.

Bài tập 2.24 Giải các phương trình chứa một phần nguyên:

- 1) $[x] + 1 = -7$; 2) $[2x] + 0,3 = 7,3$; 3) $\left[7x - \frac{3}{5}\right] = 2,5$;
4) $[x] + 0,3 = 7,4$; 5) $[5,75] + x = 8$; 6) $[2x - 7,5] = -2$;
7) $\{x\} = 0$; 8) $\{-4,7\} + \{1,3\} - x = 8,4$; 9) $\{5,73\} + 2x = 4$;
10) $2[x + 0,7] + x - 15 = 0$; 11) $\left[\frac{2-5x}{4}\right] = -x$; 12) $\left[\frac{3x+1}{5}\right] = 2x-1$;
13) $\left[\frac{7x-5}{3}\right] = \frac{16x+3}{5}$; 14) $\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$; 15) $x^2 - 8[x] + 7 = 0$;
16) $x^2 - 6[x] + 5 = 0$; 17) $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$.

Bài tập 2.25 Một người đi bộ với vận tốc 5 km/h. Cứ sau 4km người ấy lại nghỉ, mỗi lần nghỉ, trừ lần thứ tư là 10 phút. Lần nghỉ thứ tư là 1 giờ. Hỏi người ấy đã đi được bao nhiêu km biết rằng người ấy khởi hành lúc 4 giờ sáng và đến đích vào lúc 12 giờ trưa.

Bài tập 2.26 Giải và biện luận phương trình $[ax] = m$ với a là số thực bất kì, còn m là số nguyên.

Bài tập 2.27 (Olympic 30.4 lần thứ 10, 2004, lớp 10. Đề thi đề nghị, THPT chuyên Nguyễn Du, Đắk Lắk) Giải phương trình $x^2 + [x-1] = 2004$.

Phương pháp 2 (Đặt ẩn phụ) Đặt ẩn phụ chứa phần nguyên để đưa về phương trình đại số. Giải phương trình đại số và sau đó thay ẩn phụ để giải phương trình chứa phần nguyên. Chú ý tới các điều kiện nguyên (thí dụ, phần nguyên của một số phải là số nguyên).

Thí dụ 2.20 Giải phương trình $3[x]^2 + 5[x] = 2$.

Giải Đặt $[x] = y, y \in \mathbb{Z}$. Phương trình trở thành $3y^2 + 5y - 2 = 0$.

Suy ra $y = -2$ hoặc $y = -\frac{1}{3}$ ($y = -\frac{1}{3}$ loại do $y \in \mathbb{Z}$).

Vậy $[x] = y = -2$. Suy ra $-2 \leq x < -1$. **Đáp số:** $-2 \leq x < -1$.

Bài tập 2.28 Giải a) $[x]^2 - 2[x] - 3 = 0$; b) $[x]^2 - [x] - 2 = 0$.

Phương pháp 3 (Chia khoảng) Chia trục số thành một số khoảng. Giải phương trình trong từng khoảng bằng cách đánh giá giá trị của biểu thức, chuyển phương trình chứa phần nguyên về hệ bất phương trình không chứa phần nguyên.

Thí dụ 2.21 Giải phương trình $x^3 - [x] = 3$.

Cách giải 1 (Chia khoảng) Ta có:

$$x^3 - [x] = 3 \Leftrightarrow [x] = x^3 - 3 \Leftrightarrow 0 \leq x - (x^3 - 3) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x - 3 \leq 0; \\ x^3 - x - 2 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Với $x \leq -1$ thì $x^2 \geq 1$ hay $x^2 - 1 \geq 0$. Khi ấy $x^3 - x = x(x^2 - 1) \leq 0$. Do đó bất đẳng thức $x^3 - x - 2 > 0$ không thỏa mãn hay $x \leq -1$ không là nghiệm của (1).

Với $-1 < x \leq 0$ thì $-1 < x^3 \leq 0$ và $0 \leq -x < 1$. Suy ra $x^3 - x - 2 < -1$. Do đó bất đẳng thức $x^3 - x - 2 > 0$ không thỏa mãn hay $-1 < x \leq 0$ cũng không phải là nghiệm của (1).

Với $0 < x \leq 1$ thì $x^3 - x \leq x^3 \leq 1$. Suy ra $x^3 - x - 2 \leq x^3 - 2 \leq -1$. Do đó bất đẳng thức $x^3 - x - 2 > 0$ không thỏa mãn hay $0 < x \leq 1$ cũng không phải là nghiệm của (1).

Với $x \geq 2$ thì $x^3 - x = x(x^2 - 1) \geq 2.(2^2 - 1) \geq 6$. Suy ra $x^3 - x - 3 \geq 3$. Do đó bất đẳng thức $x^3 - x - 3 \leq 0$ không thỏa mãn hay $x \geq 2$ cũng không phải là nghiệm của (1).

Chúng ta nếu x là nghiệm của $x^3 - [x] = 3$ thì $1 < x < 2$. Với $1 < x < 2$ thì phương trình $x^3 - [x] = 3$ trở thành $x^3 - 1 = 3$ hay $x^3 = 4$. Suy ra $x = \sqrt[3]{4}$.

Cách giải 2 Ta có: $x^3 - [x] = 3 \Leftrightarrow x^3 - (x - \{x\}) = 3 \Leftrightarrow x^3 - x = 3 - \{x\}$.

Vì $0 \leq \{x\} < 1$ nên $2 < 3 - \{x\} \leq 3$. Suy ra $2 < x^3 - x \leq 3$ hay $\begin{cases} x^3 - x - 2 > 0; \\ x^3 - x - 3 \leq 0. \end{cases}$

Giải tương tự như cách 1 ta đi đến *Đáp số:* $x = \sqrt[3]{4}$.

Bài tập 2.29 (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2007, lớp 10. Đề thi đề nghị, THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị) Tìm tất cả các nghiệm không nguyên của phương

$$\text{trình } x + \frac{96}{x} = [x] + \frac{96}{[x]}.$$

Bài tập 2.30 Giải phương trình $x^4 - 3x^2 - [x] = 0$.

4.2 PHƯƠNG TRÌNH CHỨA HAI DẤU PHẦN NGUYÊN

$$[f(x)] = [\varphi(x)] + \psi(x)$$

Dạng toán 1 $[f(x)] = [\varphi(x)]$.

Phương pháp 1 Sử dụng tính chất 2.8 của §2 Chương 1:

Tính chất $[f(x)] = [\varphi(x)] \Rightarrow -1 < f(x) - \varphi(x) < 1$.

Khi áp dụng tính chất này thì ta được hệ bất phương trình không tương đương với phương trình ban đầu. Vì vậy sau khi tìm được giá trị của x ta thường đưa phương trình chứa hai dấu phần nguyên về phương trình chứa một dấu phần nguyên để kiểm tra nghiệm.

Phương pháp 2 Đưa về phương trình chứa một dấu phần nguyên bằng cách đặt một phần nguyên là tham số. Giải và biện luận phương trình chứa một phần nguyên và chứa tham số.

Đặt $[f(x)] = m$, $m \in \mathbb{Z}$. Khi ấy phương trình $[f(x)] = [\varphi(x)]$ được tách thành hệ hai phương trình chứa một dấu phần nguyên:

$$[f(x)] = [\varphi(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} [f(x)] = m; \\ [\varphi(x)] = m. \end{cases}$$

Sử dụng định nghĩa ta có:
$$\begin{cases} [f(x)] = m; \\ [\varphi(x)] = m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) - m < 1; \\ 0 \leq \varphi(x) - m < 1; \\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Giải hệ bất phương trình ta đi đến:
$$\begin{cases} 0 \leq f(x) - m < 1; \\ 0 \leq \varphi(x) - m < 1; \\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(m) \leq x < b_1(m); \\ a_2(m) \leq x < b_2(m). \end{cases}$$

Giải hai bất phương trình này theo tham số m , kết hợp với điều kiện m là một số nguyên ta tìm được các giá trị nguyên của m . Thay vào phương trình $[f(x)] = m$ và $[\varphi(x)] = m$ (hay vào các bất phương trình $0 \leq f(x) - m < 1$ và $0 \leq \varphi(x) - m < 1$) ta tìm được các giá trị của x và đi đến đáp số.

Vì giải hệ phương trình chứa tham số $\begin{cases} a_1(m) \leq x < b_1(m); \\ a_2(m) \leq x < b_2(m). \end{cases}$ là phức tạp, nên để

giải nó, ta thường tìm điều kiện để hệ vô nghiệm, tức là:

Hoặc khoảng $[a_1(m); b_1(m))$ phải nằm hẳn về bên trái khoảng $[a_2(m); b_2(m))$, tức là $b_1(m) \leq a_2(m)$;

Hoặc khoảng $[a_1(m); b_1(m))$ phải nằm hẳn về bên phải khoảng $[a_2(m); b_2(m))$, tức là $b_2(m) \leq a_1(m)$.

Từ đó suy ra các giá trị của m để hệ có nghiệm.

Thí dụ 2.22 Giải phương trình $[x - 2, 3] = [4 - x]$.

Giải Từ Tính chất 2.8 §2 Chương 1 ta suy ra

$$\begin{aligned} [x - 2, 3] = [4 - x] &\Rightarrow -1 < (x - 2, 3) - (4 - x) < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < 2x - 6, 3 < 1 \Leftrightarrow 2,65 < x < 3,65. \end{aligned}$$

Suy ra $0,35 < x - 2, 3 < 1,35$. Do đó $[x - 2, 3] = 0$ hoặc $[x - 2, 3] = 1$.

Vì $2,65 < x < 3,65$ nên $0,35 < 4 - x < 1,35$. Suy ra $[4 - x] = 0$ hoặc $[4 - x] = 1$.

Trường hợp 1. $[x - 2, 3] = [4 - x] = 0$.

Ta có: $[4-x]=0 \Leftrightarrow 0 \leq 4-x < 1 \Leftrightarrow 3 < x \leq 4$;

$[x-2,3]=0 \Leftrightarrow 0 \leq x-2,3 < 1$ hay $2,3 \leq x < 3,3$.

Kết hợp hai điều kiện ta được: $3 < x < 3,3$.

Trường hợp 2. $[x-2,3]=[4-x]=1$.

Ta có: $[x-2,3]=1 \Leftrightarrow 1 \leq x-2,3 < 2 \Leftrightarrow 3,3 \leq x < 4,3$;

$[4-x]=1 \Leftrightarrow 1 \leq 4-x < 2 \Leftrightarrow 2 < x \leq 3$.

Không có x nào thỏa mãn cả hai điều kiện trên nên ta có *Đáp số*: $3 < x < 3,3$.

Bài tập 2.31 Giải các phương trình

1) $[2x-1,5]=[x-2,7]$; 2) $[x-1]=\left[\frac{x+2}{2}\right]$; 3) $[x-2,3]=[4-x]$;

4) $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{2}\right]$; 5) $[-x^2+3x]=\left[x+\frac{1}{2}\right]$.

Dạng toán 2 $[f(x)]=[\varphi(x)]+\psi(x)$

Phương pháp 1 Sử dụng các tính chất 2.11c và 2.14c của §2 Chương 1.

Khi áp dụng các tính chất này vào phương trình thì ta được hệ các bất phương trình không tương đương với phương trình ban đầu vì nó chỉ tương đương khi điều kiện nêu trong Tính chất 2.11c, 2.14c được thỏa mãn. Giải các điều kiện này tương đối phức tạp. Vì vậy sau khi tìm được giá trị của x ta thường đưa phương trình chứa hai dấu phần nguyên về phương trình chứa một dấu phần nguyên để kiểm tra nghiệm.

Phương pháp 2 (Đặt ẩn phụ) Đặt $[f(x)]=m, m \in \mathbb{Z}$. Khi ấy phương trình $[f(x)]=[\varphi(x)]+\psi(x)$ được tách thành hệ hai phương trình chứa một dấu

phần nguyên: $[f(x)]=[\varphi(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} [f(x)]=m; \\ [\varphi(x)]+\psi(x)=m. \end{cases}$

Sử dụng định nghĩa ta có:
$$\begin{cases} [f(x)] = m; \\ [\varphi(x)] = m - \psi(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) - m < 1; \\ 0 \leq \varphi(x) - (m - \psi(x)) < 1; \\ m - \psi(x) \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Giải hệ bất phương trình ta đi đến hệ:

$$\begin{cases} 0 \leq f(x) - m < 1; \\ 0 \leq \varphi(x) - (m - \psi(x)) < 1; \\ m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(m) \leq x < b_1(m); \\ a_2(m) \leq x < b_2(m). \end{cases}$$

Giải hai bất phương trình này theo tham số m , kết hợp với điều kiện m là một số nguyên, ta tìm được các giá trị nguyên của m . Thay vào phương trình $[f(x)] = m$ và $[\varphi(x)] + \psi(x) = m$ (hay vào các bất phương trình $0 \leq f(x) - m < 1$ và $0 \leq \varphi(x) - (m - \psi(x)) < 1$) ta tìm được các giá trị của x .

Vì giải hệ phương trình chứa tham số $\begin{cases} a_1(m) \leq x < b_1(m); \\ a_2(m) \leq x < b_2(m). \end{cases}$ là phức tạp, nên để

giải nó, ta thường tìm điều kiện để hệ vô nghiệm, tức là:

Hoặc khoảng $[a_1(m); b_1(m))$ phải nằm hẳn về bên trái khoảng $[a_2(m); b_2(m))$, tức là $b_1(m) \leq a_2(m)$;

Hoặc khoảng $[a_1(m); b_1(m))$ phải nằm hẳn về bên phải khoảng $[a_2(m); b_2(m))$, tức là $b_2(m) \leq a_1(m)$.

Từ đó suy ra các giá trị của m để hệ có nghiệm rồi thử lại.

Thí dụ 2.23 Giải phương trình $[x-1] - [-x] = -2$.

Cách giải 1 Áp dụng Tính chất 2.14c §2 Chương 1 ta có:

$$\text{Hoặc } [x-1] - [-x] = [(x-1) - (-x)] = [2x-1]$$

$$\text{hoặc } [x-1] - [-x] = [(x-1) - (-x)] + 1 = [2x-1] + 1.$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } [2x-1] = -2 \text{ hoặc } [2x-1] + 1 = -2.$$

Vậy theo định nghĩa, phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} [2x-1] = -2 \\ [2x-1] = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 2x-1-(-2) < 1 \\ 0 \leq 2x-1-(-3) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ -1 \leq x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 0.$$

Thử lại: Dễ thấy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Với mọi $-1 < x < 0$ ta có: $-2 < x-1 < -1$ và $0 < -x < 1$. Vậy $[x-1] = -2$ và $[-x] = 0$. Chứng tỏ mọi giá trị $-1 < x < 0$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Cách giải 2 Đặt $[x-1] = [-x] - 2 = m$, $m \in \mathbb{Z}$. Ta có:

$$\begin{cases} [x-1] = m; \\ [-x] - 2 = m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x-1-m < 1; \\ 0 \leq -x-(m+2) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \leq x < m+2; \\ -m-3 < x \leq -m-2. \end{cases}$$

Để hệ này vô nghiệm thì

$$\text{hoặc } m+1 > -m-2 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2} \text{ hoặc } m+2 \leq -m-3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2}.$$

Vậy để hệ có nghiệm thì $-\frac{5}{2} < m \leq -\frac{3}{2}$. Do m nguyên nên m chỉ có thể là

$m = -2$. Với $m = -2$ ta có:

$$\begin{cases} [x-1] = -2; \\ [-x] - 2 = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x-1-(-2) < 1; \\ 0 \leq -x < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0; \\ -1 < x \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Đáp số: $-1 < x < 0$.

Thí dụ 2.24 Giải phương trình $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = x$.

Cách giải 1 Theo Tính chất 2.11c §2 Chương 1 ta có

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = \left[\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right] = \left[\frac{5x}{6}\right] \text{ hoặc } \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = \left[\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right] - 1 = \left[\frac{5x}{6}\right] - 1.$$

Vậy nếu x là nghiệm của phương trình $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] = x$ thì $\left[\frac{5x}{6}\right] = x$ hoặc

$$\left[\frac{5x}{6} \right] - 1 = x, \text{ tức là } \begin{cases} 0 \leq \frac{5x}{6} - x < 1; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 \leq \frac{5x}{6} - (x+1) < 1; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

hay $-6 < x \leq 0$ hoặc $-12 < x \leq -6$. Vậy $-12 < x \leq 0$.

Do x nguyên nên x chỉ có thể là $-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0$.

Thay vào phương trình và thử lại, ta được $x = -7; -5; -4; -3; -2; 0$.

Cách giải 2 Đặt $\left[\frac{x}{2} \right] = m$, m là số nguyên. Khi ấy

$$\begin{cases} \left[\frac{x}{2} \right] = m; \\ x - \left[\frac{x}{3} \right] = m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{x}{2} - m < 1; \\ 0 \leq \frac{x}{3} - (x - m) < 1; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \leq x < 2(m+1); \\ \frac{3}{2}(m-1) < x \leq \frac{3}{2}m; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (*)$$

Vì $2m \leq x < 2(m+1)$ và $x \in \mathbb{Z}$ nên x chỉ có thể là: $x = 2m$ hoặc $x = 2m+1$.

Với $x = 2m$ thì $\frac{3}{2}(m-1) < x \leq \frac{3}{2}m$ trở thành $\frac{3}{2}(m-1) < 2m \leq \frac{3}{2}m$ hay

$-3 < m \leq 0$. Vì m là số nguyên nên m chỉ có thể là: $m = -3; -2; -1; 0$.

Với $x = 2m+1$ thì $\frac{3}{2}(m-1) < x \leq \frac{3}{2}m$ trở thành $\frac{3}{2}(m-1) < 2m+1 \leq \frac{3}{2}m$ hay

$-5 < m \leq -2$. Vì m là số nguyên nên m chỉ có thể là: $-4; -3; -2$.

$$\text{Với } m = -4: \text{ Hệ } (*) \text{ trở thành } \begin{cases} -8 \leq x < -6; \\ -\frac{15}{2} < x \leq -6; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{15}{2} < x < -6; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hệ có duy nhất nghiệm $x = -7 \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Với } m = -3: \text{ Hệ } (*) \text{ trở thành } \begin{cases} -6 \leq x < -4; \\ -6 < x \leq -4,5; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \leq -4,5; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hệ có duy nhất nghiệm $x = -5 \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Với } m = -2: \text{ Hệ (*) trở thành } \begin{cases} -4 \leq x < -2; \\ -4,5 < x \leq -3; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < -3; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hệ có duy nhất nghiệm $x = -4 \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Với } m = -1: \text{ Hệ (*) trở thành } \begin{cases} -2 \leq x < 0; \\ -3 < x \leq -\frac{3}{2}; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < -\frac{3}{2}; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hệ có duy nhất nghiệm $x = -2 \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Với } m = 0: \text{ Hệ (*) trở thành } \begin{cases} 0 \leq x < 2; \\ -\frac{3}{2} < x \leq 0; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hệ có duy nhất nghiệm $x = 0 \in \mathbb{Z}$.

Cách giải 3 Từ phương trình $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = x$ suy ra $x \in \mathbb{Z}$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên chia

x cho 6 ta được: $x = 6a + r$ ($a \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$). Khi ấy

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = x &\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{6a+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6a+r}{3} \right\rfloor = 6a+r \\ &\Leftrightarrow 5a + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor = 6a+r \Leftrightarrow a = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor - r. \end{aligned}$$

Cho $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ta được đáp số tương ứng trong bảng sau:

r	0	1	2	3	4	5
a	0	-1	-1	-1	-1	-2
x	0	-5	-4	-3	-2	-7

Đáp số: $x = -7; -5; -4; -3; -2; 0$.

Bài tập 2.32 Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

$$\begin{aligned} 1) \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] &= 17; 2) \left[\frac{3}{x} \right] + \left[\frac{4}{x} \right] = 5; 3) [x-2] + [2x+1] = x+5, 3; \\ 4) \left[\frac{1-x}{2} \right] + \left[1-\frac{x}{2} \right] &= \frac{1-3x}{8}; 5) \left[\frac{5+6x}{8} \right] = \frac{15x-7}{5}; 6) [-x^2+3x] = \left[x+\frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Bài tập 2.33 (Olympic 30-4 lần thứ 14, 2008, lớp 10. Đề thi đề nghị, THPT chuyên Bến Tre) Giải phương trình $\left[\frac{8x+1}{6} \right] + \left[\frac{4x-1}{3} \right] = \frac{16x-7}{9}$.

4.3 PHƯƠNG TRÌNH CHỨA NHIỀU DẤU PHẦN NGUYÊN

Phương pháp Dùng định nghĩa hoặc đặt ẩn phụ để đưa về phương trình có ít phần nguyên hơn.

Thí dụ 2.25 Giải phương trình $\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] + \left[\frac{x}{4} \right] = x$.

Cách giải 1 Đặt $\left[\frac{x}{3} \right] + \left[\frac{x}{4} \right] = m, m \in \mathbb{Z}$. Khi ấy phương trình trở thành:

$$\left[\frac{x}{2} \right] = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{x}{2} - (x - m) < 1; \\ x \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1) < x \leq 2m; \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (*)$$

Vì x nguyên và $2m-2 < x \leq 2m$ nên x chỉ có thể là: $x = 2m-1$ hoặc

$x = 2m$. Thay $x = 2m$ vào phương trình $\left[\frac{x}{3} \right] + \left[\frac{x}{4} \right] = m$ ta có:

$$\left[\frac{2m}{3} \right] + \left[\frac{2m}{4} \right] = m. \text{ Vì } \left[\frac{2m}{3} \right] + \left[\frac{2m}{4} \right] = \left[\frac{7m}{6} \right] \text{ hoặc } \left[\frac{2m}{3} \right] + \left[\frac{2m}{4} \right] = \left[\frac{7m}{6} \right] - 1$$

nên phương trình $\left[\frac{2m}{3} \right] + \left[\frac{2m}{4} \right] = m$ tương đương với

$$\left[\frac{7m}{6} \right] = m \text{ hoặc } \left[\frac{7m}{6} \right] - 1 = m$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{7m}{6} - m < 1 \text{ hoặc } 0 \leq \frac{7m}{6} - (m+1) < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m < 6 \text{ hoặc } 6 \leq m < 12 \Leftrightarrow 0 \leq m < 12.$$

Vì m nguyên nên m chỉ có thể là: $m = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$.

Với $m = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11$ thì

$$x = 2m = 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22.$$

Thử vào phương trình $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = x$ ta được: $x = 0; 4; 6; 8; 10; 14$.

Thay $x = 2m - 1$ vào $\left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = m$ ta có: $\left[\frac{2m-1}{3}\right] + \left[\frac{2m-1}{4}\right] = m$.

$$\text{Nhưng } \left[\frac{2m-1}{3}\right] + \left[\frac{2m-1}{4}\right] = \left[\frac{2m-1}{3} + \frac{2m-1}{4}\right] = \left[\frac{14m-7}{12}\right]$$

$$\text{hoặc } \left[\frac{2m-1}{3}\right] + \left[\frac{2m-1}{4}\right] = \left[\frac{2m-1}{3} + \frac{2m-1}{4}\right] - 1 = \left[\frac{14m-7}{12}\right] - 1$$

nên phương trình $\left[\frac{2m-1}{3}\right] + \left[\frac{2m-1}{4}\right] = m$ tương đương với

$$\left[\frac{14m-7}{12}\right] = m \text{ hoặc } \left[\frac{14m-7}{12}\right] - 1 = m$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{14m-7}{12} - m < 1 \text{ hoặc } 0 \leq \frac{14m-7}{12} - (m+1) < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq m < \frac{19}{2} \text{ hoặc } \frac{19}{2} \leq m < \frac{31}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq m < \frac{31}{2}.$$

Vì m nguyên nên m chỉ có thể là: $m = 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$.

Với $m = 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15$ thì

$$x = 2m - 1 = 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29.$$

Thay vào phương trình $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = x$ ta được $x = 9; 13; 15; 17; 19; 23$.

Ta đi đến **Đáp số**: $x = 0; 4; 6; 8; 10; 14; 9; 13; 15; 17; 19; 23$.

Cách giải 2 Từ phương trình $\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] = x$ suy ra $x \in \mathbb{Z}$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên chia x cho 12 ta được: $x = 12a + r$ ($a \in \mathbb{Z}$, r là một trong các số 0, 1, 2, ..., 10, 11). Khi ấy

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = x \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{12a+r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12a+r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{12a+r}{4} \right\rfloor = 12a+r$$

$$\Leftrightarrow 6a + 4a + 3a + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor = 12a + r \Leftrightarrow a = r - \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor.$$

Cho $r = 0, 1, 2, \dots, 10, 11$ ta được đáp số tương ứng trong bảng sau:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
x	0	13	14	15	4	17	6	19	8	9	10	23

Bài tập 2.34 (Olympic Canada, 1998)

Xác định số tất cả các nghiệm x của phương trình $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = x$.

Bài tập 2.35 (Olympic Canada, 1981) Chứng minh rằng phương trình

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor = 12345 \text{ không có nghiệm.}$$

Bài tập 2.36 Tìm nghiệm nguyên của các phương trình

$$\text{a) } \left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3!} \right\rfloor = 224; \quad \text{b) } \left\lfloor \frac{x}{1!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3!} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{10!} \right\rfloor = 1001.$$

Bài tập 2.37 (Olympic 30.4 lần thứ 15, 2009, lớp 10. THPT chuyên Lý Tự Trọng, Cần Thơ) Giải phương trình

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{10} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{9}{10} \right\rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor.$$

4.4 PHƯƠNG TRÌNH DẠNG HỖN HỢP

Có những phương trình chứa cả phần nguyên và phần dư, hoặc phần nguyên với các phép toán khác (lũy thừa, căn thức,...), ta xếp chúng vào dạng *phương trình hỗn hợp*. Giải chúng nói chung là khó, cần kết hợp nhiều suy luận và kỹ thuật khác nhau, như dùng định nghĩa, chia khoảng, sử dụng tính chất số

nguyên của $[x]$ hoặc tính chất $0 \leq \{x\} < 1$, các tính chất x nguyên khi và chỉ khi $\{x\} = 0$ hoặc $x = [x]$, các phương pháp của đại số như đặt ẩn phụ, biến đổi tương đương hệ phương trình,... Dưới đây là những ví dụ.

Thí dụ 2.26 Giải phương trình trên tập số dương $[x^2] = [x]^2$.

Giải Xét $n \leq x < n+1$, hay $[x] = n$, trong đó n là một số tự nhiên (có thể bằng 0). Ta có $n^2 \leq x^2 < n^2 + 2n + 1$. Do đó $[x^2]$ chỉ có thể nhận các giá trị

$$n^2; n^2 + 1; n^2 + 2; \dots; n^2 + 2n.$$

Nhưng $[x]^2 = n^2$ nên phương trình đã cho đúng khi và chỉ khi

$$[x^2] = [x]^2 = n^2, \text{ tức là } \begin{cases} n^2 \leq x^2 < n^2 + 1; \\ n \leq x < n + 1. \end{cases} \text{ hay } n \leq x < \sqrt{n^2 + 1}. \text{ Vì } x > 0 \text{ nên ta}$$

có **Đáp số**: $0 < x < 1$ hoặc $n \leq x < \sqrt{n^2 + 1}$, $n = 1, 2, \dots$.

Thí dụ 2.27 Giải phương trình $[x^2] + [x] = \{x\} + 2$.

Giải Từ giả thiết ta suy ra $\{x\} = [x^2] + [x] - 2$. Vế phải là một số nguyên, mà vế trái $0 \leq \{x\} < 1$ nên $\{x\} = 0$. Vậy x là một số nguyên. Do đó x^2 cũng là một số nguyên. Suy ra $[x^2] = x^2$ và $[x] = x$. Phương trình đã cho trở thành $x^2 + x - 2 = 0$. Phương trình này có nghiệm $x = -2$ hoặc $x = 1$.

Thí dụ 2.28 Giải bất phương trình $[x]\{x\} < x - 1$.

Giải Bất phương trình $[x]\{x\} < x - 1$ tương đương với $[x]\{x\} < [x] + \{x\} - 1$ hay $[x](\{x\} - 1) < \{x\} - 1 \Leftrightarrow ([x] - 1)(\{x\} - 1) < 0$.

Do $\{x\} - 1 < 0$ nên $[x] > 1$ hay $x \geq 2$. **Đáp số**: $x \geq 2$.

Bài tập 2.38 (Olympic 30.4 lần thứ 10, 2004, lớp 10. Đề thi đề nghị, THPT Phan Châu Trinh, Đà Nẵng) Giải phương trình $[x^2 - 2x] + 2[x] = [x]^2$.

Bài tập 2.39 (Vô địch Thụy Điển, 1982) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, hãy xác định xem phương trình $x^2 - [x^2] = \{x\}^2$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[1; n]$.

Bài tập 2.40 (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2007, lớp 11. Đề thi đề nghị Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị) Tìm tất cả các số thực $x \neq 0$ sao cho ba số $x, [x], \{x\}$, theo thứ tự ấy, lập thành cấp số nhân.

Bài tập 2.41 (Thi học sinh giỏi toán PTTH toàn quốc lần thứ 17, 1979) Tìm tất cả những số α sao cho phương trình $x^2 - 2x[x] + x - \alpha = 0$ có hai nghiệm số phân biệt không âm.

Bài tập 2.42 (M429, Kvant, No10, 1977)

- a) Phương trình $[x] - 1977\{x\} = 1978$ có bao nhiêu nghiệm?
b) Chứng minh rằng với mọi số q và mọi số $p \neq 0$ phương trình $[x] + p\{x\} = q$ có hoặc là $[|p|]$ hoặc là $[|p|] + 1$ nghiệm.

Bài tập 2.43 (Olympic Czech and Slovak, 1998)

Tìm tất cả các số thực x sao cho $x[x[x[x]]] = 88$.

Bài tập 2.44 (Olympic Belarus, 1999). Chứng tỏ rằng phương trình

$\{x^3\} + \{y^3\} = \{z^3\}$ có vô số nghiệm nguyên.

Bài tập 2.45 (Vô địch Australia, 1999) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 200,0; \\ \{x\} + y + [z] = 190,1; \\ [x] + \{y\} + z = 178,8. \end{cases}$$

Chương 3

HÀM PHẦN NGUYÊN TRONG TOÁN GIẢI TÍCH

§1 MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ CHỨA PHẦN NGUYÊN

1.1 Tính số hạng của dãy số chứa phần nguyên

Để tính số hạng của dãy chứa phần nguyên ta thường phải sử dụng các suy luận đặc thù cho phần nguyên và kỹ thuật tính biểu thức chứa phần nguyên.

Thí dụ 3.1 Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, \dots\}$.

Chứng minh rằng số hạng tổng quát của dãy số là $a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right]$.

Giải Dãy số trên được tạo thành từ các nhóm số có cùng giá trị, nhóm số thứ m có giá trị là m và gồm m số hạng a_n có chỉ số n từ $\frac{m(m-1)}{2} + 1$ đến $\frac{m(m+1)}{2}$. Như vậy, số hạng a_n của dãy số có giá trị là m thì

$$a_n = m \Leftrightarrow \frac{m(m-1)}{2} < n \leq \frac{m(m+1)}{2} \Leftrightarrow m^2 - m < 2n \leq m^2 + m$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + \frac{1}{4} < 2n < m^2 + m + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 < 2n < \left(m + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow m - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < m + \frac{1}{2} \Leftrightarrow m < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < m + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right] = m.$$

$$\text{Chứng tỏ } a_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right].$$

1.2 Tính tuần hoàn của dãy số

Thí dụ 3.2 (Vô định Nhật Bản, 1996) Cho $x > 1$ là một số thực, nhưng không

phải là số nguyên. Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x \lfloor x^n \rfloor, n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng dãy số $\{u_n\}$ không là dãy tuần hoàn.

Giải Giả sử phản chứng, dãy số $\{u_n\}$ có tính chất tuần hoàn, nghĩa là tồn tại số nguyên $p > 0$ sao cho $u_{n+p} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $x > 1$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, do đó ta cũng có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lfloor x^n \rfloor = +\infty$. Theo định nghĩa giới hạn, tồn tại số n_0 để $\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor > 0$ với $n > n_0$.

Với $n \geq n_0$, tính tuần hoàn của dãy $\{u_n\}$ ta suy ra

$$u_{n+p} = \lfloor x^{n+p+1} \rfloor - x \lfloor x^{n+p} \rfloor = u_n = \lfloor x^{n+1} \rfloor - x \lfloor x^n \rfloor.$$

Do đó $x = \frac{\lfloor x^{n+p+1} \rfloor - \lfloor x^{n+1} \rfloor}{\lfloor x^{n+p} \rfloor - \lfloor x^n \rfloor}$. Vậy x là số hữu tỉ và không phải là số nguyên.

Đặt $y = x^p$ và

$$\begin{aligned} b_m &= \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-k-1} u_{mp+k} = \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-k-1} (\lfloor x^{mp+k+1} \rfloor - x \lfloor x^{mp+k} \rfloor) = \\ &= \lfloor x^{mp+p} \rfloor - x^p \lfloor x^{mp} \rfloor = \lfloor y^{m+1} \rfloor - y \lfloor y^m \rfloor. \end{aligned}$$

Do dãy $\{u_n\}$ tuần hoàn chu kì p nên ta có $u_{(m+1)p+k} = u_{mp+k}$. Vậy

$$b_{m+1} = \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-k-1} u_{(m+1)p+k} = \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-k-1} u_{mp+p+k} = \sum_{k=0}^{p-1} x^{p-k-1} u_{mp+k} = b_m.$$

Do $x > 1$ là số hữu tỉ và không phải là số nguyên nên $y = x^p$ cũng là số hữu tỉ và không phải là số nguyên.

Đặt $c_m = \lfloor y^{m+1} \rfloor - \lfloor y^m \rfloor$ thì c_m là số nguyên với mọi m .

Từ $b_{m+1} = b_m$ và theo cách đặt b_m ở trên ta có

$$b_{m+2} = b_{m+1} \Leftrightarrow \lfloor y^{m+2} \rfloor - y \lfloor y^{m+1} \rfloor = \lfloor y^{m+1} \rfloor - y \lfloor y^m \rfloor$$

$$\Leftrightarrow [y^{m+2}] - [y^{m+1}] = y([y^{m+1}] - [y^m]) \Leftrightarrow c_{m+1} = yc_m.$$

Từ đó suy ra $c_{m+1} = y^m c_1$. Do y là số hữu tỉ và không phải là số nguyên nên khi m đủ lớn thì $y^m c_1$ không thể là số nguyên. Điều này mâu thuẫn với c_m là số nguyên với mọi m . Chứng tỏ dãy số $\{u_n\}$ không phải là dãy tuần hoàn.

1.3 Một số tính chất khác của dãy số chứa phần nguyên, phần dư

Thí dụ 3.3 (Vô địch Nam Tư, 1983; Olympic 30.4 lần thứ 8, 2002. THPT Lê Khiết, Quảng Ngãi) Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi công thức $x_1 = 2$;

$x_{n+1} = \left\lfloor \frac{3}{2} x_n \right\rfloor$. Chứng minh dãy số có vô hạn các số chẵn và vô hạn các số lẻ.

Giải Giả sử dãy $\{x_n\}$ chỉ có hữu hạn số chẵn, nghĩa là tồn tại số k sao cho x_k là số lẻ với mọi $k \geq n$. Vì x_n là số lẻ nên nó có thể biểu diễn được dưới dạng

$x_n = 2^{t_n} u_n + 1$, trong đó $t_n \geq 1$ và u_n là số lẻ. Suy ra

$$x_{n+1} = \left\lfloor \frac{3}{2} (2^{t_n} u_n + 1) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} 2^{t_n} u_n + 1 + \frac{1}{2} \right\rfloor = 3 \cdot 2^{t_n-1} u_n + 1.$$

Vì $x_{n+1} = 3 \cdot 2^{t_n-1} u_n + 1$ cũng là số lẻ và u_n là số lẻ nên $t_n - 1 \geq 1$.

$$\text{Suy ra } x_{n+2} = \left\lfloor \frac{3}{2} (3 \cdot 2^{t_n-1} u_n + 1) \right\rfloor = \left\lfloor 3^2 2^{t_n-2} u_n + 1 + \frac{1}{2} \right\rfloor = 3^2 \cdot 2^{t_n-2} u_n + 1.$$

Vì $x_{n+2} = 3^2 \cdot 2^{t_n-2} u_n + 1$ cũng là số lẻ và u_n là số lẻ nên $t_n - 2 \geq 1$.

$$\text{Tương tự, ta có } x_{n+i} = \left\lfloor \frac{3}{2} (3^{i-1} \cdot 2^{t_n-i+1} u_n + 1) \right\rfloor = 3^i \cdot 2^{t_n-i} u_n + 1.$$

Theo giả thiết x_k là những số lẻ với mọi $k \geq n$ nên $x_{n+i} = 3^i \cdot 2^{t_n-i} u_n + 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, t_n - 1$ là những số lẻ. Nhưng khi ấy

$$x_{n+t_n} = \left[\frac{3}{2} (x_{n+t_n-1} + 1) \right] = \left[3^{t_n} u_n + 1 + \frac{1}{2} \right] = 3^{t_n} u_n + 1$$

là một số chẵn. Vô lí.

2) Giả sử dãy $\{x_n\}$ chỉ có hữu hạn số lẻ, nghĩa là tồn tại số n sao cho x_k là số chẵn với mọi $k \geq n$. Vì x_n là số chẵn nên nó có thể biểu diễn được dưới dạng

$x_n = 2^{t_n} u_n$, trong đó $t_n \geq 1$ và u_n là số lẻ. Suy ra

$$x_{n+1} = \left[\frac{3}{2} (2^{t_n} u_n) \right] = \left[\frac{3}{2} 2^{t_n} u_n \right] = 3 \cdot 2^{t_n-1} u_n.$$

Vì $x_{n+1} = 3 \cdot 2^{t_n-1} u_n$ là số chẵn và u_n là số lẻ nên $t_n - 1 \geq 1$. Suy ra

$$x_{n+2} = \left[\frac{3}{2} (3 \cdot 2^{t_n-1} u_n) \right] = \left[\frac{3^2}{2} 2^{t_n-2} u_n \right] = 3^2 \cdot 2^{t_n-2} u_n.$$

Vì $x_{n+2} = 3^2 \cdot 2^{t_n-2} u_n$ là số chẵn và u_n là số lẻ nên $t_n - 2 \geq 1$.

Tương tự ta có công thức $x_{n+i} = \left[\frac{3}{2} (3^{i-1} \cdot 2^{t_n-i+1} u_n) \right] = 3^i \cdot 2^{t_n-i} u_n$.

Tiếp tục quá trình này ta đi đến: $x_{n+t_n} = 3^{t_n} u_n$ là một số lẻ. Vô lí.

Vậy có vô số số chẵn và vô số số lẻ trong dãy $x_{n+1} = \left[\frac{3}{2} x_n \right]$.

Thí dụ 3.4 (Olympic Quốc tế. Đề dự tuyển, Thụy Điển đề nghị) Chứng minh rằng tất cả các số dạng $\{10^n \sqrt{2}\}$, $n \in \mathbb{N}$ là đôi một khác nhau.

Giải Vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên $10^n \sqrt{2}$ cũng là số vô tỉ. Do đó $\{10^n \sqrt{2}\}$ cũng là số

vô tỉ. Biểu diễn của $\sqrt{2}$ trong cơ số 10 có dạng $\sqrt{2} = 1, k_1 k_2 \dots k_n \dots$ Khi đó

$$10^n \sqrt{2} = 10^n \left(1 + \frac{k_1}{10} + \dots + \frac{k_n}{10^n} + \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} + \dots \right) = 10^n + 10^{n-1} k_1 + \dots + k_n + \frac{k_{n+1}}{10^{n+1}} + \dots$$

Do đó $\{10^n \sqrt{2}\} = 0, k_{n+1} k_{n+2} \dots$

Giả sử tồn tại hai số nguyên dương i, j ($i \neq j$) sao cho $x_i = x_j$, tức là $\{10^i \sqrt{2}\} = \{10^j \sqrt{2}\}$. Do tính duy nhất của biểu diễn một số vô tỉ trong hệ đếm cơ số 10 ta có $k_{i+p} = k_{j+p}$ với mọi $p \in \mathbb{N}$. Điều này chứng tỏ dạng thập phân của $\sqrt{2}$ có tính tuần hoàn với chu kỳ là $|i - j|$, mâu thuẫn với tính chất vô tỉ của $\sqrt{2}$. Vậy $\{10^i \sqrt{2}\} \neq \{10^j \sqrt{2}\}$ với mọi $i \neq j$.

§2 TÍNH TỔNG HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ CHỨA PHẦN NGUYÊN

Bài toán tính tổng hữu hạn của dãy với công thức tổng quát nào đó nói chung là một bài toán hay. Nó liên quan nhiều đến các dạng toán khác như phương trình sai phân, công thức truy hồi,... và các kĩ thuật tính toán như nhóm hoặc số hạng, đánh giá, biến đổi tương đương. Để tính tổng với số hạng chứa phần nguyên, ngoài những kĩ thuật tính tổng thông thường, ta còn phải sử dụng những kĩ thuật và tính chất đặc thù của phần nguyên. Tính tổng còn liên quan đến các dạng toán khác (giải phương trình, hàm số chứa phần nguyên,...).

Thí dụ 3.5 a) Tính tổng $A_5 = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{24}]$.

b) (Chọn đội tuyển Hồng Kông dự thi Olympic Quốc tế, 1988)

Tính $A_n = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{n^2 - 1}]$.

Giải a) Ta chia thành các nhóm: $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]$ (3 số hạng);

$[\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + [\sqrt{6}] + \sqrt{7} + [\sqrt{8}] = 2$ (5 số hạng);

$[\sqrt{9}] + [\sqrt{10}] + [\sqrt{11}] + [\sqrt{12}] + [\sqrt{13}] + [\sqrt{14}] + [\sqrt{15}] = 3$ (7 số hạng);

$$\left[\sqrt{16} \right] + \left[\sqrt{17} \right] + \dots + \left[\sqrt{23} \right] + \left[\sqrt{24} \right] = 4 \text{ (9 số hạng);}$$

$$\text{Vậy } A = 1 \times 3 + 2 \times 5 + 3 \times 7 + 4 \times 9 = 70.$$

b) Ta có

$$\left[\sqrt{n} \right] = k \Leftrightarrow k \leq \sqrt{n} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \leq n < (k+1)^2 \Leftrightarrow k^2 \leq n \leq (k+1)^2 - 1.$$

Các số hạng trong tổng được nhóm thành các nhóm sao cho số hạng thứ nhất của nhóm nằm dưới dấu căn là bình phương của một số k nào đó, còn số hạng cuối cùng của nhóm nằm dưới dấu căn là $(k+1)^2 - 1$, tức là

$$\begin{aligned} S &= \left[\sqrt{1} \right] + \left[\sqrt{2} \right] + \left[\sqrt{3} \right] + \dots + \left[\sqrt{n^2 - 1} \right] \\ &= \left(\left[\sqrt{1} \right] + \left[\sqrt{2} \right] + \left[\sqrt{3} \right] \right) + \left(\left[\sqrt{4} \right] + \left[\sqrt{5} \right] + \dots + \left[\sqrt{8} \right] \right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\left[\sqrt{(n-1)^2} \right] + \left[\sqrt{(n-1)^2 + 1} \right] + \dots + \left[\sqrt{n^2 - 1} \right] \right). \end{aligned}$$

Như vậy, có $(n-1)$ nhóm, trong mỗi nhóm giá trị các số hạng bằng nhau và bằng số hạng đầu tiên của nhóm. Từ k^2 đến $(k+1)^2 - 1$ có tất cả $((k+1)^2 - 1) - k^2 + 1 = 2k + 1$ số hạng. Do đó nhóm thứ k gồm có $2k + 1$ số hạng và có tổng là $\left[\sqrt{k^2} \right] + \left[\sqrt{k^2 + 1} \right] + \dots + \left[\sqrt{(k+1)^2 - 1} \right] = (2k + 1)k$. Suy ra

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 1)k = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)(4n-1)}{6}.$$

Thí dụ 3.6 Cho các số nguyên a, b, m có a và m là hai số tự nhiên nguyên tố

cùng nhau. Tính tổng $S = \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{ai + b}{m} \right\}$.

Giải Với $i \in \mathbb{N}$, chia $ai + b$ cho m ta được $ai + b = mq_i + r_i$, trong đó

$$0 \leq r_i \leq m-1, \text{ tức là } \frac{ai + b}{m} = q_i + \frac{r_i}{m} \text{ hay } \left\{ \frac{ai + b}{m} \right\} = \frac{r_i}{m}.$$

Giả sử có hai số $m-1 > i_1 > i_2 \geq 0$ sao cho $r_{i_1} = r_{i_2}$. Khi ấy

$$\frac{a(i_1 - i_2)}{m} = \frac{ai_1 + b}{m} - \frac{ai_2 + b}{m} = \frac{mq_{i_1} + r_{i_1}}{m} - \frac{mq_{i_2} + r_{i_2}}{m} = q_{i_1} - q_{i_2}$$

là số nguyên. Nhưng a và m là hai số nguyên tố cùng nhau nên $\frac{a(i_1 - i_2)}{m}$

không thể là số nguyên. Vô lí. Vậy $\left\{ \frac{ai + b}{m} \right\} = \frac{r_i}{m}$ nhận đúng m giá trị khác

nhau là $\frac{0}{m}; \frac{1}{m}; \frac{2}{m}; \dots; \frac{m-1}{m}$. Suy ra

$$S = \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{ai + b}{m} \right\} = \frac{0}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{m-1}{m} = \frac{1+2+\dots+(m-1)}{m} = \frac{m(m-1)}{2m} = \frac{m-1}{2}.$$

Bài tập 3.1 (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2007, Đề thi đề nghị, THPT chuyên Thăng Long, Đà Lạt) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\left[\sqrt{1} \right] + \left[\sqrt{2} \right] + \dots + \left[\sqrt{x^2} \right] + \left[\sqrt{x^2 + 1} \right] + \left[\sqrt{x^2 + 2} \right] = 5190.$$

Bài tập 3.2 (Olympic Anh, 1975) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn phương trình:

$$\left[\sqrt[3]{1} \right] + \left[\sqrt[3]{2} \right] + \dots + \left[\sqrt[3]{x^3 - 1} \right] = 400.$$

Bài tập 3.3 (Olympic 30.4 lần thứ 15, 2009, lớp 10. Đề thi đề nghị, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định) Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$\left[\sqrt[3]{1} \right] + \left[\sqrt[3]{2} \right] + \left[\sqrt[3]{3} \right] + \dots + \left[\sqrt[3]{n^3 - 1} \right] = 85n^2.$$

Bài tập 3.4 Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn phương trình

$$\left[\sqrt[3]{1} \right] + \left[\sqrt[3]{2} \right] + \left[\sqrt[3]{3} \right] + \dots + \left[\sqrt[3]{x^3 - 1} \right] = y.$$

Bài tập 3.5 (Olympic 30.4 lần thứ 9, 2003, lớp 10. THPT Bến tre) Tìm số n nguyên dương sao cho $\left[\sqrt[3]{1} \right] + \left[\sqrt[3]{2} \right] + \dots + \left[\sqrt[3]{n^3 + 2n + 4} \right] = 7225.$

§3 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CHỨA PHẦN DƯ

Do tính đặc thù của phần nguyên, dẫn tới việc tính toán khó khăn, bài toán tính giới hạn của dãy số chứa phần nguyên rất hay gặp trong các kì thi Olympic. Dưới đây là một số ví dụ minh họa.

Thí dụ 3.7 (Kvant, số 2, 1980)

Chứng minh rằng dãy số $\left\{(2 + \sqrt{3})^n\right\}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Giải Theo Đẳng thức 2.1 §2 Chương 2, tồn tại hai số nguyên A_n, B_n sao cho

$$(2 + \sqrt{3})^n = A_n + B_n\sqrt{3} \text{ và } (2 - \sqrt{3})^n = A_n - B_n\sqrt{3}.$$

Vậy $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2A_n$ là số nguyên. Theo tính chất 2.10 §2 Chương

1, ta có $\left\{(2 + \sqrt{3})^n\right\} = 1 - \left\{(2 - \sqrt{3})^n\right\}$.

Nhưng $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{(2 - \sqrt{3})^n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{3})^n = 0$.

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{(2 + \sqrt{3})^n\right\} = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \sqrt{3})^n = 1$.

Thí dụ 3.8 (Bài T7/285, Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, tháng 7, 2001)

Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi công thức truy hồi

$$x_1 = a, a \geq 1; \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy số có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Giải Trường hợp 1. Nếu a là số tự nhiên. Khi ấy $[x_1] = a = x_1$ và $\{x_1\} = 0$.

Suy ra $x_2 = x_3 = \dots = 1$.

Vậy $\{x_n\}$ là dãy hằng, $x_n = 1$ với mọi $n \geq 2$, do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Trường hợp 2. Nếu a không phải là số tự nhiên. Khi ấy

$$x_2 = \frac{([a] + \{a\})^2 - 2\{a\}^2}{[a]^2} = 2 - \left(1 - \frac{\{a\}}{[a]}\right)^2.$$

Vì $0 \leq \{a\} < 1$ và $[a] \geq 1$ do $a \geq 1$ nên $0 \leq \frac{\{a\}}{[a]} < 1$. Suy ra $1 < x_2 < 2$.

Giả sử $1 < x_n < 2$ với mọi $n \geq 2$. Khi ấy $[x_n] = 1$ và

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2} = ([x_n] + \{x_n\})^2 - 2\{x_n\}^2 = 1 + 2\{x_n\} - \{x_n\}^2 = 2 - (1 - \{x_n\})^2 < 2$$

$$\text{và } x_{n+1} = 1 + 2\{x_n\} - \{x_n\}^2 > 1 + 2\{x_n\} - \{x_n\} = 1 + \{x_n\} > 1.$$

Do đó $1 < x_n < 2$ với mọi $n \geq 2$. Suy ra $[x_n] = 1$ và $\{x_n\} = x_n - [x_n] = x_n - 1$.

$$\text{Vậy } x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2} = x_n^2 - 2(x_n - 1)^2 = -x_n^2 + 4x_n - 2$$

hay $2 - x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 4 = (2 - x_n)^2$. Do đó

$$2 - x_{n+1} = (2 - x_n)^2 = ((2 - x_{n-1})^2)^2 = \dots = (2 - x_2)^{2^{n-1}}.$$

Vì $1 < x_2 < 2$ nên $0 < 2 - x_2 < 1$. Chứng tỏ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. *Đáp số:* $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ khi

a là số tự nhiên; $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ khi $a \geq 1$ không phải là số tự nhiên.

Thí dụ 3.9 (Tập chí *Toán học và Tuổi trẻ*, số 340, 2006) Cho $f(x)$ là một đa thức bậc ba với các hệ số nguyên và hệ số ứng với số mũ cao nhất bằng 1.

Biết $f(0) + f(1) + f(-1)$ không chia hết cho 3. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{f(n)}$.

Giải Giả sử $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Theo giả thiết

$f(0) + f(1) + f(-1) = 2a + 3c$ không chia hết cho 3 nên a cũng không chia hết cho 3. Đặt $a = 3k + r$, $r \in \{1, 2\}$. Khi đó

$$f(n) = n^3 + (3k + r)n^2 + bn + c = (n + k)^3 + rn^2 + (b - 3k^2)n + c - k^3.$$

Khi n đủ lớn thì $rn^2 + (b - 3k^2)n + c - k^3 > 0$, do đó $f(n) > (n + k)^3$. Ta lại có

$f(n) = (n + k + 1)^3 + (r - 3)n^2 + (b - 3(k + 1)^2)n + c - (k + 1)^3$. Khi n đủ lớn thì $(r - 3)n^2 + (b - 3(k + 1)^2)n + c - (k + 1)^3 < 0$, do đó $f(n) < (n + k + 1)^3$. Vậy $(n + k)^3 < f(n) < (n + k + 1)^3$. Suy ra $\left[\sqrt[3]{f(n)} \right] = n + k$ khi n đủ lớn. Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[3]{f(n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{f(n)} - (n + k) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n) - (n + k)^3}{\left(\sqrt[3]{f(n)} \right)^2 + (n + k)\sqrt[3]{f(n)} + (n + k)^2}.$$

Thay $f(n) = n^3 + (3k + r)n^2 + bn + c$ vào biểu thức trên ta được

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[3]{f(n)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + (3k + r)n^2 + bn + c) - (n + k)^3}{\left(\sqrt[3]{f(n)} \right)^2 + (n + k)\sqrt[3]{f(n)} + (n + k)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + (3k + r)n^2 + bn + c) - (n + k)^3}{\left(\sqrt[3]{f(n)} \right)^2 + (n + k)\sqrt[3]{f(n)} + (n + k)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{rn^2 + bn + c - 3nk^2 - k^3}{\left(\sqrt[3]{f(n)} \right)^2 + (n + k)\sqrt[3]{f(n)} + (n + k)^2} = \frac{r}{3} = \left\{ \frac{a}{3} \right\}. \end{aligned}$$

Đáp số: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[3]{f(n)} \right\} = \left\{ \frac{a}{3} \right\}.$

Thí dụ 3.10 (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2008. Quốc học Huế) Với $x \geq 1$, đặt

$$f(x) = \frac{\sqrt{[x]} + \sqrt{\{x\}}}{\sqrt{x}}. \text{ Cho } x_0 \geq 1, \text{ xét dãy số } \{x_n\} \text{ xác định bởi công thức}$$

$x_n = f(x_{n-1})$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

Giải Đặt $[x] = k$, $k \geq 1$, $\{x\} = r$, $0 \leq r < 1$. Khi ấy $x = k + r$ và ta có

$$f(x) = \frac{\sqrt{k} + \sqrt{r}}{\sqrt{x}}, \text{ suy ra } (f(x))^2 = \frac{k+r+2\sqrt{kr}}{x} = 1 + \frac{2\sqrt{kr}}{x} \geq 1.$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{kr} < \frac{k+r}{2} = \frac{x}{2} \text{ nên } (f(x))^2 = 1 + \frac{2\sqrt{kr}}{x} < 2. \text{ Vậy } 1 \leq f(x) < \sqrt{2}.$$

Nhận xét rằng với mọi $x_0 \geq 1$ ta có $1 \leq x_n < \sqrt{2}$ với mọi $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Nếu $x_1 = 1$ thì $x_n = 1$ với mọi $1 \leq n \in \mathbb{N}$, suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

$$\text{Xét trường hợp } 1 < x < \sqrt{2}, \text{ khi đó vì } [x] = 1 \text{ nên } f(x) = \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}.$$

Vì $f(x)$ liên tục khi $x \geq 1$ nên nếu dãy x_n có giới hạn là a thì do $x_n = f(x_{n-1})$ nên lấy giới hạn hai vế ta được $a = f(a)$. Ta lại có

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x(x-1)}} > 0 \text{ với mọi } x \in (1; \sqrt{2}) \text{ nên } f(x) \text{ đồng biến trên } (1; \sqrt{2}).$$

$$\text{Xét } \varphi(x) := f(x) - x. \text{ Ta có } \varphi(1,2) = f(1,2) - 1,2 = \frac{1 + \sqrt{0,2}}{\sqrt{1,2}} - 1,2 \approx 0,006 > 0$$

$$\text{và } \varphi(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) - \sqrt{2} = \frac{1 + \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{\sqrt{2}}} - \sqrt{2} \approx -0,32 < 0 \text{ nên phương trình}$$

$\varphi(x) = 0$ hay phương trình $a = f(a)$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(1; \sqrt{2})$. Suy ra $f(x) > x$ nếu $1 < x < a$ và $f(x) < x$ nếu $a < x < \sqrt{2}$.

Nếu $x_1 = a$ thì $x_2 = f(x_1) = f(a) = a$. Vậy $x_n \equiv a$. Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Nếu $1 < x_1 < a$ thì dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi a , suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Nếu $a < x_1 < \sqrt{2}$ thì dãy $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới bởi a , suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Thí dụ 3.11 Cho a, b là hai số nguyên dương cho trước, với mỗi số nguyên dương cho trước n , đặt $x_n = a^2 n^2 + bn$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{x_n}\}$.

Giải Lấy b chia cho $2a$ ta được $b = 2am + r$ với m, r là số không âm và $0 \leq r \leq 2a - 1$. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $r = 0$. Khi ấy $b = 2am$ và

$$x_n = a^2 n^2 + 2amn = (an + m)^2 - m^2 \leq (an + m)^2.$$

Ta chứng tỏ rằng, với n đủ lớn thì $(an + m - 1)^2 < x_n = (an + m)^2 - m^2$.

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned} (an + m - 1)^2 - (an + m)^2 &< -m^2 \Leftrightarrow -2(an + m) + 1 < -m^2 \\ \Leftrightarrow 2an &> m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \end{aligned}$$

đúng với n đủ lớn vì a, b là hai số nguyên dương cho trước nên m cố định.

Từ các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$(an + m - 1)^2 < x_n \leq (an + m)^2 \text{ hay } \left[\sqrt{x_n} \right] = an + m - 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \left\{ \sqrt{x_n} \right\} &= \sqrt{x_n} - \left[\sqrt{x_n} \right] = \sqrt{(an + m)^2 - m^2} - (an + m - 1) \\ &= \frac{2an - (m - 1)^2}{\sqrt{(an + m)^2 - m^2} + (an + m - 1)}. \end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{x_n} \right\} = 1$.

Trường hợp 2. Nếu $r \neq 0$, tức là $1 \leq r \leq 2a - 1$. Khi ấy $b = 2am + r$ và

$$x_n = a^2 n^2 + (2am + r)n = (an + m)^2 + rn - m^2 > (an + m)^2$$

với n đủ lớn. Đồng thời ta cũng có $x_n = a^2 n^2 + (2am + r)n < (an + m + 1)^2$,

vì bất đẳng thức này tương đương với

$$rn - m^2 < 2(an + m) + 1 \Leftrightarrow 0 < (2a - r)n + (m + 1)^2$$

đúng với mọi n và m do $1 \leq r \leq 2a - 1$.

Từ các kết quả trên suy ra, với n đủ lớn, ta có

$$(an + m)^2 < x_n < (an + m + 1)^2 \text{ hay } \left[\sqrt{x_n} \right] = an + m.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \left\{ \sqrt{x_n} \right\} &= \sqrt{x_n} - \left[\sqrt{x_n} \right] = \sqrt{(an + m)^2 + rn - m^2} - (an + m) \\ &= \frac{rn - m^2}{\sqrt{(an + m)^2 + rn - m^2} + (an + m)}. \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{x_n} \right\} = \frac{r}{2a}$. *Đáp số:* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{x_n} \right\} = 1$ khi $b = 2am$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{x_n} \right\} = \frac{r}{2a}$ khi $b = 2am + r, 0 < r < 2a$.

Bài tập 3.6 (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2007, lớp 11. Đề thi đề nghị, THPT Chu Văn An, Ninh Thuận) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi công thức $x_n = 4n^2 + 38n$ với $n \in \mathbb{N}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{x_n} \right\}$.

Bài tập 3.7 (Olympic USA lần thứ 26, 1997) Cho $p_1, p_2, \dots$ là các số nguyên tố được viết theo thứ tự tăng dần và cho $0 < x_0 < 1$. Với mọi k nguyên dương,

$$\text{ta định nghĩa } x_k = \begin{cases} 0 & \text{khi } x_{k-1} = 0 \\ \left\{ \frac{p_k}{x_{k-1}} \right\} & \text{khi } x_{k-1} \neq 0. \end{cases}$$

Tìm tất cả các x_0 thỏa mãn $0 < x_0 < 1$ sao cho dãy $\{x_k\}$ tiến đến 0.

Bài tập 3.8 (Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*, số 364, 2007)

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(7 + 4\sqrt{3} \right)^n \right\}$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài tập 3.9 (Chọn đội tuyển Quốc gia, 2008) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

công thức truy hồi $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{2008}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1}} \right]$.

§4 HÀM SỐ CHỨA PHẦN NGUYÊN

Như đã thấy trong §3 Chương 1, hàm phần nguyên có nhiều tính chất đặc thù, thí dụ, là hàm hằng từng khúc, do đó dễ tính toán, nhưng lại gián đoạn, do đó khó áp dụng công cụ giải tích. Một số hàm (phần dư, khoảng cách) có tính tuần hoàn. Các tính chất đặc thù này dẫn tới nhiều tính chất và bài tập hay về hàm phần nguyên. Rất nhiều dạng bài toán về hàm số chứa phần nguyên: tính tuần hoàn, tính chẵn lẻ, tính bị chặn, giới hạn,... Dưới đây là một số ví dụ.

Thí dụ 3.12 (Olympic 30-4 lần thứ VII, 2001, Lớp 11)

Cho hàm số $y = f(x) = x - n \left[\frac{x}{n} \right]$ với $n > 0$ cho trước. Chứng minh rằng:

1) f là hàm số tuần hoàn. Tìm chu kì. 2) $0 \leq f(x) < n$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải 1) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$f(x+n) = (x+n) - n \left[\frac{x+n}{n} \right] = (x+n) - n \left[\frac{x}{n} \right] - n = x - n \left[\frac{x}{n} \right] = f(x).$$

Chứng tỏ f là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = n$.

Giả sử $0 < T < n$. Khi ấy chọn $x_0 = n - T < n$. Ta có

$$f(x_0) = n - T - n \left[\frac{n-T}{n} \right] = -T - n \left[\frac{-T}{n} \right] = -T + n > 0$$

$$\text{và } f(x_0 + T) = f(n) = n - n \left[\frac{n}{n} \right] = 0 \neq f(x_0).$$

Chứng tỏ $T = n$ là chu kì nhỏ nhất của hàm f .

$$2) \text{ Ta có } \left[\frac{x}{n} \right] \leq \frac{x}{n} < \left[\frac{x}{n} \right] + 1 \Leftrightarrow n \left[\frac{x}{n} \right] \leq x < n \left[\frac{x}{n} \right] + n$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x - n \left[\frac{x}{n} \right] < n \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < n \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét rằng hàm $y = f(x) = x - n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x$ trên $[0; n)$ tăng trên $[0; n)$, tuần hoàn với chu kỳ chính là n , gián đoạn tại $x = kn$, ($\lim_{x \rightarrow kn-0} f(x) = n$; $f(kn) = 0$).

Thí dụ 3.13 (Olympic Canada, 1996) Cho các số hữu tỉ dương $r_1, r_2, \dots, r_m$ có tổng bằng 1. Ta định nghĩa hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ như sau: $f(n) = n - \sum_{k=1}^m \lfloor nr_k \rfloor$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(n)$.

Giải Do $\sum_{k=1}^m r_k = 1$ theo giả thiết và $\lfloor nr_k \rfloor \leq nr_k$ nên ta có:

$$\sum_{k=1}^m \lfloor nr_k \rfloor \leq \sum_{k=1}^m nr_k = n \sum_{k=1}^m r_k = n. \text{ Do đó } f(n) = n - \sum_{k=1}^m \lfloor nr_k \rfloor \geq 0 \text{ với mọi } n.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(n) = 0$ đạt được khi $n = 0$.

Mặt khác, ta có $nr_k - 1 < \lfloor nr_k \rfloor \Leftrightarrow nr_k - \lfloor nr_k \rfloor < 1$. Vì vậy

$$f(n) = n - \sum_{k=1}^m \lfloor nr_k \rfloor = n \sum_{k=1}^m r_k - \sum_{k=1}^m \lfloor nr_k \rfloor = \sum_{k=1}^m nr_k - \sum_{k=1}^m \lfloor nr_k \rfloor = \sum_{k=1}^m (nr_k - \lfloor nr_k \rfloor) < m.$$

Vì $f(n) = n - \sum_{k=1}^m \lfloor nr_k \rfloor$ là số nguyên nên $f(n) \leq m - 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $f(n) = m - 1$ đạt được khi $n = t - 1$ trong đó t là mẫu số chung nhỏ nhất của các mẫu số của r_k , với $k = \overline{1, m}$.

Thí dụ 3.14 (Olympic châu Á-Thái Bình Dương, 1993) Tìm tất cả các giá trị nguyên khác nhau của hàm số $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \left\lfloor \frac{5}{3}x \right\rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor$ khi x nhận giá trị là các số thực trong khoảng $0 \leq x \leq 100$.

Giải Đặt $h(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor$. Khi ấy $f(x) = h(x) + \left\lfloor \frac{5x}{3} \right\rfloor$.

Vì $h(x+1) = h(x) + 10$ nên chỉ cần xét $h(x)$ trên nửa khoảng $[0;1)$. Trên nửa khoảng $[0;1)$ hàm $h(x)$ là một hàm bậc thang, đơn điệu tăng và có các bước nhảy (thay đổi giá trị) tại sáu điểm $x = 0; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

Vì $f(x+3) = 35 + f(x)$ nên chỉ cần xét $f(x)$ trên nửa khoảng $[0;3)$. Trên nửa khoảng $[0;3)$ hàm $f(x)$ là một hàm bậc thang, đơn điệu tăng, có các bước nhảy tại các điểm sinh ra do hàm $h(x)$ và tại bốn điểm $x = \frac{3}{5}; \frac{6}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}$

sinh ra do hàm $g(x) = \left\lfloor \frac{5x}{3} \right\rfloor$. Như vậy, trên đoạn $[0;3) = [0;1) \cup [1;2) \cup [2;3)$, hàm $f(x)$ nhận tất cả $3 \times 6 + 4 = 22$ giá trị khác nhau.

Trên nửa khoảng $[0;99)$ hàm $f(x)$ nhận tất cả $22 \times 33 = 726$ giá trị khác nhau. Ngoài ra, trên đoạn $[99;100]$ hàm $f(x)$ còn nhận thêm $6 + 1 + 1 = 8$ giá trị khác nhau nữa tại các điểm $99; 99\frac{1}{4}; 99\frac{1}{3}; 99\frac{1}{2}; 99\frac{3}{5}; 99\frac{2}{3}; 99\frac{3}{4}; 100$.

Vậy $f(x)$ nhận tất cả $726 + 8 = 734$ giá trị (nguyên) khác nhau.

Thí dụ 3.15 (Olympic các nước Flanders, 1993-1994, vòng 1) Cho $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = [3\sin x]$. Hỏi đồ thị của f có bao nhiêu điểm *tách biệt* (chọn một trong năm đáp số): (A): 3; (B): 2; (C): 3; (D): $2\sqrt{3}$; (E): 4.

Giải Hàm $f(x) = [3\sin x] = [u]$ sẽ thay đổi giá trị khi $u = 3\sin x$ nhận các giá trị nguyên. Vì khi x thay đổi trên đoạn $[0, 2\pi]$ thì hàm liên tục $u = 3\sin x$ nhận các giá trị và lấp đầy đoạn $[-3; 3]$ nên $f(x) = [u]$ chỉ nhận bảy giá trị $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$. Trong bảy giá trị này chỉ có hai điểm $x_1 = \frac{\pi}{2}$ và

$x_2 = -\frac{\pi}{2}$ là hai điểm tách biệt vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[3\sin\frac{\pi}{2}\right] = 3 > f(x)$ với mọi $0 \leq x \leq 2\pi, x \neq \frac{\pi}{2}$. Tương tự, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left[3\sin-\frac{\pi}{2}\right] = -3 < f(x)$ với mọi $0 \leq x \leq 2\pi, x \neq -\frac{\pi}{2}$. Vậy ta có *Đáp số*: Hai điểm. Đáp án (B) là đáp án đúng.

Thí dụ 3.16 Tồn tại hay không các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, trong đó g là hàm tuần hoàn và thỏa mãn $x^3 = f([x]) + g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giải Giả sử các hàm số f và g thỏa mãn điều kiện đề bài. Kí hiệu $T > 0$ là chu kỳ của g . Vì $x^3 = f([x]) + g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$(x+T)^3 = f([x+T]) + g(x+T) \Leftrightarrow (x+T)^3 = f([x+T]) + g(x).$$

$$\text{Suy ra } f([x+T]) - f([x]) \equiv T^3 + 3T^2x + 3Tx^2. \quad (*)$$

Với $0 \leq x < [T] + 1 - T = 1 - \{T\} < 1$ thì $[x] = 0$ và $[T] \leq T \leq x + T < [T] + 1$ nên $[x+T] = [T]$ và $f([x+T]) - f([x]) \equiv f([T]) - f(0) := c$ là hằng số. Vậy (*) là một đa thức bậc hai $3Tx^2 + 3T^2x + T^3 - c \equiv 0$ với mọi $0 \leq x < 1 - \{T\}$, do đó $T = 0$. Vô lí vì $T > 0$. Vậy không tồn tại hàm số f và g thỏa mãn đề bài.

Bài tập 3.10 (Olympic 30-4 lần thứ 7, 2001, lớp 11. Đề thi đề nghị, THPT chuyên Trà Vinh) Có tồn tại hay không hai hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^{2001} = f([x]) + g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong đó $g(x)$ có đồ thị (C) thỏa mãn điều kiện:

- 1) Nhận điểm $A(x_0, y_0)$ làm tâm đối xứng;
- 2) Nhận đường thẳng $x = b$ làm trục đối xứng ($x_0 \neq b$).

Thí dụ 3.17 (Olympic 30.4 lần thứ 13, 2007, lớp 11. THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP Hồ Chí Minh) Cho phương trình $2007^x + x - \left[\log_{1+2007^{-n}} e \right] = 0$.

Với giá trị nguyên dương nào của n thì phương trình có nghiệm $x \in (1; 2)$.

Giải Ta có $\left[\log_{1+2007^{-n}} e \right] = \left\lceil \frac{\ln e}{\ln \left(1 + \frac{1}{2007^n} \right)} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{\ln(2007^n + 1) - \ln 2007^n} \right\rceil$.

Hàm $f(x) = \ln x$ có $f'(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$. Theo định lí Lagrange, tồn tại

một số $c \in (a, b) := (2007^n, 2007^n + 1)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, tức là

$$f'(c) = \frac{1}{c} = \frac{\ln(2007^n + 1) - \ln 2007^n}{(2007^n + 1) - 2007^n} = \ln(2007^n + 1) - \ln 2007^n. \quad \text{Vì } f'(x) = \frac{1}{x}$$

là hàm nghịch biến nên $\frac{1}{2007^n + 1} < f'(c) = \ln(2007^n + 1) - \ln 2007^n < \frac{1}{2007^n}$.

$$\text{Vậy } 2007^n < \frac{1}{\ln(2007^n + 1) - \ln 2007^n} < 2007^n + 1 \text{ hay } \left[\log_{1+2007^{-n}} e \right] = 2007^n.$$

Phương trình trở thành $2007^x + x - 2007^n = 0$.

Hàm số $g(x) = 2007^x + x - 2007^n$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1; 2)$ khi và chỉ khi $g(1) < 0$ và $g(2) > 0$, nghĩa là $2007 + 1 - 2007^n < 0 < 2007^2 + 2 - 2007^n$ hay $2007 + 1 < 2007^n < 2007^2 + 2$. Điều này chỉ xảy ra khi $n = 2$. **Đáp số:** $n = 2$.

Bài tập 3.11 Với n là số nguyên dương cho trước, hàm số $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi công thức $f(k) = k^2 + \left\lceil \frac{n}{k^2} \right\rceil$ với $k \in \mathbb{N}$. Xác định tất cả các giá trị nguyên dương mà n có thể nhận sao cho $\min_{k \in \mathbb{N}} f(k) = 200$.

§5 CHUỖI SỐ CHỨA PHẦN NGUYÊN

5.1 Nhắc lại một số định nghĩa và dấu hiệu hội tụ của chuỗi số

Chuỗi số là biểu thức dạng $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (1)

Các số a_n được gọi là *các số hạng* của chuỗi và a_n được gọi là *số hạng thứ n* hay *số hạng tổng quát* của chuỗi (1).

Ta gọi *dãy tổng riêng* của chuỗi (1) là $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn của dãy tổng riêng, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, thì chuỗi (1) được gọi là *chuỗi hội tụ* và có *tổng bằng S* . Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ hoặc không tồn tại thì chuỗi (1) được gọi là *chuỗi phân kỳ*.

Nếu $a_n \geq 0$ thì chuỗi (1) được gọi là *chuỗi số dương*, còn nếu $a_n > 0$ thì chuỗi (1) được gọi là *chuỗi số dương thực sự*.

Phần dư sau số hạng thứ n (*phần dư thứ n*) của chuỗi số (1) là

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

Để chuỗi (1) hội tụ, *điều kiện cần* là $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Tiêu chuẩn Cauchy Điều kiện cần và đủ để (1) hội tụ là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên N sao cho với mọi $n > N$ và với mọi số tự nhiên p ta có

$$|S_{n+p} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Chuỗi điều hòa Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ được gọi là *chuỗi điều hòa tổng quát*.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ khi $p > 1$ và phân kỳ khi $p \leq 1$.

Khi $p = 1$ thì chuỗi này được gọi là *chuỗi điều hòa*.

Chuỗi trội Nếu $a_n \leq c_n$ với $a_n \geq 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ được gọi là *chuỗi trội* của chuỗi (1).

Từ sự hội tụ của chuỗi trội $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ suy ra sự hội tụ của chuỗi (1) và từ sự phân kỳ của chuỗi (1) suy ra sự phân kỳ của chuỗi trội bất kỳ của nó.

Dấu hiệu so sánh chung Nếu chuỗi (1) là chuỗi số dương và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là chuỗi số dương thực sự và tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ với $c > 0$, $c = \text{const}$ thì:

- 1) Nếu $0 < c < +\infty$ thì chuỗi (1) và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ đồng thời hội tụ hoặc phân kỳ.
- 2) Nếu $c = 0$ thì từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ suy ra sự hội tụ của chuỗi (1).
- 3) Nếu $c = +\infty$ thì từ sự phân kỳ của (1) suy ra sự phân kỳ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dấu hiệu so sánh với lũy thừa Nếu khi $n \rightarrow \infty$ ta có $a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ thì với $p > 1$ chuỗi (1) hội tụ, với $p \leq 1$ chuỗi (1) phân kỳ.

Dấu hiệu D'Alembert Nếu chuỗi (1) là chuỗi số dương thực sự và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ thì với $L < 1$ chuỗi đó hội tụ và với $L > 1$ thì chuỗi đó phân kỳ.

Với $L = 1$ thì sự hội tụ của chuỗi (1) chưa xác định được, bởi vì có những chuỗi hội tụ hoặc những chuỗi phân kỳ khi $L = 1$.

Dấu hiệu Cauchy Nếu (1) là chuỗi số dương và $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ thì với $q < 1$ chuỗi đó hội tụ và với $q > 1$ chuỗi đó phân kỳ. Với $q = 1$ thì sự hội tụ của chuỗi (1) chưa xác định.

Dấu hiệu Raabe Nếu (1) là chuỗi số dương thực sự và $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p$, thì với $p > 1$ chuỗi đó hội tụ và với $p < 1$ chuỗi đó phân kỳ. Với $p = 1$ thì sự hội tụ của chuỗi (1) chưa xác định được.

Dấu hiệu Gauss Nếu (1) là chuỗi số dương thực sự và $a_n = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, trong đó $\varepsilon > 0, |\theta_n| < c$, thì với $\lambda > 1$ chuỗi đó hội tụ và với $\lambda < 1$ chuỗi đó phân kỳ. Với $\lambda = 1$ thì chuỗi (1) hội tụ khi $\mu > 1$ và phân kỳ khi $\mu \leq 1$.

Dấu hiệu Gauss là tổng hợp dấu hiệu D'Alembert và Raabe.

Dấu hiệu tích phân Cauchy Nếu hàm $f(x) \geq 0$ khi $x > 0$ và không tăng thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hội tụ hay phân kỳ đồng thời với tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Chuỗi (1) *hội tụ tuyệt đối* nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ. Nếu (1) hội tụ còn chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ thì ta nói (1) *hội tụ có điều kiện (bán hội tụ)*.

Nếu chuỗi hội tụ tuyệt đối thì các số hạng của chuỗi có thể đổi chỗ cho nhau theo thứ tự bất kỳ và tổng của chuỗi đó vẫn giữ nguyên.

Nếu chuỗi hội tụ có điều kiện thì nhờ đổi chỗ thích hợp các số hạng của nó ta nhận được chuỗi có tổng bằng một số cho trước bất kỳ (có thể bằng $\pm \infty$).

Dấu hiệu Leibnitz Nếu $a_n = (-1)^n b_n$, với $b_n \geq 0$ và dãy b_n bắt đầu từ một chỉ số n_0 nào đó đơn điệu tiến đến 0 thì chuỗi (1) hội tụ.

Đối với phần dư của chuỗi ta có ước lượng $R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1}$, $0 \leq \theta_n \leq 1$.

Dấu hiệu Abel Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và dãy b_n đơn điệu và giới nội.

Dấu hiệu Dirichlet Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ nếu dãy b_n bắt đầu từ một chỉ số n_0

nào đó đơn điệu tiến tới 0 và dãy tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bị chặn.

Các số hạng của chuỗi hội tụ có thể nhóm lại với nhau một cách tùy ý, khi ấy tổng của chuỗi không thay đổi.

Cộng các chuỗi Nếu các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \text{ trong đó } \lambda, \mu \text{ là các số tùy ý.}$$

Tích các chuỗi (Quy tắc Cauchy) Tích các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là một chuỗi thứ ba mà số hạng tổng quát của nó có dạng $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$.

Nói chung $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tuy nhiên, nếu một trong hai chuỗi hội tụ, còn chuỗi kia hội tụ tuyệt đối thì ta luôn có $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Công thức này được thỏa mãn trong trường hợp ba chuỗi đều hội tụ.

Hội tụ đều của dãy hàm Dãy hàm $f_n(x)$ được gọi là *hội tụ đều* về hàm $f(x)$ trên một khoảng X , nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $N = N(\varepsilon)$ (phụ thuộc vào ε và không phụ thuộc vào x) sao cho với mọi $n > N(\varepsilon)$ thỏa mãn $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, với mọi $x \in X$.

Trong trường hợp này ta viết $f_n(x) \Rightarrow f(x), \forall x \in X$.

Hội tụ của chuỗi hàm Chuỗi hàm $\sum_{k=1}^n u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots$ được gọi là *hội tụ* tới hàm $S(x)$ trên khoảng X nếu dãy tổng riêng của nó $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), n = 1, 2, \dots$ hội tụ, đồng thời $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$.

Hội tụ đều của chuỗi hàm Chuỗi hàm $\sum_{k=1}^n u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots$ được gọi là *hội tụ đều* tới tổng $S(x)$ của nó trên khoảng X nếu dãy tổng riêng $S_n(x)$ của chuỗi hội tụ đều tới hàm $S(x)$ trên X .

Dấu hiệu Abel Chuỗi hàm $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x)$ *hội tụ đều* trên khoảng X nếu chuỗi $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ hội tụ đều trên X , còn các hàm $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$ đều giới nội và với mỗi x lập thành một dãy đơn điệu.

Chuỗi lũy thừa là biểu thức $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, trong đó a_n là hệ số của chuỗi (không phụ thuộc vào x), a là điểm cố định trên trục số.

Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa luôn là khoảng $|x-a| < R$, trong đó R là bán kính hội tụ của chuỗi ($R \geq 0$). Bán kính hội tụ của chuỗi có thể được xác định

theo công thức Cauchy-Adama (a) $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, hoặc (b) $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, nếu

các giới hạn này tồn tại. Trong trường hợp giới hạn (a) bằng 0 hoặc giới hạn (b) bằng $+\infty$ thì chuỗi lũy thừa hội tụ trên toàn trục số.

Để tìm đáng điệu của chuỗi lũy thừa tại các điểm mút của khoảng hội tụ cần sử dụng các dấu hiệu hội tụ của chuỗi số.

Nếu hàm $f(x)$ có thể khai triển trên khoảng $(a-R; a+R)$ thành chuỗi lũy thừa thì chuỗi này được gọi là *chuỗi Taylor* đối với hàm $f(x)$.

Điều kiện cần và đủ để hàm $f(x)$ có thể khai triển thành chuỗi Taylor trên khoảng $(a-R; a+R)$ là hàm $f(x)$ khả vi vô hạn và phần dư trong công thức Taylor đối với hàm này tiến tới 0 khi $n \rightarrow \infty$ trên khoảng đó.

Khai triển có dạng $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$. (2)

Hàm giải tích Hàm $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor được gọi là *hàm giải tích* và khai triển (2) của nó là duy nhất.

Trong thực hành, các trường hợp quan trọng là các trường hợp biểu diễn phần dư của khai triển (2) (hay phần dư của chuỗi (2)) dưới dạng Lagrange

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

và dưới dạng Cauchy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta_1(x-a))}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1}, \text{ trong đó } 0 < \theta < 1; 0 < \theta_1 < 1.$$

5.2 Một số kết quả bổ trợ

Mệnh đề 5.1 Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) Số hạng tổng quát $a_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.
- ii) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ nhận được bằng cách nhóm các số hạng của chuỗi đã cho theo thứ tự tự nhiên của nó, hội tụ.
- iii) Số phân tử a_i có mặt trong tổng $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$, $1 = p_1 < p_2 < \dots$ là hữu hạn.

Chứng minh Giả sử S_{nk}^A là dãy tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$. Khi đó

$$S_{nk}^A = a_1 + a_2 + \dots + a_{p_2-1} + a_{p_2} + a_{p_2+1} + \dots + a_{p_3-1} + \dots + a_{p_n} + a_{p_n+1} + \dots + a_k + a_{k+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1} = S_k + a_{k+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1},$$

với $p_n \leq k \leq p_{n+1} - 1$, trong đó S_k là dãy tổng riêng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Vì $a_n \rightarrow 0$ và các số hạng của dãy $a_{k+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1} = C_k$ theo điều kiện là hữu

hạn nên $C_k \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{nk}^A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$.

Mệnh đề 5.2 Chuỗi số $a_1 + a_2 + \dots + a_{p_2-1} - a_{p_2} - \dots - a_{p_3-1} + a_{p_3} + \dots$ (3)

hội tụ hay phân kỳ đồng thời với chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right), \text{ trong đó } a_i > 0, 1 = p_1 < p_2 < \dots \quad (4)$$

Chứng minh Giả sử chuỗi (3) hội tụ. Khi đó dãy con tùy ý của dãy tổng riêng của nó cũng hội tụ, trong số đó có dãy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right)$, tức là dãy tổng riêng của chuỗi (4) hội tụ. Do đó chuỗi (4) cũng hội tụ.

Bây giờ, giả sử chuỗi (4) hội tụ, khi đó $\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Điều này có nghĩa là, do a_i dương nên tổng $a_{k+1} + \dots + a_{p_{n+1}-1}$ cũng tiến tới 0 và

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{nk}^A = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$, tức là chuỗi (3) hội tụ.

5.3 Một số bài tập về chuỗi số chứa phần nguyên

Thí dụ 3.18 Xét sự hội tụ của chuỗi sau $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

Giải Ta có $[\sqrt{n}] = k \Leftrightarrow k \leq \sqrt{n} < k+1 \Leftrightarrow k^2 \leq n < (k+1)^2$.

Xét chuỗi nhận được do việc nhóm các số hạng cùng dấu của chuỗi đã cho

$$\begin{aligned} & -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots \\ & + (-1)^k \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1}\right) + \dots \end{aligned}$$

Bởi vì $A_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2-1} < \frac{2k+1}{k^2} \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$, và

$$\begin{aligned} A_k - A_{k+1} &= (2k+1) \sum_{m=0}^{2k} \frac{1}{(k^2+m)((k+1)^2+m)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} \\ &> \frac{(2k+1)^2}{(k^2+2k)(k^2+4k+1)} - \frac{1}{k^2+4k+2} - \frac{1}{k^2+4k+3} > 0 \end{aligned}$$

với $k \geq k_0$ nên chuỗi $\sum (-1)^k A_k$ hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Do đó chuỗi đã cho cũng hội tụ.

Thí dụ 3.19 Xét sự hội tụ, hội tụ có điều kiện hay phân kỳ của $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

Giải Hiển nhiên khi $p > 1$ chuỗi hội tụ tuyệt đối và phân kỳ nếu $p \leq 0$. Ta sẽ chỉ ra rằng nếu $0 < p \leq 1$ thì chuỗi hội tụ có điều kiện. Ta thấy rằng, số hạng đầu tiên của chuỗi là số âm, năm số hạng tiếp theo là số dương, ... Để tìm miền hội tụ có điều kiện, ta xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n$, trong đó

$$A_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{(n^2)^p} + \frac{1}{(n^2+1)^p} + \dots + \frac{1}{(n^2+2n)^p} \text{ nhận được bằng cách nhóm}$$

các số hạng cùng dấu của chuỗi đã cho.

$$\text{Hơn nữa, với } a \neq 1 \text{ thì } A_n < \frac{1}{n^{2p}} + \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^p} dt = \frac{1}{n^{2p}} + \frac{1}{1-p} ((n+1)^{2-2p} - n^{2-2p}).$$

Do $\frac{1}{2} < p < 1$ nên

$$0 < (n+1)^p - n^p = n^p \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 \right) < n^p \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right) = \frac{1}{n^{1-p}} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Vì vậy, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ nếu $\frac{1}{2} < p < 1$.

Với $p=1$ ta có $\frac{2}{n+1} < A_n < \frac{2n+1}{n^2}$, và vì vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ với $\frac{1}{2} < p \leq 1$.

Ta sẽ chỉ ra rằng với $\frac{1}{2} < p \leq 1$ thì dãy $\{A_n\}$ đơn điệu giảm. Thật vậy,

$$\begin{aligned}
 A_n - A_{n+1} &= \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^p} - \sum_{k=(n+1)^2}^{(n+2)^2-1} \frac{1}{k^p} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^p} - \sum_{k'=n^2}^{(n+1)^2+1} \frac{1}{(k'+2n+1)^p} \\
 &= \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \left(\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(k'+2n+1)^p} \right) - \frac{1}{((n+2)^2-2)^p} - \frac{1}{((n+2)^2-1)^p} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{1}{(n^2+k)^p} - \frac{1}{((n+1)^2+k)^p} \right) - \frac{1}{((n+2)^2-2)^p} - \frac{1}{((n+2)^2-1)^p} \\
 &> \frac{1}{((n+2)^2-1)^p}, \text{ trong đó bất đẳng thức cuối cùng suy ra từ tính đơn}
 \end{aligned}$$

điệu của hàm $g(x) = \frac{1}{(n^2+x)^p} - \frac{1}{((n+1)^2+x)^p}$ trên $[0; 2n]$. Với n đủ lớn, ta có

$$\begin{aligned}
 A_n - A_{n+1} &> (2n+1) \left(\frac{1}{(n^2+2n)^p} - \frac{1}{(n^2+4n+1)^p} \right) - \frac{1}{(n^2+4n+2)^p} - \frac{1}{(n^2+4n+3)^p} \\
 &> (2n+1) \left(\frac{1}{(n^2+2n)^p} - \frac{1}{(n^2+4n+1)^p} \right) - \frac{2}{(n+1)^{2p}} \\
 &= \frac{2}{n^{2p}} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\left(n + \frac{1}{2} \right)^{-p} - \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^{-p} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-2p} \right) \geq n^{-2p} (2p-1) > 0,
 \end{aligned}$$

(vì $(1+x)^{-p} > 1 - px$ và $(1+x)^{-p} > 1 - px + \frac{p(p+1)x^2}{2}$, $p, x > 0$, hai bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng đạo hàm).

Vì vậy, theo dấu hiệu Leibnitz thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n$ hội tụ với $\frac{1}{2} < p \leq 1$. Do đó

chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $\frac{1}{2} < p \leq 1$. Miền hội tụ của chuỗi đã cho được xác định bởi $\frac{1}{2} < p \leq 1$.

Mặt khác, $A_n > \frac{(2n+1)}{(n^2+2n)^p}$ không tiến tới 0 với $0 < p \leq \frac{1}{2}$. Vì vậy chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \text{ phân kỳ nếu } 0 < p \leq \frac{1}{2}.$$

Thí dụ 3.20 Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, với $|xy| < 1$.

Giải Do chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$ hội tụ, ta có thể nhóm các số hạng như sau

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} y^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} &= 1 + y + xy + xy^2 + x^2y^2 + x^2y^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n + y \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = (1+y) \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n = \frac{1+y}{1-xy}. \end{aligned}$$

Bài tập 3.12 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$.

Bài tập 3.13 Tính $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\lfloor \frac{\ln n}{n - \ln n} \right\rfloor$.

Bài tập 3.14 Cho $\{a_n\}$ xác định bởi công thức: $a_0 = 2$, $a_{n+1} = a_n + \frac{3 + (-1)^n}{2}$.

Tính $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{1}{a_n^2 - 1}$.

Bài tập 3.15 Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor!}$, với $|x| < a$, trong đó $a > 0$.

Bài tập 3.16 Xét sự hội tụ đều của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$, với $0 \leq x < +\infty$.

Bài tập 3.17 (chuỗi Prinxgay) Xác định bán kính, khoảng hội tụ và nghiên

cứu dáng điệu tại các điểm biên của khoảng hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} x^n}{n}$.

Bài tập 3.18 Xét sự hội tụ, hội tụ tuyệt đối của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$.

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày tương đối đầy đủ về hàm phân nguyên và các dạng toán có tham gia phân nguyên trong số học, đại số và giải tích. Nhiều vấn đề lí thuyết của phân nguyên liên quan đến tính chia hết, nhị thức Newton, phương trình sai phân và hệ đếm. Theo chúng tôi, phân nguyên là một chuyên đề tốt giúp học sinh, sinh viên thành thạo các kĩ thuật thao tác với phân nguyên, mà còn giúp nâng cao kiến thức và trình độ toán nói chung. Bài tập về phân nguyên nhiều khi đòi hỏi lời giải đặc thù và độc đáo. Trong luận văn này chúng tôi cố gắng tập hợp, phân loại các dạng bài tập và các phương pháp giải chúng. Số lượng khá lớn các ví dụ minh họa, bài tập và bài thi (được giải chi tiết trong [2]) chứng tỏ hàm phân nguyên được nhiều tác giả ra đề thi Olympic quốc gia và quốc tế, nhiều tạp chí toán phổ thông quan tâm.

Chúng tôi hi vọng luận văn này cùng với [2] được các giáo viên và các học sinh phổ thông, sinh viên đại học quan tâm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. X. V. Cônhiagin, G. A. Tônôian, I. F. Sarughin *Các đề thi vô địch toán của các nước* (Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên dịch từ tiếng Nga), Nhà xuất bản Hải Phòng, 1993.
2. Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Nguyễn Thị Bình Minh, Tạ Duy Phương, *Hàm phân nguyên trong toán sơ cấp* (Bản thảo, 256 trang), 2010.
3. Phan Huy Khải, *Các bài toán về hàm số học* (Trong bộ sách: Các chuyên đề số học bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học), Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.
4. Y. Y. Liaskô, A. C. Bôiatruc, Ia. G. Gai, G. P. Gôlôvac, *Giải tích toán học, Các ví dụ và các bài toán*, Phần I, Tập II, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1979.
5. Nguyễn Vũ Lương (Chủ biên), Nguyễn Lưu Sơn, Nguyễn Ngọc Thắng, Phạm Văn Hùng, *Các bài giảng về số học* (Tập II), Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2006.
6. Nguyễn Sinh Nguyên, Nguyễn Văn Nho, Lê Hoàng Phò, *Tuyển tập các bài dự tuyển Olympic toán học Quốc tế*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2003.
7. Nguyễn Văn Nho, *Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Trung Quốc*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2003.
8. Nguyễn Văn Nho, *Chuyên đề Số học*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh, 2005.
9. Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Nho, *Tuyển tập các bài toán từ những cuộc thi tại Mỹ và Canada*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2002.

10. *Tuyển tập đề thi Olympic 30-4*, Nhà xuất bản Giáo dục, Các năm xuất bản: 2001 đến 2010.
11. Titu Andreescu, Dorin Andrica, and Zuming Feng, 104 Number Theory Problems from the Training of the USA IMO Team, Birkhäuser, 2007, 204 p., Softcover, ISBN: 978-0-8176-4527-4.
12. P. Vandendriessche, Hojoo Lee, *Problems in Elementary Number Theory*, 2007. <http://www.problem-solving.be/pen/>
13. Các Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ; Kvant; Toán học trong nhà trường; CRUX, Mathematical Excalibur,...
14. Các trang WEB toán (tiếng Việt và tiếng Anh).