

VỀ BẤT ĐẲNG THỨC KARAMATA VÀ ỨNG DỤNG

ON THE KARAMATA'S INEQUALITY AND ITS APPLICATIONS

CAO VĂN NUÔI - NGUYỄN QUANG THI

*Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng***TÓM TẮT**

Định lý Karamata và các tính chất của hàm lồi là một phần quan trọng và khó của các bất đẳng thức. Dựa vào định lý Karamata, người ta chứng minh được các bất đẳng thức: T. Popoviciu, bất đẳng thức A. Lupas và bất đẳng thức Vasile Cirtoaje 2.1.[2]. Các bất đẳng thức này đã có những ứng dụng trong việc giải một số bài toán khó. Và chúng tôi thấy rằng: việc xây dựng các bất đẳng thức mới là rất cần thiết. Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng hai định lý mới và những ứng dụng của chúng. Bài báo trình bày hai bất đẳng thức mới mà phương pháp chứng minh của nó dựa vào định lý Karamata và các tính chất của hàm lồi.

ABSTRACT

Karamata's theorem and properties of the convex function are important and difficult part of inequalities. Base on Karamata's theorem, it proved the inequalities: T. Popoviciu's inequality, A. Lupas inequality's and Vasile Cirtoaje's inequality 2.1.[2]. These inequalities have application in solving difficult problems. And we see that: building of inequalities are very necessary. In this paper, we built two new theorems and their applications. We present two new inequalities which are that their demonstration method based on the Karamata's theorem and properties of the convex function.

1. Mở đầu

Ta kí hiệu $I(a, b)$ là một tập hợp có một trong 4 dạng sau đây: $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$ và $(a, b]$.

Định nghĩa (Các bộ trội). Cho $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ là hai bộ số thực. Ta nói rằng dãy $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ trội hơn $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ hay dãy $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ được làm trội bởi dãy $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và ta viết $(x_1, x_2, \dots, x_n) \succ (y_1, y_2, \dots, y_n)$, nếu các điều kiện sau thoả mãn:

- (1) $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ và $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$.
- (2) $x_1 + x_2 + \dots + x_i \geq y_1 + y_2 + \dots + y_i, \forall i = \overline{1, n-1}$.
- (3) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n$.

Định nghĩa (Hàm lồi)

Hàm số $f(x)$ được gọi là lồi trên tập $I(a, b)$ nếu nó xác định trên $I(a, b)$, với mọi

$x_1, x_2 \in I(a, b)$ và với mọi cặp số không âm α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \quad (1.1)$$

Nếu đẳng thức trong (1.1) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì f được gọi là lồi thật sự trên $I(a, b)$.

Hàm số $f(x)$ được gọi là lõm trên tập $I(a, b)$ nếu nó xác định trên $I(a, b)$, với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ và với mọi cặp số không âm α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \quad (1.2)$$

Nếu đẳng thức trong (1.2) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì f được gọi là lõm thật sự trên $I(a, b)$.

Định lý. Nếu f khả vi bậc hai trên $I(a, b)$ thì hàm $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ nếu và chỉ nếu $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in I(a, b)$.

Định lý (Karamata). Cho hai ôp số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $(x_i, y_i \in I(a, b))$ thỏa mãn điều kiện $(x_1, x_2, \dots, x_n) \succ (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Khi đó, với mọi hàm $f(x)$ lồi thật sự trên $I(a, b)$ ($f''(x) > 0$), ta luôn có

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f(y_i)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = y_i, \forall i = \overline{1; n}$.

2. Các kết quả

2.1. Chứng minh Định lý Karamata

Trước hết, chúng tôi giới thiệu cách chứng minh Định lý Karamata được trình bày trong 0.

Chứng minh (Định lý Karamata). Ta có $f(x) - f(y) \geq (x - y)f'(y), \forall x, y \in I(a, b)$ với mọi hàm $f(x)$ lồi thật sự trên $I(a, b)$. Thật vậy, do $f''(x) > 0$ nên $f'(x)$ là hàm số tăng trên $I(a, b)$. Xét 3 trường hợp sau:

- + Nếu $x = y$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- + Nếu $x > y$ thì $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c_1) > f'(y), c_1 \in (y, x)$.
- + Nếu $x < y$ thì $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_2) < f'(y), c_2 \in (x, y)$.

Khi đó $f(x_i) - f(y_i) \geq (x_i - y_i)f'(y_i), \forall x_i, y_i \in I(a, b), i = \overline{1; n}$. Và

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(y_i)] &\geq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) f'(y_i) \\
&= (x_1 - y_1) f'(y_1) + (x_2 - y_2) f'(y_2) + \dots + (x_n - y_n) f'(y_n) \\
&= (x_1 - y_1) [f'(y_1) - f'(y_2)] + (x_1 + x_2 - y_1 - y_2) [f'(y_2) - f'(y_3)] + \dots \\
&\quad + (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} - y_1 - y_2 - \dots - y_{n-1}) [f'(y_{n-1}) - f'(y_n)] \\
&\quad + (x_1 + x_2 + \dots + x_n - y_1 - y_2 - \dots - y_n) f'(y_n) \geq 0
\end{aligned}$$

Do đó $\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq \sum_{i=1}^n f(y_i)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_i = y_i, \forall i = \overline{1; n}$.

2.2. Về hai bất đẳng thức

Định lí 1. Cho hàm số $f(x)$ lồi trên $[-a, a]$, trong đó $a > 0$. Nếu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ là hai bộ số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} x_i, y_i \in [0, a], \forall i = \overline{1; n} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \succ (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

thì

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) + \sum_{i=1}^n f(y_i - x_i) \geq \sum_{i=1}^n f(y_i) + n \quad (f0)$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \geq y_1 - x_1 \\ 0 \geq (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) \\ \dots\dots\dots \\ 0 \geq (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \dots + (y_{n-1} - x_{n-1}) \\ 0 = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + \dots + (y_n - x_n) \end{cases}$$

Đặt $t_i = y_i - x_i, \forall i = \overline{1; n}$. Gọi $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_{2n}^*)$ là bộ gồm $2n$ số nhận được từ các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ bằng cách sắp xếp các số $x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n$ theo thứ tự giảm dần.

Theo tính chất của bộ trội, ta suy ra

$$(k_1^*, k_2^*, \dots, k_{2n}^*) \succ (y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \dots, 0)$$

Thật vậy, giả sử tồn tại $t \in \mathbb{N}$ và $1 \leq t \leq n-1$ sao cho

$$k_1^* \geq k_2^* \geq \dots \geq k_n^* \geq k_{n+1}^* \geq \dots \geq k_{n+t}^* \geq 0 \geq k_{n+t+1}^* \geq \dots \geq k_{2n}^*$$

Hiển nhiên

$$k_1^* + k_2^* + \dots + k_p^* \geq x_1 + x_2 + \dots + x_p \geq y_1 + y_2 + \dots + y_p, \forall p = \overline{1; n}$$

$$k_1^* + k_2^* + \dots + k_{n+q}^* \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq y_1 + y_2 + \dots + y_n + \underbrace{0 + \dots + 0}_{q \text{ số}}, \forall q = \overline{1; t}$$

và

$$\begin{aligned} k_1^* + k_2^* + \dots + k_{n+q}^* &\geq k_1^* + k_2^* + \dots + k_{n+q}^* + k_{n+q+1}^* + \dots + k_{2n}^* = \\ &= y_1 + y_2 + \dots + y_n + \underbrace{0 + \dots + 0}_{q \text{ số}}, \forall q = \overline{t+1; n-1} \end{aligned}$$

Từ **Định lý Karamata**, ta suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} f(k_i^*) &\geq \sum_{i=1}^n f(y_i) + n f(0) \\ \sum_{i=1}^n f(x_i) + \sum_{i=1}^n f(y_i - x_i) &\geq \sum_{i=1}^n f(y_i) + n f(0) \end{aligned}$$

Kết luận: Định lý được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $k_i^* = y_i$, $i = \overline{1; n}$ và $k_i^* = 0$, $i = \overline{n+1; 2n}$.

Sau đây ta ứng dụng **Định lý 1** để giải một số bài toán.

Bài toán 1. Cho ΔABC thỏa mãn $\frac{\pi}{2} \geq A \geq B \geq C \geq \frac{\pi}{4}$. Chứng minh rằng:

$$\cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right) \leq \cos A + \cos B + \cos C + 3 - \sqrt{2}$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = -\cos x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có $f''(x) = \cos x \geq 0$,

$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Vậy, hàm số $f(x)$ lồi trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Do $\frac{\pi}{2} \geq A \geq B \geq C \geq \frac{\pi}{4}$ nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \geq A \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} \geq \pi - C = A + B \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \succ (A, B, C) \\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = A + B + C \end{cases}$$

Áp dụng **Định lý 1**, ta có

$$\begin{aligned} &-\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\geq -\cos A - \cos B - \cos C - 3 \cos 0 \end{aligned}$$

Hay

$$\cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(B - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(C - \frac{\pi}{4}\right) \leq \cos A + \cos B + \cos C + 3 - \sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC vuông cân tại A .

Bài toán 2. Cho x, y, z là các số thực thoả mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 2 \geq x \geq y \geq z \geq 1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & \sqrt{4+(x-2)^2} + \sqrt{4+(y-1)^2} + \sqrt{4+(z-1)^2} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} - 6 \\ & \geq \sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+y^2} + \sqrt{4+z^2} \end{aligned}$$

Lời giải.

Nhận xét.

Đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $x = 2, y = z = 1$. Từ điều kiện bài toán, dễ dàng ta có

$$\begin{cases} 2 \geq x \\ 2+1 \geq 4-z = x+y \\ 2+1+1 = x+y+z \end{cases}$$

Khi đó, xét hàm số $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ trên $[-2, 2]$.

Do $f''(x) = \frac{4}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} > 0, \forall x \in [-2, 2]$ nên hàm số $f(x)$ lồi trên $[-2, 2]$. Khi

đó, áp dụng **Định lý 1**, ta thu được

$$f(2) + f(1) + f(1) + f(x-2) + f(y-1) + f(z-1) \geq f(x) + f(y) + f(z) + 3f(0)$$

Hay

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{4+(x-2)^2} + \sqrt{4+(y-1)^2} + \sqrt{4+(z-1)^2} \\ & \geq \sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+y^2} + \sqrt{4+z^2} + 6 \end{aligned}$$

Kết luận: Bất đẳng thức được chứng minh.

Chúng tôi đã chứng minh được định lý sau đây:

Định lý 2. Nếu hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ và $x, y, z \in I(a, b)$ thì

$$\begin{aligned} & f(x) + f(y) + f(z) + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \\ & \geq \frac{2}{3} \left[f\left(\frac{2x+y}{3}\right) + f\left(\frac{2y+x}{3}\right) + f\left(\frac{2y+z}{3}\right) + f\left(\frac{2z+y}{3}\right) + f\left(\frac{2x+z}{3}\right) + f\left(\frac{2z+x}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

Chứng minh. Đặt

$$d = \frac{x+y+z}{3}, a_1 = \frac{2x+y}{3}, a_2 = \frac{2y+x}{3}$$

$$b_1 = \frac{2x+z}{3}, b_2 = \frac{2z+x}{3}, c_1 = \frac{2y+z}{3}, c_2 = \frac{2z+y}{3}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử rằng: $x \geq y \geq z$. Xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $2y \geq x+z$. Dễ thấy $x \geq x \geq x \geq y \geq y \geq y \geq d \geq d \geq d \geq z \geq z \geq z$

và $a_1 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_2 \geq b_1 \geq b_1 \geq c_1 \geq c_1 \geq b_2 \geq b_2 \geq c_2 \geq c_2$.

Ta sẽ chứng minh

$$(x, x, x, y, y, y, d, d, d, z, z, z) \succ (a_1, a_1, a_2, a_2, b_1, b_1, c_1, c_1, b_2, b_2, c_2, c_2) \quad (1.3)$$

Thật vậy,

$$x - a_1 = \frac{x-y}{3} \geq 0, 2x - 2a_1 = \frac{2(x-y)}{3} \geq 0, 3x - 2a_1 - a_2 = \frac{4(x-y)}{3} \geq 0$$

$$3x + y - 2a_1 - 2a_2 = x - y \geq 0, 3x + 2y - 2a_1 - 2a_2 - b_1 = \frac{x-z}{3} \geq 0$$

$$3x + 3y - 2a_1 - 2a_2 - 2b_1 = \frac{3y-x-2z}{3} = \frac{(2y-x-z) + (y-z)}{3} \geq 0$$

$$3x + 3y + d - 2a_1 - 2a_2 - 2b_1 - c_1 = \frac{2(y-z)}{3} \geq 0$$

$$3x + 3y + 2d - 2a_1 - 2a_2 - 2b_1 - 2c_1 = \frac{x+y-2z}{3} \geq 0$$

$$3x + 3y + 3d - 2a_1 - 2a_2 - 2b_1 - 2c_1 - b_2 = \frac{x+2y-3z}{3} \geq 0$$

$$3x + 3y + 3d + z - 2a_1 - 2a_2 - 2b_1 - 2c_1 - 2b_2 = \frac{2(y-z)}{3} \geq 0$$

$$3x + 3y + 3d + 2z - 2a_1 - 2a_2 - 2b_1 - 2c_1 - 2b_2 - c_2 = \frac{(y-z)}{3} \geq 0$$

Và

$$3x + 3y + 3d + 3z - 2a_1 - 2a_2 - 2b_1 - 2c_1 - 2b_2 - 2c_2 = 0$$

Suy ra (1.3) đúng. Theo **Định lý Karamata**, ta có bất đẳng thức đúng.

Trường hợp 2: $2y \leq x+z$. Tương tự, ta có $x \geq x \geq x \geq d \geq d \geq d \geq y \geq y \geq y \geq z \geq z \geq z$

và $a_1 \geq a_1 \geq b_1 \geq b_1 \geq a_2 \geq a_2 \geq b_2 \geq b_2 \geq c_1 \geq c_1 \geq c_2 \geq c_2$. Dễ dàng, ta có

$$(x, x, x, d, d, d, y, y, y, z, z, z) \succ (a_1, a_1, b_1, b_1, a_2, a_2, b_2, b_2, c_1, c_1, c_2, c_2)$$

Theo **Định lý Karamata**, ta có bất đẳng thức đúng.

Định lý được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Chúng ta có một ứng dụng của **Định lý 2** trong bài toán sau đây:

Bài toán 3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{27}(a+b+c)^3 \geq \frac{2}{81}((2a+b)^3 + (2b+a)^3 + (2b+c)^3 + (2c+b)^3 + (2a+c)^3 + (2c+a)^3)$$

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = x^3$ trên $(0, +\infty)$. Do $f'(x) = 6x > 0$ nên $f(x)$ lồi trên $(0, +\infty)$. Bất đẳng thức được viết lại như sau:

$$\begin{aligned} & f(a) + f(b) + f(c) + f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \\ & \geq \frac{2}{3} \left[f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{2b+a}{3}\right) + f\left(\frac{2b+c}{3}\right) + f\left(\frac{2c+b}{3}\right) + f\left(\frac{2a+c}{3}\right) + f\left(\frac{2c+a}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Từ đó, ta dễ dàng áp dụng **Định lý 2**, ta suy ra bất đẳng thức đúng.

Nhận xét.

Chúng ta có cách giải khác cho bài toán này dựa vào bất đẳng thức Muirhead và bất đẳng thức Schur 0.

Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{27} \left(28(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \sum_{\text{sym}} a^2b + 6abc \right) \geq \frac{2}{3 \cdot 27} \left(18(a^3 + b^3 + c^3) + 18 \sum_{\text{sym}} a^2b \right) \\ & \Leftrightarrow 16(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc \geq 9 \sum_{\text{sym}} a^2b \\ & \Leftrightarrow 7 \left(\sum_{\text{sym}} a^3 - \sum_{\text{sym}} a^2b \right) + 2 \left(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - \sum_{\text{sym}} a^2b \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức Muirhead và bất đẳng thức Schur, ta suy ra bất đẳng thức cuối cùng là đúng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Tri thức, 2006.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức: Định lý và áp dụng*, NXB Giáo dục, 2006.
- [3] Mitrinovic D. S., Pecaric J. E., Fink A. M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [4] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, Gil Publishing House, 2004.
- [5] Pachpatte B.G., *Mathematical Inequalities*, vol. 67, Elsevier, 2005.