HOÁN VỊ. CHỈNH HỢP. TỔ HỢP

1. Hoán vị

$P_n = n! = 1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n$ (số cách xắp xếp thứ tự n đối tượng khác nhau).

Ví dụ 1. *Rút gọn biểu thức*

$$A = \frac{6!}{m(m+1)} \cdot \frac{(m+1)!}{4!(m-1)!}.$$

Giải.

$$A = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{m(m+1)} \cdot \frac{(m-1)!m(m+1)}{4!(m-1)!} = 30.$$

Chú ý. $n! = (n-k)!(n-k+1)\cdots n.$

Ví dụ 2. *Rút gọn* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k!.$

Giải.

$$k\cdot k! = \Big[(k+1)-1\Big]{\cdot}k! = (k+1)! - k!$$
$$\Longrightarrow A_n = (2!-1!) + (3!-2!) + \cdots + ((n+1)!-n!) = (n+1)! - 1.$$

Ví dụ 3. Chứng minh $\dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} < 2.$

Giải.

$$\frac{1}{1!} = 1$$
$$\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4!} < \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Cộng vế

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2-\frac{1}{n!}<2.$$

Ví dụ 4. *Giải các pt*

a) $\dfrac{n!-(n-1)!}{(n+1)!}=\dfrac{1}{6},\qquad (1)$*($n$ nguyên dương).*

b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=72\quad \mathbf{(2)}$ *; n nguyên dương.*

Giải.

a) Ta có

$$(1) \iff \frac{n(n-1)!-(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!}=\frac{1}{6} \iff \frac{n-1}{(n+1)n}=\frac{1}{6}$$
$$\iff n^2-5n+6=0 \iff \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=3. \end{array}\right.$$

b) Ta có

$$(2) \iff \frac{(n+1)\cdot n\cdot (n-1)!}{(n-1)!}=72 \quad n \text{ nguyên dương}$$
$$\iff n^2+n-72=0 \iff \left[\begin{array}{l} n=-9 \text{ (loại)} \\ n=8. \end{array}\right.$$

Chỉnh hợp

E là một tập hợp gồm n phần tử.

Bộ r phần tử phân biệt, có kể thứ tự các phần tử của tập E $(1\le r\le n)$ được gọi là một chỉnh hợp n chập r.

Chú ý.

(i) Thứ tự.

(ii) $n=r \implies$ chỉnh hợp $\equiv$ hoán vị.

Công thức.

$$\boxed{A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.}$$

Chú ý.

$$A_n^n = P_n = n!$$
$$A_n^n = A_n^r \cdot A_{n-r}^{n-r},\ 1 \leq r \leq n.$$

Ví dụ 5. *Rút gọn* $A = \dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4},\ 6 < n \in \mathbb{R}.$

Giải.

$$\begin{aligned} A &= \frac{n(n-1)\cdots(n-5) + n(n-1)\cdots(n-4)}{n(n-1)\cdots(n-3)} \\ &= (n-4)(n-5) - (n-4) = (n-4)^2. \end{aligned}$$

Ví dụ 6. *Giải.*

$$\begin{aligned} M &= \frac{A_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} - \frac{A_{17}^{10} + A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}} \\ &= \frac{\dfrac{49!}{37!} + \dfrac{49!}{38!}}{\dfrac{49!}{39!}} - \frac{\dfrac{17!}{7!} + \dfrac{17!}{8!}}{\dfrac{17!}{9!}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 7. *Chứng minh* $A_{n+k}^{n+2} + A_{n+k}^{n+1} = k^2 \cdot A_{n+k}^n.$

Giải.

$$VT = \frac{(n+k)!}{(k-2)!}\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) = \frac{k(n+k)!}{(k-1)(k-2)!} = \frac{k^2(n+k)!}{k!} = k^2 \cdot A_{n+k}^n.$$

Ví dụ 8. *Tìm n nguyên dương biết rằng*

a) $A_n^3 = 20n.$

b) $A_n^5 = 18 \cdot A_{n-2}^4.$

Giải.

a) $A_n^3 = 20 \iff \dfrac{n!}{(n-3)!} = 20n \iff n^2 - 3n - 18 \overset{n\in\mathbb{Z}}{\iff} n = 6.$

b)

$$A_n^5 = 18A_{n-2}^4 \iff \frac{n!}{(n-5)!} = 18 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-6)!}$$
$$\iff n^2 - 19n + 90 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} n = 9 \\ n = 10. \end{array}\right.$$

Ví dụ 9. Tìm n nguyên dương biết $P_{n+3} = 720A_n^5 \cdot P_{n-5}$.

ĐS: n=7.

Tổ hợp E là một tập gồm n phần tử. Một tập con của E gồm r phần $(1 \le r \le n)$ được gọi là một tổ hợp chập r của n.

Công thức.

$$\boxed{C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.}$$

Chú ý.

(i)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Tập hợp}} \arrow[r, "\text{(xếp thứ tự)}"] \arrow[d, "\cup"] & \boxed{\text{hoán vị}} \arrow[d, "r=n"] \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{Tổ hợp}\\ \text{(tập con)}\end{array}} \arrow[r, "\text{(xếp thứ tự)}"] & \boxed{\text{chỉnh hợp}}
\end{tikzcd}$$

(ii) Quy ước $0! = 1 \implies C_n^0 = 1.$

(iii) $C_n^r = C_n^{n-r}, \quad C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}.$

Ví dụ 10. *Rút gọn biểu thức*

$$A = C_n^1 + 2 \cdot \frac{C_n^2}{C_n^1} + \cdots + n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}.$$

Giải.

$$
\begin{aligned}
&C_n^1 = n\\
&2\cdot\frac{C_n^2}{C_n^1} = 2\cdot\frac{\dfrac{n!}{2!(n-2)!}}{\dfrac{n!}{1!(n-1)!}} = n-1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = n\cdot\frac{1}{\dfrac{n!}{(n-1)!1!}} = 1.\\
&\Longrightarrow A = n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 11. *Chứng minh với các số* r, n *nguyên, không âm sao cho* $0 \le r \le n$, *ta có*

$$C_n^r = \frac{nC_{n-1}^{r-1}}{r}.$$

Giải.

$$\frac{nC_{n-1}^{r-1}}{r} = \frac{n}{r}\cdot\frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r.$$

Ví dụ 12. *Chứng minh với các số* r, n *nguyên, không âm sao cho* $0 \le r \le n$, *ta có*

$$nC_n^r = (r+1)C_n^{r+1} + rC_n^r.$$

Giải.

$$
\begin{aligned}
nC_n^r &= n\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!} = \big[(n-r)+r\big]\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}\\
&= (n-r)\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!} + r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}\\
&= (r+1)\cdot\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} + r\cdot\frac{n!}{r!(n-r)!}\\
&= (r+1)C_n^{r+1} + rC_n^r.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 13. *a) Chứng minh với các số r, n nguyên, không âm sao cho $0 \leq r \leq n$, ta có*

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \cdots + C_{r-1}^{r-1}.$$

b) Chứng minh với $k, n \in \mathbb{N},\ 3 \leq k \leq n$ ta có

$$C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k.$$

Giải.

a) $VP = (C_n^r - C_{n-1}^r) + (C_{n-1}^r - C_{n-2}^{n-1}) + \cdots + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r = VT.$

b)

$$\begin{aligned} VT &= \underbrace{C_n^k + C_n^{k-1}} + 2\big(\underbrace{C_n^{k-1} + C_n^{k-2}}\big) + \underbrace{C_n^{k-2} + C_n^{k-3}} \\ &= \cdots = C_{n+3}^k. \end{aligned}$$

Ví dụ 14. *Chứng minh với $0 \leq k \leq n$ và $k, n \in \mathbb{Z}$ ta luốn có*

$$C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n \leq \left(C_{2n}^n\right)^2.$$

Giải. Cố định n, xét dãy $u_k = C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n,\ 0 \leq k \in \mathbb{Z}$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại:

$$u_k \leq u_0,\ \forall k \in \mathbb{Z}, k \geq 0.$$

Chứng minh dãy $(u_k)_k$ đơn điệu giảm. Thật vậy

$$\begin{aligned} u_{k+1} < u_k &\iff \frac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)!} \cdot \frac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} < \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!} \cdot \frac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} \\ &\iff \frac{2n+k+1}{n+k+1} < \frac{2n-k}{n-k} \iff n + 2nk > 0 : \text{ đúng.} \end{aligned}$$

Suy ra

$$u_k \leq u_0 \text{ với } 0 \leq k \in \mathbb{Z} \iff C_{2n+k}^n \cdot C_{2n-k}^n \leq \left(C_{2n}^n\right)^2 : \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 15. *Tìm $k \in \mathbb{N}$ biết*

$$C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}.$$

HD: Điều kiện $k \in \mathbb{N}, k \leq 12$. Phương trình trở thành

$$k^2 - 12k + 32 = 0 \text{ có hai nghiệm } k = 4, k = 8.$$

Ví dụ 16. *Tìm các số $x \in \mathbb{Z}^+$ thoả m□n phương trình*

$$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x.$$

HD: Điều kiện $3 \leq x \in \mathbb{N} \quad (*)$

$VT = x^3$. Phương trình trở thành $x^3 - 9x^2 + 14x = 0 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} x = 7.$

Ví dụ 17. *Tìm k sao cho các số $C_7^k, C_7^{k+1}, C_7^{k+2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng.*

HD: Điều kiện $5 \geq k \in \mathbb{N}$.

$$C_7^k + C_7^{k+2} = 2C_7^{k+1} \iff k^2 - 5k + 4 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 4. \end{array}\right.$$

BÀI TẬP

1. *Chứng minh rằng với $k, n \in \mathbb{Z}, 2 \leq k \leq n$, ta có*
$$k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}.$$

2. *Chứng minh rằng với $k, n \in \mathbb{Z}, 4 \leq k \leq n$, ta có*
$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k.$$

3. *Giải bất phương trình* $\quad \dfrac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \dfrac{6}{x} \cdot C_x^3 + 10.$

   ĐS: $3 \leq x \leq 4.$

4. *Tìm $x, y \in \mathbb{Z}^+$ để* $\quad \dfrac{C_{x+1}^y}{6} = \dfrac{C_x^{y+1}}{5} = \dfrac{C_x^{y-1}}{2}.$

   ĐS: $\begin{cases} x = 8 \\ y = 3. \end{cases}$

5. *Tính* $A = \dfrac{A_5^2}{P_2} + \dfrac{A_{10}^5}{7P_5}$.

ĐS: *46.*

6. *Tính* $S = P_1A_2^1 + P_2A_3^2 + P_3A_4^3 + P_4A_5^4 - P_1P_2P_3P_4$.

ĐS: *2750.*

7. *Tính* $C = \left(\dfrac{P_5}{A_5^4} + \dfrac{P_4}{A_5^3} + \dfrac{P_3}{A_5^2} + \dfrac{P_1}{A_5^1}\right)A_5^2$.

ĐS: 42.

8. *Giải phương trình* $2A_x^2 + 50 = a_{2x}^2$.

ĐS: $x = \pm 5$.

9. *Tìm* n *sao cho* $P_{n+3} = 720 \cdot A_n^5 \cdot P_{n-5}$.

ĐS: $n = 7$.

10. *Tìm* n *sao cho* $A_n^3 + 3A_n^2 = \dfrac{1}{2}P_{n+1}$.

ĐS: $n = 4$.

11. *Giải các phương trình*

a) $A_x^2 = 2$.

ĐS: $x = 2$.

b) $3P_x = A_3^x$.

ĐS: $x = 1, x = 2$.

(*) c) $\dfrac{P_{n+5}}{P_{n-k}} = 240 \cdot A_{n+3}^{k+3}$.

ĐS: $0 \le k \le 11, n = 11$.

d) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$.

ĐS: $x = 4$.

e) $$\frac{P_{x+2}}{A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3} = 210.$$

ĐS: $x = 5.$

f) $$\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}.$$

ĐS $x = 2.$

12. Giải các phương trình

a) $$\frac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \frac{24}{23}.$$

ĐS: $x = 5.$

b) $$C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x.$$

ĐS: $x = 4.$

NHỊ THỨC NEWTON VÀ ỨNG DỤNG

I. NHỊ THỨC NEWTON

1 CÔNG THỨC NHỊ THỨC NEWTON

Với mọi cặp số a, b và mọi số nguyên $n > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i.\end{aligned} \qquad (1)$$

2 CÁC NHẬN XÉT VỀ CÔNG THỨC KHAI TRIỂN

1. Số các số hạng ở bên vế phải của công thức (1) bằng $n+1$, n là số mũ của nhị thức ở vế trái.

2. Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n.

3. Các hệ số của khai triển lần lượt là

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$$

với chú ý

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \; 0 \le k \le n.$$

4. $C_n^k = \dfrac{n-k+1}{k} \cdot C_n^{k-1}.$

3 MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT

3.1 Dạng 1

Thay $a = 1$ và $b = x$ vào (1), ta được

$$(1+x)^n \ = \ C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \qquad (2)$$

3.2 Dạng 2

Thay $a = 1$ và $b = -x$ vào (1), ta được

$$(1-x)^n \ = \ C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \cdots + (-1)^k C_n^k x^k + \cdots (-1)^n C_n^n x^n. \quad (3)$$

3.3 Một số hệ thức giữa các hệ số nhị thức

Thay $x = 1$ vào (2) ta được:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

Thay $x = 1$ vào (3) ta được:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

II. CÁC VÍ DỤ MỞ ĐẦU

1. *Thực hiện*

   a. Khai triển $(1+x)^{10}$.

   b. So sánh hai số $(1,1)^{10}$ và 2.

   Giải

   a. $(1+x)^{10} = 1 + 10x + 45x^2 + 120x^3 + 210x^4 + 252x^5 + 210x^6 + 120x^7 + 45x^8 + 10x^9 + x^{10}$.

   b. Với $x > 0$, ta có $(1+x)^{10} > 1 + 10x$. Do đó với $x = 0,1$ ta có

   $$(1,1)^{10} > 1 + 10 \cdot (0,1) = 2.$$

2. *Thực hiện khai triển* $(3x-4)^5$.

Giải

$$(3-4x)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i (3x)^{5-i}(-4)^i = 3^5C_5^0x^5 - 4{\cdot}3^4C_5^1x^4 + \cdots + (-4)^5C_5^5.$$

Có 6 số hạng, do tính chất của tổ hợp, chỉ cần tìm C_5^0, C_5^1, C_5^2.
Ta có $C_5^0 = 1, C_5^1 = 5, C_5^2 = 10$. Vậy

$$(3x-4)^5 = 243x^5 - 1620x^4 + 4320x^3 - 5760x^2 + 3840x - 1024.$$

3. *Tính giá trị của các biểu thức sau:*

a. $S_1 = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + \cdots + C_6^6$.

b. $S_2 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \cdots + 2^5C_5^5$.

Giải

a. Ta có ngay

$$S_1 = C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + \cdots + C_6^6 = 2^6 = 64.$$

b. Ta có

$$(1+x)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i x^i. \tag{1}$$

Thay $x = 2$ vào (1) ta được

$$S_2 = C_5^0 + 2C_5^1 + 2^2C_5^2 + \cdots + 2^5C_5^5 = 3^5 = 243.$$

4. *Tính giá trị của các biểu thức sau:*

a. $S_1 = 2^nC_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + \cdots + C_n^n$.

b. $S_2 = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + \cdots + C_n^n$.

Giải

Ta có

$$(2+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{n-i} \iff \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{n-i} = 3^n \qquad (1)$$

$$(2-1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{n-i}(-1)^i \iff \sum_{i=0}^{n} C_n^i 2^{n-i}(-1)^i = 1. \qquad (2)$$

Suy ra

- (1)+(2) ta được

$$S_1 = 2^n C_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + \cdots + C_n^n = \frac{3^n+1}{2}. \qquad (3)$$

- (1)-(2) ta được

$$S_2 = 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + \cdots + C_n^n = \frac{3^n-1}{2}. \qquad (4)$$

5. *Tính giá trị của biểu thức sau:*

$$S = C_{2002}^0 C_{2002}^{2001} + C_{2002}^1 C_{2002}^{2000} + \cdots + C_{2002}^k C_{2002}^{2001-k} + \cdots + C_{2002}^{2001} C_{1}^{0}$$ 2002

Giải

Ta xét

$$\begin{aligned} C_{2002}^k C_{2002}^{2001-k} &= \frac{2002!}{k!(2002-k)!} \cdot \frac{(2002-k)!}{(2001-k)!} = \frac{2002!}{k!(2001-k)!} \\ &= \frac{2002 \cdot 2001!}{k!(2001-k)!} = 2002 C_{2001}^k. \end{aligned}$$

Từ đó S được viết lại dưới dạng

$$S = 2002(C_{2001}^0 + C_{2001}^1 + \cdots + C_{2001}^{2001}) = 2002(1+1)^{2001} = 1001 \cdot 2^{2002}.$$

6. (ĐHBK 98). *Khai triển* $(3x-1)^{16}$. *Chứng minh rằng*

$$3^{16}C_{16}^0 - 3^{15}C_{16}^1 + \cdots + C_{16}^{16} = 2^{16}.$$

7. (ĐH khối D - 2002). *Tìm số nguyên dương* n *sao cho*

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n = 240.$$

8. (ĐH Đà Lạt 99). *Tính hệ số của* $x^{25}y^{10}$ *trong khai triển* $(x^3+xy)^{15}$.

9. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$1+4C_n^1+4^2C_n^2+\cdots+4^{n-1}C_n^{n-1}+4^nC_n^n=5^n.$$

Giải

Thay $x=4$ vào

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n.$$

10. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$C_n^0+C_n^2+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1},$$

với giả thiết $C_n^m=\begin{cases}0 & \text{nếu } m>n\\ \dfrac{n!}{m!(n-m)!} & \text{nếu } m\le n.\end{cases}$

Giải

Ta có

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n+\cdots \quad (1)$$

$$0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n\cdots \quad (2)$$

Suy ra

- $(1)+(2)$ ta được

$$2^n=2(C_n^0+C_n^2+\cdots)\iff C_n^0+C_n^2+\cdots=2^{n-1}. \quad (3)$$

- $(1)-(2)$ ta được

$$2^n=2(C_n^1+C_n^3+\cdots)\iff C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}. \quad (4)$$

11. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

a. $C_n^0-2C_n^1+2^2C_n^2-\cdots+(-1)^n\cdot 2^nC_n^n=(-1)^n.$

b. $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \cdots + (-1)^{k-1}kC_n^k + \cdots + (-1)^{n-1}nC_n^n.$

Giải

Với mọi x và với n là số nguyên dương, ta có

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \cdots + (-1)^k C_n^k x^k + \cdots + (-1)^n C_n^n x^n. \quad (1)$$

a. Thay $x = 2$ vào (1) ta được

$$(-1)^n = C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 - \cdots + (-1)^n \cdot 2^n C_n^n, \text{ đpcm.}$$

b. Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được

$$-n(1-x)^{n-1} = -C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + n(-1)^n C_n^n x^{n-1}. \quad (2)$$

Thay $x = 1$ vào (2) ta được

$$0 = -C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + n(-1)^n C_n^n$$
$$\iff C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \cdots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0, \text{ đpcm.}$$

12. *Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng*

a. (ĐHTCKT): $C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$

b. $2 \cdot 1C_n^2 + 3 \cdot 2C_n^3 + \cdots + n(n-1)C_n^n = n(n-1) \cdot 2^{n-2}.$

c. $(-1)^r C_r^r C_n^r + (-1)^{r+1} C_{r+1}^r C_n^{r+1} + \cdots + (-1)^n C_n^r C_n^n = 0$ với r nguyên dương và $r \leq n$.

Giải

Với mọi x và với n là số nguyên dương, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \quad (2)$$

a. Thay $x = 1$ vào (2), ta được

$$n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n, \text{ đpcm.}$$

b. Lấy đạo hàm theo x hai vế của (2), ta được

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2\cdot 1C_n^2 + 3\cdot 2C_n^3 x + \cdots + n(n-1)C_n^n x^{n-2}. \tag{3}$$

Thay $x = 1$ vào (3), ta được

$$n(n-1)\cdot 2^{n-2} = 2\cdot 1C_n^2 + 3\cdot 2C_n^3 + \cdots + n(n-1)C_n^n, \text{ đpcm.}$$

c. Lấy đạo hàm cấp r theo x hai vế của (1), ta được

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)(1+x)^{n-r} = \sum_{k=r}^{n} k(k-1)\cdots(k-r+1)C_n^k x^{k-r}. \tag{4}$$

Chia hai vế của (4) cho $r!$, ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(1+x)^{n-r}}{r!} \\
&= \sum_{k=r}^{n} \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{r!} C_n^k x^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{n} \frac{k!}{r!(k-r)!} C_n^k x^{k-r} \\
&= \sum_{k=r}^{n} C_k^r C_n^k x^{k-r}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Thay $x = -1$ vào (5), ta được

$$0 = \sum_{k=r}^{n} C_k^r C_n^k (-1)^{k-r} \iff \sum_{k=r}^{n} C_k^r C_n^k (-1)^k = 0, \text{ đpcm.}$$

13. *Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$C_n^2 + 2C_n^3 + \cdots + (n-1)C_n^n > (n-2)2^{n-1}.$$

Giải

Với mọi x và với n là số nguyên dương, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n. \quad (1)$$

Thay $x = 1$ vào (1), ta được

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C^{n-1n} + C_n^n. \quad (2)$$

Lấy đạo hàm theo x hai vế của (1), ta được

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}. \quad (3)$$

Thay $x = 1$ vào (3), ta được

$$n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n. \quad (4)$$

Lấy $(4) - (3)$, ta được

$$n \cdot 2^{n-1} - 2^n = -C_n^0 + C_n^2 + \cdots + (n-2)C_n^{n-1} + (n-1)C_n^n$$
$$\iff C_n^2 + 2C_n^3 + \cdots + (n-1)C_n^n = (n-2)2^{n-1} + 1 > (n-2)2^{n-1}.$$

14. *Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + n2^{n-1} \cdot C_n^n =$$
$$= 4 \cdot 4^{n-1} C_n^0 - (n-1) \cdot 4^{n-2} C_n^1 + (n-2) \cdot 4^{n-3} C_n^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n.$$

Giải

Ta có

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i.$$

Lấy đạo hàm hai vế ta có

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}.$$

Thay $x = 2$ vào, ta có

$$n \cdot 3^{n-1} = C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1} C_n^n. \quad (*)$$

Ngoài ra

$$(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n.$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta có

$$n(x-1)^{n-1} = n\cdot C_n^0 x^{n-1} - (n-1)C_n^1 x^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}.$$

Thay $x = 4$ vào, ta được

$$n\cdot 3^{n-1} = n4^{n-1}C_n^0 - (n-1)4^{n-2}C_n^1 + (n-2)4^{n-3}C_n^2 - \cdots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} \quad (**)$$

So sánh (*) và (**) ta có điều phải chứng minh.

15. *Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng*

a. (ĐHGTVT 2000):

$$C_n^0 + \frac{C_n^1}{1+1} + \frac{C_n^2}{1+2} + \cdots + \frac{C_n^k}{1+k} + \cdots + \frac{C_n^n}{1+n} = \frac{2^{n+1}-1}{1+n}.$$

b. $C_n^0 - \dfrac{C_n^1}{1+1} + \dfrac{C_n^2}{1+2} - \cdots + (-1)^n \cdot \dfrac{C_n^n}{1+n} = \dfrac{1}{1+n}.$

Hướng dẫn

Ta có

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được

$$\int_0^t (1+x)^n dx = \int_0^t \Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\Big) dx$$

$$\iff \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{1+n}\right]_0^t = \left.\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^t$$

$$\iff \frac{(1+t)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k+1} C_n^k}{k+1}.$$

Thay $t = 1$ ta được a.

Thay $t = -1$ ta được b.

16. Với n, k là các số nguyên dương và $1 \leq k \leq n$, chứng minh rằng

$$C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} - \cdots + (-1)^k C_n^k C_{n-k}^0 = 0.$$

Giải

Với mọi x và k là số nguyên dương, ta có

$$\begin{aligned} &(1+x)^k = C_k^0 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + \cdots + C_k^k x^k. \\ \Longleftrightarrow\ & C_n^k (1+x)^k = C_k^0 C_n^k + C_k^1 C_n^k x + C_k^2 C_n^k x^2 + \cdots + C_k^k C_n^k x^k. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} C_k^m \cdot C_n^k &= \frac{k!}{m!(k-m)!} \cdot \frac{k!}{n!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\ &= C_n^m \cdot C_{n-m}^{k-m}. \end{aligned}$$

Do đó (1) có dạng

$$C_n^k (1+x)^k = C_n^0 C_n^k + C_n^1 C_{n-1}^{k-1} x + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} x^2 + \cdots + C_n^k C_{n-k}^0 x^k. \quad (1)$$

Thay $x = -1$ vào (2), ta được

$$0 = C_n^0 C_n^k - C_n^1 C_{n-1}^{k-1} + C_n^2 C_{n-2}^{k-2} - \cdots + (-1)^k C_n^k C_{n-k}^0 = 0, \text{ đpcm.}$$

17. *Chứng minh rằng với các số m, n, p nguyên dương sao cho $p \leq n$ và $p \leq m$, ta có*

$$C_{n+m}^p = C_n^0 C_m^p + C_n^1 C_m^{p-1} + \cdots + C_n^{p-1} C_m^1 + C_n^p C_m^0.$$

Giải

Với mọi x và với m, n là các số nguyên dương, ta có

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^m. \tag{1}$$

Mặt khác

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m} C_{n+m}^p x^p. \tag{2}$$

và

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^m = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k = \sum_{p=0}^{n+m} \Big[\big(\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_m^{p-k} \big) x^p \Big]. \tag{3}$$

Do (1) nên các hệ số của $x^p, p = \overline{0, n+m}$ trong các khai triển (2) và (3) bằng nhau. Vậy

$$C_{n+m}^p = \sum_{k=0}^{p} C_n^k \cdot C_m^{p-k}, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét quan trọng

(a) Với $p = n = m$, ta được

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

(b) Với $p = r, N = n + m$, ta được

$$C_N^r = C_{N-m}^0 C_m^r + C_{N-m}^1 C_m^{r-1} + \cdots + C_{N-m}^{r-1} C_m^1 + C_{N-m}^r C_m^0.$$

(c) Bạn đọc hãy lấy ý tưởng trong bài tập trên áp dụng với khai triển

$$(1-x)^{n+m}.$$

Từ đó chứng minh rằng

$$(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + \cdots + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n \cdot C_{2n}^n.$$

18. *Tính tích phân*

$$\int_0^2 (1-x)^n dx.$$

Từ đó chứng minh rằng

$$2C_n^0 - 2^2\frac{1}{2}C_n^1 + 2^3\frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}2^{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}\left[1+(-1)^n\right].$$

Giải

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 (1-x)^n dx = -\int_0^2 (1-x)^n d(1-x) = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\Bigg]_0^2 \\ &= \frac{1}{n+1}\left[(-1)^n+1\right] \qquad (1) \end{aligned}$$

Với mọi x và với n là số nguyên dương, ta có

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k. \qquad (2)$$

Lấy tích phân theo x hai vế của (2), ta được

$$\begin{aligned} \int_0^2 (1-x)^n dx &= \int_0^2 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{x^{k+1}}{k+1}\Bigg]_0^2 \\ &= 2C_n^0 - 2^2\cdot\frac{1}{2}C_n^1 + 2^3\cdot\frac{1}{3}C_n^2 - \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\cdot 2^{n+1}\cdot C_n^n. \qquad (3) \end{aligned}$$

Từ (1) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

III. BÀI TẬP

1. (ĐH Mở 97). *Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$3^n\left[C_n^0 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{3^2}C_n^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n\right] = 2^n.$$

2. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$4^nC_n^0-4^{n-1}C_n^1+4^{n-2}C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\cdots+2^nC_n^n.$$

3. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{n}(C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n)<n!.$$

4. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$2C_n^0+\frac{2^2}{2}C_n^1+\frac{2^3}{3}C_n^2+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1}C_n^n=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$

5. (ĐHQGTPHCM Khối A 97).*Tính tích phân*

$$I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx,\ \text{với } n\in\mathbb{N}.$$

Từ đó suy ra

$$C_n^0-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}-\cdots+\frac{(-1)^nC_n^n}{2n+1}=\frac{2\cdot4\cdots2n}{3\cdot5\cdots(2n+1)}.$$

6. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$C_n^1\cdot3^{n-1}+2C_n^2\cdot3^{n-2}+\cdots+n\cdot C_n^n=n\cdot4^{n-1}.$$

7. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{4}C_n^1+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n=\frac{1}{2n+1}.$$

8. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$2^{n-1}C_n^1+2^{n-1}C_n^2+3\cdot2^{n-1}C_n^3+\cdots+n\cdot C_n^n=n3^{n-1}.$$

9. *Với* n *là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$\frac{1}{3}C_n^0+\frac{1}{6}C_n^1+\cdots+\frac{1}{3n+3}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}.$$

10. *Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng*

$$1 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + 2^nC_n^n = 3^n.$$

11. *Với n, k là các số nguyên dương, $k \leq n$. Chứng minh rằng*

$$C_{n+5}^k = C_5^0C_n^k + C_5^1C_n^{k-1} + \cdots + C_5^5C_n^{k-5}.$$

12. *Tính*

$$\int_0^1 x(1-x^2)dx.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \cdots + \frac{(-1)^nC_n^n}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}.$$

13. Tính

$$\int_0^1 x^2(1-x^3)dx.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \cdots + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}.$$

14. *Chứng minh rằng*

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}.$$

15. *Chứng minh rằng*

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

III. HỆ SỐ VÀ SỐ HẠNG TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC

1. *Các hệ số các hạng tử thứ 2, 3 và 4 trong khai triển $(a+b)^n$ lập thành cấp số cộng. Tìm các số hạng ấy.*

   Giải

   Ta có

   $$C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2 \iff n^2 - 9n + 14 = 0 \iff n = 7 \vee n = 2.$$

   (i) Nếu $n = 7$: các số hạng thứ 2, 3 và 4 lần lượt là $7a^6b, 21a^5b^2, 35a^4b^3$.

   (ii) Nếu $n = 2$: không có số hạng thứ tư, có thể xem là 0 nên các số hạng thứ 2, 3, 4 là $2ab, b^2, 0$.

2. *Tìm x sao cho trong khai triển $\left(\sqrt{2^x} + \dfrac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$ (n nguyên dương), các số hạng thứ 3 và thứ 5 có tổng bằng 135, còn các hệ số của ba số hạng cuối của khai triển đó có tổng bằng 22.*

   Giải

   Ta có

   $$\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\sqrt{2^x}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^k.$$

   Từ giả thiết ta có:

   $$C_n^{n-1} + C_n^{n-2} + C_n^n = 22 \iff n^2 + n - 42 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} n = 6 \\ n = -7 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

   Khi $n = 6$:

   $$C_6^2\left(\sqrt{2^x}\right)^4\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^2 + C_6^4\left(\sqrt{2^x}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^4 = 135$$

   $$\iff 2\cdot 2^x + 4\cdot 2^{-x} = 9 \iff \left[\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ 2^x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

3. *Giả sử trong khai triển nhị thức $\left(x^{\lg x} - 3\right)^n$, tổng các hệ số của ba số hạng cuối bằng 22. Số hạng giữa của khai triển có giá trị bằng -540000. Tính x.*

Giải

Điều kiện $x > 0$. Từ giả thiết ta suy ra $n = 6$. Lúc đó $\left(x^{\lg x} - 3\right)^6$ có số hạng giữa là $-C_6^3\left(x^{\lg x}\right)^3 \cdot 3^3$. Như vậy ta có phương trình

$$C_6^3\left(x^{\lg x}\right)^3 \cdot 3^3 = 540000 \iff \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = \dfrac{1}{10}. \end{array}\right.$$

4. *Xét khai triển $\left(\sqrt{2^{\lg(10-3^x)}} + \sqrt[5]{2^{(x-2)\lg 3}}\right)^m$ với các giả thiết hạng tử thứ 6 là 21, các hệ số thứ 2, 3, 4 của khai triển là các số hạng thứ nhất, ba, năm của một cấp số cộng. Tìm x^8.*

Giải

Từ giả thiết, ta có

$$2C_m^2 = C_m^1 + C_m^3,\ m \geq 3 \iff m^2 - 9m + 14 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} m = 7 \\ m = 3 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $m = 7$, hệ số của hạng tử thứ 6 là $a_6 = C_7^5 = 21$

$$\iff C_7^5 2^{(x-2)\lg 3 + \lg(10-3^x)} = 21,\ 10 - 3^x > 0$$

$$\iff (x-2)\lg 3 + \lg(10-3^x) = 0 \iff \lg 3^{x-2}(10-3^x) = 0$$

$$\iff 3^{x-2}(10-3^x) = 1 \iff (3^x)^2 - 10(3^x) + 9 = 0$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 9 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

5. *Trong khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$, hệ số số hạng thứ ba lớn hơn hế số số hạng thứ hai là 35. Tính số hạng không chứa x.*

Giải

Ta có

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k.$$

Từ giả thiết ta suy ra

$$C_n^2-C_n^1=35 \iff n^2-3n-70=0 \iff \left[\begin{array}{l} n=10 \\ n=-7 \text{ (loại).}\end{array}\right.$$

Vậy $n=10$. Số hạng $a_{k+1}=C_{10}^k x^{10-2k}$ không phụ thuộc x khi

$$10-2k=0 \iff k=5.$$

Vậy số hạng ấy là $C_{10}^5=252.$

6. *Tính các hệ số x^3 và x^2 trong khai triển* $(x+1)^5+(x-2)^7$.

Giải

Hệ số của x^2 trong khai triển $(1+x)^5$ là $C_5^2\cdot 1^3=C_5^2$.

Hệ số của x^3 trong khai triển $(1+x)^5$ là C_5^3.

Hệ số của x^2 trong khai triển $(x-2)^7$ là $C_7^2(-2)^5=-32C_7^2$.

Hệ số của x^3 trong khai triển $(x-2)^7$ là $C_7^3(-2)^4=16C_7^3$.

Vậy hệ số của x^2 trong khai triển là $(x+1)^5+(x-2)^7$ là $C_5^2-32C_7^2=-662$.

Vậy hệ số của x^3 trong khai triển là $(x+1)^5+(x-2)^7$ là $C_5^3+16C_7^3=570$.

7. *Khai triển và rút gọn đa thức*

$$P(x)=(1+x)^6+(1+x)^7+(1+x)^8+\cdots+(1+x)^{10}$$

được $P(x)=a_{10}x^{10}+a_9x^9+\cdots+a_0$. *Tính* a_8.

Giải.

a_8 là hệ số của số hạng chứa x^8. Ta có

- Hệ số của x^8 trong $(1+x)^8$ là C_8^8.
- Hệ số của x^8 trong $(1+x)^9$ là C_9^8.
- Hệ số của x^8 trong $(1+x)^{10}$ là C_{10}^8.

Vậy $a_8 = C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 = 55.$

8. *Cho*

$$P(x) = (1+x)+2(1+x)^2+\cdots+20(1+x)^{20} = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{20}x^{20}.$$

Tính a_{15}.

Giải.

Hệ số của x^{15} trong $(1+x)^{15}, (1+x)^{16}, \ldots, (1+x)^{20}$ lần lượt là

$$C_{15}^{15}, C_{16}^{15}, C_{17}^{15}, C_{18}^{15}, C_{19}^{15}, C_{20}^{15}.$$

Suy ra

$$a_{15} = 15C_{15}^{15} + 16C_{16}^{15} + 17C_{17}^{15} + 18C_{18}^{15} + 19C_{19}^{15} + 20C_{20}^{15} = 400995.$$

9. *Tìm số hạng không chứa x trong khai triển*

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17}, x \neq 0.$$

Giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3}\right)^{17} &= \sum_{k=0}^{17} C_{17}^k \left(x^{\frac{-2}{3}}\right)^{17-k} \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^k,\ 0 \le k \le 17, k \in \mathbb{Z}\\ &= \sum_{k=0}^{17} x^{\frac{17k}{12} - \frac{34}{3}}.\end{aligned}$$

Ta cần có $\dfrac{17k}{12} - \dfrac{34}{3} = 0 \iff k = 8$. Vậy số hạng không chứa x là C_{17}^{8}.

10. *Tìm số hạng không phụ thuộc x của khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{\frac{-28}{15}}\right)^n,\ x \neq 0$ biết rằng $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.*

Giải.

Từ giả thiết ta suy ra

$$n^2 + n - 156 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -13 \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

Với $n = 12$ ta có

$$\left(x\sqrt[3]{x} + x^{\frac{-28}{15}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{16 - \frac{48k}{15}}.$$

Ta cần có $16 - \dfrac{48k}{15} = 0 \iff k = 5$.

11. *Khai triển $P(x) = (1+2x)^{12}$ thành dạng*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{12}x^{12}.$$

Tìm $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\}$.

Giải.

Ta có $a_k = C_{12}^k \cdot 2^k$, lúc đó

$$\begin{aligned} & a_k < a_{k+1}, 0 \leq k \leq 11 \\ \iff & C_{12}^k \cdot 2^k < C_{12}^{k+1} \cdot 2^{k+1} \iff \frac{1}{12-k} < \frac{2}{k+1} \iff 0 \leq k \leq 7 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{cases} a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_8 \\ a_8 > a_9 > a_{10} > \cdots > a_{12}. \end{cases}$$

Suy ra

$$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\} = a_8 = 126720.$$

Bài tập.

(a) Tìm x trong khai triển $\left(x + x^{\ln x}\right)^5, x > 0$ biết số hạng thứ ba bằng $10e^5$.

(b) Tìm x để số hạng thứ sáu trong khai triển $\left(10^{\lg\sqrt{9^x+7}} + 10^{-\frac{1}{5}\lg(3^x+1)}\right)^7$ bằng 84.

12. *Tìm số hạng không chứa x, y trong $\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)^{12}$.*

Giải.

Ta có

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(\frac{x}{y}\right)^{12-k} \left(\frac{y}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k \left(\frac{x}{y}\right)^{12-2k}.$$

Ta cần có $12 - 2k = 0 \iff k = 6$. Vậy số hạng không chứa x, y là $C_{12}^6 = 924$.

13. *Tìm a, b, c, d sao cho $(2x-1)^{2000} - (ax+b)^{2000} = (x^+cx+d)^{1000}, \forall x \in \mathbb{R}$.*

Giải.

Với $x = \dfrac{1}{2}$, ta có

$$\left(\frac{a}{2} + b\right)^{2000} + \left(\frac{1}{4} + \frac{c}{2} + d\right)^{1000} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ 2c + 4d = -1. \end{cases}$$

Khi đó

$$(2x-1)^{2000} = (-2bx + b)^{2000} + (x^2 + cx + d)^{1000}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Suy ra hệ số của x^{2000} thoả mãn phương trình

$$2^{2000} = (2b)^{2000} + 1 \Longrightarrow b = \pm\frac{1}{2}\sqrt[2000]{2^{2000} - 1}.$$

Lúc đó

$$\begin{aligned}(1) &\iff (2x-1)^{2000}(1-b^{2000}) = (x^2+cx+d)^{1000}\\ &\iff (2x-1)^{2000}\cdot\frac{1}{2^{2000}} = (x^2+cx+d)^{1000}\\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = |x^2+cx+d| \iff \begin{cases} c=-1\\ d=\frac{1}{4}.\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $\begin{cases} a = \pm\sqrt[2000]{2^{2000}-1}\\ b = \mp\frac{1}{2}\sqrt[2000]{2^{2000}-1}\\ c=-1\\ d=\frac{1}{4}.\end{cases}$

14. *Tìm số hạng thứ năm trong khai triển*

$$\left(\frac{x^2}{y^2}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^n,\ x,y\neq 0, n\in\mathbb{N}^*$$

biết tổng các hệ số bằng 32768.

Giải.

Theo giả thiết ta có

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \iff 2^n = 32768 \iff n = 15.$$

Vậy số hạng thứ năm là $C_{15}^4\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{11}\left(\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}}\right)^4 = C_{15}^4\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{58}{3}} = 1365\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{58}{3}}.$

15. *Tìm n để trong khai triển nhị thức $(x^2+1)^n(x+2)^n$, hệ số của số hạng chứa x^{3n-3} bằng $26n$.*

Giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(x^2+1)^n(x+2)^n &= x^{3n}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^n\left(1+\frac{2}{x}\right)^n\\ &= x^{3n}\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i\left(\frac{1}{x^2}\right)^i\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{2}{x}\right)^k\right]\\ &= x^{3n}\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^{-2i}\sum_{k=0}^{n}C_n^k 2^k x^{-k}\right].\end{aligned}$$

Luỹ thừa của x là $3n-3$ khi $-2i-k=-3$ hay $2i+k=3$, tức là $\left[\begin{array}{l} i=0\\ k=3\end{array}\right.$ hoặc $\left[\begin{array}{l} i=1\\ k=1.\end{array}\right.$ Vậy hệ số của x^{3n-3} là $a_{3n-3}=C_n^0C_n^3 2^3+C_n^1C_n^1 2$. Do đó

$$a_{3n-3}=26n \iff \frac{2n(2n^2-3n+4)}{3}=26n \iff \left[\begin{array}{l} n=5\\ n=-\dfrac{7}{2}\ \text{(loại)}.\end{array}\right.$$

16. *Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức sau thành đa thức*

$$f(x)=(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7.$$

Giải.

Ta có

$$(2x+1)^n=C_n^0(2x)^n+C_n^1(2x)^{n-1}+\cdots+C_n^n.$$

Số hạng tổng quát là $a_{k+1}=C_n^k(2x)^{n-k}=2^{n-k}C_n^k\cdot x^{n-k}$. Ta cần $n-k=5$, tức là $k=n-5$.

Như vậy trong khai triển $(2x+1)^4$ không có x^5.

Hệ số x^5 trong khai triển của

- nhị thức $(2x+1)^5$ ứng với $k=5-5=0$ là $2^5C_5^0=2^5$,
- nhị thức $(2x+1)^6$ ứng với $k=6-5=1$ là $2^5C_6^1=6\cdot 2^5$,

- nhị thức $(2x+1)^7$ ứng với $k = 7-5 = 2$ là $2^5C_7^2 = 21 \cdot 2^5$. Vậy hệ số cần tìm là $2^5 + 6 \cdot 2^5 + 21 \cdot 2^5 = 28 \cdot 2^5 = 896.$

17. *Trong khai triển của* $\left(3x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^5$*, tìm hệ số của số hạng chứa* x^{10}*.*

    Giải.

    Ta có
    $$\left(3x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^5 = \sum_{k-0}^{5} C_5^k (3x^3)^{5-k}\left(-\frac{2}{x^2}\right)^k.$$

    Số hạng tổng quát là $a_{k+1} = (-1)^k \cdot C_5^k \cdot 3^{5-k} \cdot 2^k \cdot x^{15-5k}$. Ta cần có $15 - 5k = 10$, tức là $k = 1$. Vậy hệ số của x^{10} là $-C_5^1 3^4 2^1 = -810.$

18. *Tính hệ số của* $x^{25}y^{10}$ *trong khai triển* $(x^3 + xy)^{15}$*.*

    Giải.

    Số hạng tổng quát của khai triển $(x^3 + xy)^{15}$ là
    $$a_{k+1} = C_{15}^k (x^3)^{15-k}(xy)^k = C_{15}^k x^{45-2k} \cdot y^k, k \leq 15.$$

    Ta cần có $\begin{cases} 45 - 2k = 25 \\ k = 10 \end{cases} \iff k = 10.$

    Vậy hệ số cần tìm là $C_{15}^{10} = 3003.$

19. *Cho* a, b *dương và* n *là số nguyên dương. Xác định hạng tử có hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức* $(a+b)^n$*.*

    Giải.

    Ta có ba số hạng tổng quát liên tiếp là:
    $$T_k = C_n^{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}, \quad T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}b^k, \quad T_{k+2} = C_n^{k+1}a^{n-k-1}b^{k+1}.$$

$$(T_{k+1} \text{ lớn nhất }) \Longleftrightarrow \begin{cases} C_n^k \geq C_n^{k-1} \\ C_n^k \geq C_n^{k+1} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \geq \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \geq \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} n-k+1 \geq k \\ k+1 \geq n-k \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{n-1}{2} \leq k \leq \frac{n+1}{2} \tag{*}$$

Nếu n chẵn, tức là $n = 2m, m \in \mathbb{N}$ và $m \geq 1,$ ta có

$$(*) \iff m - \frac{1}{2} \leq k \leq m + \frac{1}{2} \implies k = m.$$

Vậy hạng tử phải tìm là $C_{2m}^m a^m b^m$ với $m = \dfrac{n}{2}$.

Nếu n lẻ, tức là $n = 2m+1$, ta có $(*) \iff m \leq k \leq m+1$. Như vậy có hai hạng tử thoả điều kiện này là $C_{2m+1}^m a^{m+1} b^m$ và $C_{2m+1}^{m+1} a^m b^{m+1}$ với $m = \dfrac{n-1}{2}$.

Vậy trong khai triển $(a+b)^n$ với $a > 0, b > 0$, hạng tử có hệ số lớn nhất là

$$\begin{cases} C_n^m a^m b^m & \text{nếu } n = 2m \\ C_n^m a^{m+1} b^m \text{ hoặc } C_n^{m+1} a^m b^{m+1} & \text{nếu } n = 2m+1. \end{cases}$$

áp dụng. *Từ 25 học sinh của một lớp, muốn lập những nhóm gồm p học sinh. Tìm giá trị của p để được số nhóm là lớn nhất. Tìm số nhóm đó.*

Giải.

Có 25 học sinh, chọn p em, số nhóm có thể thành lập là C_{25}^p.

Theo trên, ta có $n = 25$ lẻ với $k = 12$.

$$(C_{25}^p \text{ lớn nhất }) \iff p = k + 1 = 13.$$

Vậy $p = 13$, tức là số nhóm tối đa có thể lập được là $C_{25}^{13} = \dfrac{25!}{13!12!} = 5200300$.

20. *Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức $(x^2+1)^n$ bằng 1024, h□y tìm hệ số của số hạng chứa x^{12}.*

Giải.

Ta có

$$(x^2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2(n-k)}.$$

Cho $x = 1$ ta được $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Từ giả thiết ta suy ra $2^n = 1024$, tức là $n = 10$.

Số hạng tổng quát của khai triển là $a_{k+1} = C_n^k x^{2n-2k} = C_{10}^k x^{20-2k}$. Ta cần có $20 - 2k = 12$, tức là $k = 4$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{12} là $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!6!} = 210$.

21. *Trong khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + ^{-\frac{20}{15}}\right)^n$, h□y tìm số hạng không phụ thuộc x biết rằng $C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79$.*

Giải.

Điều kiện $n \geq 2$. Ta có

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79 \iff \left[\begin{array}{l} n = 12 \\ n = -13. \end{array}\right.$$

Như vậy $n = 12$. Số hạng tổng quát của khai triển $\left(x\sqrt[3]{x} + ^{-\frac{20}{15}}\right)^{12}$ là

$a_{k+1} = C_{12}^k \left(x\sqrt[3]{x}\right)^{12-k} \cdot \left(x^{-\frac{20}{15}}\right)^k = C_{12}^k \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{12-k} \cdot x^{-\frac{20k}{15}} = C_{12}^k x^{\frac{4(12-k)}{3} - \frac{20k}{15}}$.

Số hạng không phụ thuộc x ứng với

$$\frac{4(12-k)}{3} - \frac{20k}{15} = 0 \iff 20(12-k) - 20k = 0 \iff k = 6.$$

Vậy số hạng không phụ thuộc x là $a_7 = C_{12}^6 x^{\frac{4\cdot 6}{3} - \frac{120}{15}} = C_{12}^6$.

22. *Tìm hệ số của x^{31} trong khai triển của*

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40}.$$

23. *Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển*

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}.$$

24. *Khai triển* $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$ *. H□y tìm hệ số a_k lớn nhất.*

25. *Cho n là số nguyên dương thoả điều kiện $C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 55$. H□y tìm số hạng là số nguyên trong khai triển $\left(\sqrt[7]{8} + \sqrt[3]{5}\right)^n$.*

Giải.

Với $n \geq 2$ ta có

$$C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 55 \iff n + \frac{(n-1)n}{2} = 55 \iff n = 10.$$

Số hạng tổng quát của khai triển là $a_{k+1} = C_{10}^k 8^{\frac{10-k}{7}} \cdot 5^{\frac{k}{3}}$.

$$\left(a_{k+1} \text{ là số nguyên }\right) \iff \begin{cases} \dfrac{10-k}{7} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{k}{3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} (10-k) \vdots 7 \\ k \vdots 3 \\ k \leq 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} k = 3m \\ (10-3m) \vdots 7 \end{cases} \iff \begin{cases} m = 1 \\ k = 3. \end{cases}$$

Vậy số hạng nguyên trong khai triển là $a_4 = C_{10}^3 \cdot 8 \cdot 5 = 40 \cdot C_{10}^3 = 4800$.

26. *Xác định hệ số của x^3 trong khai triển $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$.*

Giải.

Ta có

$$(1+2x+3x^2)^{10} = C_{10}^0 + C_{10}^1 x(2+3x) + C_{10}^2 x^2(2+3x)^2 + \\ + C_{10}^3 x^3(2+3x)^3 + \cdots + C_{10}^{10} x^{10}(2+3x)^{10}.$$

Số hạng chứa x^3 chỉ có thể xuất hiện trong $C_{10}^2 x^2(2+3x)^2$ là $C_{10}^2 C_2^1 2 \cdot 3 \cdot x^3$ và $C_{10}^3 x^3(2+3x)^3$ là $C_{10}^3 C_3^0 2^3 \cdot x^3$.

Vậy hệ số của x^3 phải tìm là $6C_{10}^2 \cdot C_2^1 + 8C_{10}^3 \cdot C_3^0 = 1500.$

THỰC HIỆN CÁC BÀI TOÁN ĐẾM.

Ví dụ 1. Giả sử rằng một thương nhân định đi bán hàng tại tám thành phố. Chị ta bắt đầu cuộc hành trình của mình tại một thành phố nào đó, nhưng có thể đến bảy thành phố kia theo bất kỳ thứ tự nào mà chị ta muốn. Hỏi chị ta có thể đi qua tất cả các thành phố này theo bao nhiêu lộ trình khác nhau ?

Giải

Số lộ trình có thể giữa các thành phố bằng số hoán vị của bảy phần tử, vì thành phố đầu tiên đã được xác định, nhưng bảy thành phố còn lại có thể có thứ tự tùy ý. Do đó có:

$$7! = 5040 \text{ cách để người bán hàng chọn hành trình của mình}$$

Chú ý: Nếu muốn tìm lộ trình ngắn nhất thì chị ta phải tính tổng khoảng cách cho mỗi hành trình có thể, tức là tổng cộng phải tính cho 5040 hành tình.

Ví dụ 2. Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

a) Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E?

b) Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, trong đó các chữ số $3, 4, 5$ đứng cạnh nhau ?

c) Có bao nhiêu số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bắt đầu bằng 123?

Giải

a) Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt hình thành từ tập E ứng với chỉ một hoán vị của 7 phần tử của tập E, và ngược lại.

Vậy số các số phải tìm bằng

$$P_7 = 7! = 5040 \text{ số}$$

b) Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Các số $3, 4, 5$ đứng cạnh nhau theo thứ tự đó.

Giả sử $\alpha = (3, 4, 5)$ là bộ ba chữ số $3, 4, 5$ đứng cạnh nhau theo thứ tự đó.

Mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, trong đó các chữ số $3, 4, 5$ đứng cạnh nhau (theo thứ tự đó) ứng với chỉ một hoán vị của 5 phần tử của tập $F = \{1, 2, \alpha, 6, 7\}$, và ngược lại.

Vậy các số phải tìm bằng:

$$P_5 = 5! = 120 \text{ số}$$

Trường hợp 2: Các số $3, 4, 5$ đứng cạnh nhau theo thứ tự bất kỳ.

Ta biết rằng có $3!$ cách chọn các bộ 3 chữ số $(3, 4, 5)$ đứng cạnh nhau và theo thứ tự bất kỳ.

Vậy các số phải tìm bằng:

$$3!.P_5 = 720 \text{ số}$$

c) Mỗi số gồm 7 chữ số phana biệt, hình thành từ tập E, bắt đầu bằng 123, ứng với chỉ một hoán vị của 4 chữ số $(4, 5, 6, 7)$.

Vậy các số phải tìm bằng:

$$P_4 = 4! = 24 \text{ số}$$

Ví dụ 3.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn hình chữ U?

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn hình tròn ?

Giải

đặt $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ là tập hợp 4 người.

a) Với bàn hình chữ U, có thể phân biệt vị trí chỗ ngồi bằng cách đánh số thứ tự. Khi đó mỗi cách sắp xếp ứng với chỉ một bộ 4 phân tử của tập E.

Vậy số cách sắp xếp bằng:

$$P_4 = 4! = 24 \text{ cách}$$

b) Với một bàn tròn, người ta không phân biệt vị trí chỗ ngồi, có nghĩa là các kết quả chỉ do đổi chỗ vòng tròn, sẽ không coi là khác nhau. Ví dụ 4 cách sắp xếp sau đây được coi là một cách sắp xếp:

Thực hiện bài toán đếm

Ví dụ 1. Có bao nhiêu cách chọn bốn cầu thủ khác nhau trong mười cầu thủ của đội bóng quần vợt để chơi bốn trận đấu đơn, các trận đấu là có thứ tự ?

Giải

Mỗi cách chọn có thứ tự bốn cầu thủ của đội bóng là một chỉnh hợp chập bốn của mười phần tử. Ta có:

$$A_{10}^{4} = 5040 \text{ cách chọn}$$

Ví dụ 2. Giả sử rằng có tám vận động viên chạy thi. Người thắng sẽ nhận được huy chương vàng, người về thứ hai sẽ nhận được huy chương bạc, người về thứ ba sẽ nhận được huy chương đồng. Có bao nhiêu cách trao các huy chương này nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra ?

bf Giải

Số cách trao huy chương chính là số chỉnh hợp chập ba của tập hợp tám phần tử.

Vì thế có

$$P(8,3) = 8.7.6 = 336 \text{ cách trao huy chương}$$

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách tuyển 5 trong 10 cầu thủ của một đội bóng quần vợt để đi thi đấu tại một trường khác ?

Giải

đó chính là số tổ hợp chập 5 của 10 phân tử, do đó ta được

$$C_{10}^{5} = 252 \text{ cách}$$

Ví dụ 4. Cho 7 điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng.

a) Có bao nhiêu đường thẳng mà mỗi đường thẳng đi qua 2 trong 7 điểm nói trên ?

b) Có bao nhiêu tam giác với các đỉnh là 3 trong 7 điểm nói trên ?

Giải

a) Mỗi cặp điểm không kể thứ tự, trong 7 điểm đã cho xác định một đường thẳng và ngược lại.

Vậy số đường thẳng đi qua 2 trong 7 điểm nói trên bằng:

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{5.6.7}{1.2.3} = 35 \text{ tam giác}$$

Ví dụ 5.

a) Có bao nhiêu đường chéo trong một đa giác lồi n cạnh ?

b) Một đa giác lồi có bao nhiêu cạnh để số đường chéo bằng 35?

Giải

a) Ta có:

- Mỗi đa giác lồi n cạnh thì có n đỉnh.

- Mỗi đoạn thẳng nối 2 đỉnh bất kỳ, không kể thứ tự, thì hoặc là một cạnh, hoặc là một đường chéo của đa giác đó.

Vậy số đường chéo (ký hiệu là C_n) của đa giác n cạnh bằng:

$$C_n = C_n^2 - n$$

b) Với $C_n = 35$, ta được

$$C_n^2 - n = 35 \Longleftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \xleftrightarrow[n\geq 3]{n\in\mathbb{N}^+} n = 10.$$

Vậy đa giác lồi 10 cạnh sẽ có 35 đường chéo.

BÀI TOÁN ĐẾM

Đếm số các chữ số thỏa mãn tính chất k hình thành từ một tập

1. Phương pháp

Sử dụng:

* Mô phỏng số trong tập hợp số.
* Các định nghĩa hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.
* Các qui tắc đếm cơ bản.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Tìm số các só tự nhiên gồm 5 chữ số lấy từ 7 só trên sao cho:

a) Các chữ số đều khác nhau.

b) Chữ số đầu tiên là chữ số 3.

c) Không tận cùng bằng chữ số 4.

Giải

Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5},\ \text{với } a_1 \in E \text{ và } i = \overline{1,5}$$

a) Có thể tiếp cận theo một trong hai cách:

Cách 1: Thực hiện việc lựa chọn dần:

* a_1 được chọn từ tập E có 7 phần tử
$\Longrightarrow 7$ cách chọn

* a_2 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1\}$ có 6 phần tử
$\Longrightarrow 6$ cách chọn

* a_3 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1, a_2\}$ có 5 phần tử
$\Longrightarrow 5$ cách chọn

* a_4 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$ có 4 phần tử
$\Longrightarrow 4$ cách chọn

* a_5 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ có 3 phần tử
$\Longrightarrow 3$ cách chọn

Theo qui tắc nhân, số các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$$77.6.5.4.3 = 2520 \text{ số } .$$

Cách 2: Sử dụng định nghĩa chỉnh hợp

Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ E bằng

$$A_7^5 = 2520$$

b) Ta có:

* $a_1 = 3 \Longrightarrow$ có một cách chọn.

* a_2, a_3, a_4, a_5 để được chọn từ E do đó mỗi phần tử có 7 cách chọn.

Vậy, số các số tự nhiên gồm 5 chữ số bắt đầu bằng chữ số 3 hình thành từ E bằng

$$1.7.7.7.7 = 2402.$$

c) Ta có:

* $a_5 \in E \setminus \{4\} \Longrightarrow$ có 6 cách chọn.

* a_1, a_2, a_3, a_4 để được chọn từ E do đó mỗi phần tử có 7 cách chọn.

Vậy số các số tự nhiên gồm 5 chữ số bắt đầu bằng chữ số 3 hình thành từ E bằng

$$6.7.7.7.7 = 14406 \text{ số}$$

Ví dụ 2. Với 4 chữ số $1, 2, 3, 4$ có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số phân biệt.

Giải

Đặt $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

* Gọi A là tập các số có các chữ số khác nhau, hình thành từ E.

* Gọi $A_k, k = \overline{1, 4}$ là tập các số có k chữ số phân biệt, hình thành từ tập E. Ta có ngay:

$A_1 \subset A \& |A_1| = A_4^1$
$A_2 \subset A \& |A_2| = A_4^2$
$A_3 \subset A \& |A_3| = A_4^3$
$A_4 \subset A \& |A_4| = A_4^4$
$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

và các tập A_1, A_2, A_3, A_4 đôi một không giao nhau.

Theo qui tắc cộng:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + A_4^4 = 64 \text{ số}$$

Ví dụ 3. Với 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 5$ có thể bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt và là

a) Số lẻ.

b) Số chẵn.

Giải

Đặt $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}, \text{ với } a_1 \in E \text{ và } i = \overline{1,5}$$

a) Số α lẻ, ta có thể theo một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Thực hiện việc lựa chọn dần:

* a_5 được chọn từ tập $F = 1, 3, 5$

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn

* a_4 được chọn từ tập $E \backslash \{a_5\}$ có 4 phần tử

$\Longrightarrow$ có 4 cách chọn

* a_3 được chọn từ tập $E \backslash \{a_5, a_4\}$ có 3 phần tử

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn

* a_2 được chọn từ tập $E \backslash \{a_5, a_4, a_3\}$ có 2 phần tử

$\Longrightarrow$ có 2 cách chọn

* a_1 được chọn từ tập $E \backslash \{a_5, a_4, a_3, a_2\}$ có 1 phần tử

$\Longrightarrow$ có 1 cách chọn

Theo qui tắc nhân, số các số lẻ gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$$3.4.3.2.1 = 72 \text{ số }.$$

Cách 2: Sử kiến thức về hoán vị

* a_5 được chọn từ tập $E = \{1, 3, 5\}$

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn

* a_1, a_2, a_3, a_4 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E = \{a_5\}$ do đó nó là một hoán vị của 4 phần tử

$\Longrightarrow$ 4 cách chọn.

Theo qui tắc nhân, số các lẻ số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$$3.P_4 = 3.4! = 72 \text{ số }.$$

b) Tương tự câu a), ta được kết quả bằng 48 số.

Ví dụ 4. Với tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt và

a) Là số chẵn.

b) Trong đó có chữ số 7 và chữ số hàng ngàn luôn là chữ số 1.

Giải

Một số 5 chữ số được ký hiệu

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5},\ \text{với } a_1 \in E \text{ và } i = \overline{1,5}$$

a) Số α chẵn, ta có thể theo một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Thực hiện việc lựa chọn dần:

* a_5 được chọn từ tập $F = 2, 4, 6$

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn

* a_4 được chọn từ tập $E\backslash\{a_5\}$ có 6 phần tử

$\Longrightarrow$ có 6 cách chọn

* a_3 được chọn từ tập $E\backslash\{a_5, a_4\}$ có 5 phần tử

$\Longrightarrow$ có 5 cách chọn

* a_2 được chọn từ tập $E\backslash\{a_5, a_4, a_3\}$ có 4 phần tử

$\Longrightarrow$ có 4 cách chọn

* a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{a_5, a_4, a_3, a_2\}$ có 3 phần tử

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn

Theo qui tắc nhân, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$$3.6.5.4.3 = 72 \text{ số}\ .$$

Cách 2: Sử kiến thức về hoán vị

* a_5 được chọn từ tập $F = \{2, 4, 6\}$

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn

* a_1, a_2, a_3, a_4 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E = \{a_5\}$ do đó nó là một chỉnh hợp chập 4

$\Longrightarrow$ có A_6^4 cách chọn.

Theo qui tắc nhân, số các chẵn số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$$3.A_6^4 = 1080 \text{ số}\ .$$

b) Muốn số α có chữ số 7, ta có thể tiến hành theo hai bước sau:

Bước 1: Chọn một vị trí trong 5 vị trí của các chữ số, để đặt chữ số 7

$\Longrightarrow$ có 5 cách chọn.

Bước 2: Bốn vị trí còn lại nhận giá trị là bộ một phân biệt thứ tự được chọn từ $E \setminus \{7\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 6 chập 4

$\Longrightarrow$ có A_6^4 cách chọn.

Vậy, số các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, trong đó có chữ số 7 bằng:

$$5.A_6^4 = 1800 \text{ số } .$$

c) Muốn số α có chữ số 7 và hcữ số hàng ngàn là chữ số 1, ta có thể tiến hành theo hai bước sau:

Bước 1: Gán $a_1 = 1 \Longrightarrow$ có 1 cách chọn.

Bước 2: Chọn 1 vị trí trong 4 vị trí của các chữ số, để đặt chữ số 7

$\Longrightarrow$ có 4 cách chọn.

Bước 3: Ba vị trí còn lại nhận giá trị là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E \setminus \{7, 1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 5 chập 3

$\Longrightarrow$ có A_5^3 cách chọn.

Vậy, số các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, trong đó có chữ số 7 và chữ số hàng ngàn là chữ số 1,bằng:

$$1.4.A_5^3 = 240 \text{ số } .$$

Ví dụ 5. (ĐHQG TPHCM Khối A99): Với 5 chữ số $1, 2, 3, 4, 5$. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số:

a) Phân biệt.

b) Không bắt đầu bằng chữ số 1.

c) Không bắt đầu bằng 123

Giải

Đặt $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Gọi A là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E

Ta có ngay, mỗi số thuộc A ứng với chỉ một hoán vị 5 chữ số của tập E và ngược lại, vì vậy

$$|A| = P_5 = 5! = 120 \text{ số}$$

b) Với tập A như câu a).

Gọi A_1 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 1, suy ra:

* $A_1 \subset A$.

* $|A_1| = P_4 = 4! = 24$ số.

Gọi A_2 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ E, và không bắt đầu bằng chữ số 1, suy ra:

* $A_12 \subset A$.

* $A = A_1 \cup A_2$ và $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Theo qui tắc cộng

$$|A| = |A_1| + |A_2| \Longleftrightarrow |A_2| = |A| - |A_1| = 120 - 24 = 96 \text{ số}$$

c) Với tập A như câu a)

Gọi B_1 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ E, và không bắt đầu bằng chữ số 123, suy ra:

* $B_1 \subset A$.

* $A = B_1 \cup B_2$ và $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Theo qui tắc cộng:

$$|A| = |B_1| + |B_2| \Longleftrightarrow |B_2| = |A| - |B_1| = 120 - 2 = 118 \text{ số}$$

Ví dụ 6. Với 5 chữ số $1, 2, 5, 7, 8$. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 3 chữ số phân biệt và thỏa mãn điều kiện:

a) Là một số hcẵn.

b) Là một số nhỏ hơn hoặc bằng 278

c) Là một số chẵn và nhỏ hơn hoặc bằng 278

Giải

Đặt $E = \{1, 2, 5, 7, 8\}$.

Một số 3 chữ số được ký hiệu

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3}, \text{ với } a_1 \in E \text{ và } i = \overline{1, 3}$$

a) Số α chẵn, ta có

* a_3 được chọn từ tập $F = 2, 8$

$\Longrightarrow$ có 2 cách chọn

* a_1, a_2 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E \setminus \{a_3\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 4 chập 2

$\Longrightarrow$ có A_4^2 cách chọn

Theo qui tắc nhân, số các chẵn số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$$2.A_4^3 = 24 \text{ số } .$$

b) Số α nhỏ hơn hoặc bằng 278, ta có $a_1 \in \{1, 2\}$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: * Nếu $a_1 = 1$

$\Longrightarrow$ có 1 cách chọn.

* a_2, a_3 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E \setminus \{1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 4 chập 2

Vậy, trong trường hợp này ta nhận được:

$$1.A_4^2 = 12 \text{ số}$$

Trường hợp 2: Nếu $a_1 = 2$.

$\Longrightarrow$ có 1 cách chọn.

* a_2 chọn từ tập $F = E \setminus \{2, 8\}$

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn.

* a_3 chọn từ tập $F = E \setminus \{2, a_2\}$

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này ta nhận được:

$$1.3.3 = 9 \text{ số}$$

Vậy, số các số gồm 3 chữ số phân biệt nhỏ hơn 278, hình thành từ tập E, bằng:

$$12 + 9 = 21 \text{ số}$$

Cách 2: Ta có:

* Gọi B_1 là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và nhỏ hơn hoặc bằng chữ 278.

* Gọi B_2 là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và nhỏ hơn hoặc bằng chữ số 1, suy ra

$$B_1 \subset B \& |B_1| = A_4^2 = 12$$

* Gọi B là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và nhỏ hơn hoặc bằng chữ số 2, suy ra

$$B_2 \subset B \& |B_2| = A_4^2 = 12$$

* Gọi B là tập các số gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và nhỏ hơn hoặc bằng 28, suy ra $B_3 \subset B_2 \&$ các phân tử thuộc B_3 là $281, 285, 287.$

Ta có

$$B = B_1 \cup (B_2 \setminus B_3) \& B_1 \cap (B_2 \setminus B_3) = \emptyset.$$

Theo qui tắc cộng:

$$|B| = |B_1| + |B_2 \setminus B_3| = |B_1| + |B_2| - |B_3| = 21 \text{số}$$

c) Số α là số chẵn nhỏ hơn hoặc bằng $278,$ ta có $a_1 \in \{1, 2\} \& a_3 \in \{2, 8\}$. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_1 = 1$

$\Longrightarrow$ có 1 cách chọn.

* a_3 được chọn từ tập $F = \{2, 8\}$

$\Longrightarrow$ có 2 cách chọn.

* a_2 được chọn từ tập $G = E \setminus \{1, a_3\}$

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn.

Vậy trong trường hợp này ta nhận được

$$1.2.3 = 6 \text{ số}$$

Trường hợp 2: Nếu $a_1 = 2$

$\Longrightarrow$ có 1 cách chọn.

* $a_2 = 8$ có 1 cách chọn

* a_3 được chọn từ tập $F = \{2, 8\}$

$\Longrightarrow$ có 3 cách chọn.

Vậy trong trường hợp này ta nhận được

$$1.1.3 = 3 \text{ số}$$

Vậy, số các số gồm 3 chữ số phân biệt nhỏ hơn 278, hình thành từ tập E, bằng

$$6 + 3 = 9 \text{ số}$$

Cách 2: Ta có

* Gọi C là tập các số chẵn gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và nhỏ hơn hoặc bằng 278.

* Gọi $C_{1,2}$ là tập các số chẵn gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 1, và tận cùng bằng chữ số 2, suy ra

$$C_{1,2} \subset C \& |C_{1,2}| = 3.$$

* Gọi $C_{1,2}$ là tập các số chẵn gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 1, và tận cùng bằng chữ số 8, suy ra

$$C_{1,8} \subset C \& |C_{1,8}| = 3.$$

* Gọi $C_{2,8}$ là tập các số chẵn gồm 3 chữ số phân biệt, hình thành từ E, và bắt đầu bằng chữ số 2, và tận cùng bằng chữ số 8, suy ra

$$C_{2,8} \subset C \& |C_{2,8}| = 3.$$

Ta có

$$C = C_{1,2} \cup C_{1,8} \cap C_{2,8} \text{ và } C_{1,2}, C_{1,8}, C_{28} \text{ đôi một không giao nhau.}$$

Theo qui tắc cộng:

$$|C| = |C_{1,2} + |B_{1,8}| + |C_{2,8}| = 9 \text{ số}$$

Chú ý: Chứng ta đều biết rằng một số:

$$\alpha = \overline{a_1 a_2 ...,}$$

chỉ có nghĩa khi $a_1 \neq 0$.

Do đó trong trường hợp $0 \in E$ chứng ta cần xét các trường hợp riêng.

Ví dụ 7. Với 10 chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ có thể lập được bao nhiêu số có 5 chữ số phân biệt.

Giải

Đặt $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1. Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}, \text{ với } a_1 \in E, i = \overline{1,5} \text{ và } a_1 \neq 0$$

Ta có:

* a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0\}$

$\Longrightarrow$ Có 9 cách chọn.

* a_2, a_3, a_4, a_5 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{a_1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 9 chập 4

$\Longrightarrow$ Có A_9^4 cách chọn.

Vậy, số các só gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$$9.A_9^4 = 27216 \text{ số}$$

Cách 2: Ta có

* Gọi A là tập các số có 5 chữ số khác nhau, hình thành từ tập E, suy ra:

$$|A| = A_{10}^5.$$

* Gọi A_1 là tập các số có 5 chữ số khác nhau, hình thành từ tập E, bắt đầu bằng chữ số 0,suy ra:

$$A_1 \subset A \& |A_1| = A_9^4$$

* Gọi A_1 là tập các số có 5 chữ số khác nhau, hình thành từ tập E, bắt đầu bằng chữ số 0,suy ra:

$$A = A_1 \cup A_2 \& A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Theo qui tắc cộng:

$$|A| = |A_1| + |A_2| \Longrightarrow |A_2| = |A| - |A_1| = A_{10}^5 - A_9^4 = 27216 \text{ số}$$

Ví dụ 8. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau.

Giải.

Đặt $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5},\ \text{với } a_1 \in E, i = \overline{1,5} \text{ và } a_1 \neq 0$$

Ta có:

* a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0\} \Longrightarrow$ Có 9 cách chọn.
* a_2 được chọn từ tập $E\backslash\{a_1\} \Longrightarrow$ Có 9 cách chọn.
* a_3 được chọn từ tập $E\backslash\{a_2\} \Longrightarrow$ Có 9 cách chọn.
* a_4 được chọn từ tập $E\backslash\{a_3\} \Longrightarrow$ Có 9 cách chọn.
* a_5 được chọn từ tập $E\backslash\{a_4\} \Longrightarrow$ Có 9 cách chọn.

Vậy, số các số thỏa mãn điều kiện đầu bài, bằng:

$$9.9.9.9.9 = 59049 \text{ số}$$

Ví dụ 9. Với các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ta có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số 1 có mặt 3 lần, còn mỗi số khác nhau có mặt đúng một lần.

Giải

Bộ $(0, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5)$ sẽ tạo ra được các số có 8 chữ số dạng:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8},\ \text{với } a_1 \neq 0$$

từ đó suy ra:

* a_1 có 7 cách chọn.

* $a_2, ..., a_8$ là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ 7 chữ số còn lại do đó nó là một hoán vị của 7 phần tử, nhưng vì có 3 số 1 nên sẽ bị lặp lại $3!$ lần

$\Longrightarrow$ Có $\dfrac{7!}{3!}$ cách chọn.

Vậy, số các số thỏa mãn điều kiện đầu bài, bằng:

$$7.\frac{7!}{3!} = 5880 \text{ số}$$

Ví dụ 10. Với tập $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ có thể lập được bao nhiêu

a) Số gồm 5 chữ số phân biệt.

b) Số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt.

c) Số gồm 5 chữ số phân biệt, trong đó có chữ số 0.

Giải

Một số 5 chữ số được ký hiệu:

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5},\ \text{với } a_1 \in E, i = \overline{1,5} \text{ và } a_1 \neq 0$$

a) Ta có:

* a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0\}$

$\Longrightarrow$ Có 5 cách chọn.

* a_2, a_3, a_4, a_5 là bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{a_1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 5 chập 4

$\Longrightarrow$ Có A_5^4 cách chọn.

Vậy, số các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng:

$$5.A_5^4 = 600 \text{ số}$$

b) Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_5 = 0$

$\Longrightarrow$ Có 1 cách chọn.

Khi đó, a_1, a_2, a_3, a_4 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{0\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 5 chập 5

$\Longrightarrow$ Có A_5^4 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$$1.A_5^4 = 120 \text{ số}$$

Trường hợp 2: Nếu a_5 được chọn từ tập $\{2, 4\}$

$\Longrightarrow$ Có 2 cách chọn.

* a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0, a_5\}$

$\Longrightarrow$ Có 4 cách chọn.

* a_1, a_3, a_4 là một bộ phận thứ tự được chọn từ $E\backslash\{a_1, a_5\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 4 chập 3

$\Longrightarrow$ Có A_4^3 cách chọn.

Vậy trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$$2.4.A_4^3 = 192 \text{ số}$$

Vậy, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng

$$120 + 192 = 312 \text{ số}$$

c) Ta có lập luận:

* Gọi B là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập E. Theo a) ta có:

$$|B| = 600$$

* Gọi B_1 là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt hình thành từ tập E, trong đó không có chữ số 0, suy ra

$$B_1 \subset B \& |B_1| = P_5 = 5! = 120 \text{ số}$$

Khi đó $\overline{B_1} = B \setminus B_1$ là tập các số gồm 5 chữ số khác nhau, hình thành từ tập E, trong đó có chữ số 0. Ta được:

$$|\overline{B_1}| = |B \setminus B_1| = |B| - |B_1| = 480 \text{ số.}$$

Ví dụ 11. Cho tập hợp $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ E trong mỗi trường hợp sau:

a) Là số chẵn.

b) Một trong 3 chữ số đầu tiên phải băng 1.

Giải

Một số 5 chữ số được ký hiệu

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}, \text{ với } a_1 \in E, i = \overline{1,5} \text{ và } a_1 \neq 0$$

a) Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $a_5 = 0$

$\Longrightarrow$ Có 1 cách chọn.

* a_1, a_2, a_3, a_4 là bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E \backslash \{0\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 7 chập 4

$\Longrightarrow$ Có A_7^4 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được

$$1.A_7^4 = 840 \text{ số}$$

Trường hợp 2: Nếu a_5 được chọn từ tập $\{2, 4, 6\}$

$\Longrightarrow$ Có 3 cách chọn.

* a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0, a_5\}$

$\Longrightarrow$ Có 6 cách chọn.

* a_2, a_3, a_4 là một bộ phận thứ tự được chọn từ $E\backslash\{a_1, a_5\}$ đo đó nó là một chỉnh hợp 6 chập 3

$\Longrightarrow$ Có A_6^3 cách chọn.

Vậy trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$$3.6.A_6^3 = 2160 \text{ số}$$

Vậy, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, bằng

$$840 + 2160 = 3000 \text{ số}$$

b) Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $a_1 = 0$

$\Longrightarrow$ Có 1 cách chọn.

* a_2, a_3, a_4, a_5 là bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 7 chập 4

$\Longrightarrow$ Có A_7^4 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được

$$1.A_7^4 = 840 \text{ số}$$

Trường hợp 2: Nếu $a_2 = 1$ hoặc $a_3 = 1$

$\Longrightarrow$ Có 2 cách chọn.

* a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0, 1\}$

$\Longrightarrow$ Có 6 cách chọn.

* a_3, a_4, a_5 (hoặc a_1, a_4, a_5) là một bộ phận thứ tự phân biệt được chọn từ $E\backslash\{a_1, a_2\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 6 chập 3

$\Longrightarrow$ Có A_6^3 cách chọn.

Vậy trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$$2.6.A_6^3 = 1440 \text{ số}$$

Vậy, số các số thỏa mãn đầu bài, bằng

$$840 + 1440 = 2280 \text{ số}$$

Ví dụ 12. Từ sáu chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số chia hết cho 5.

Giải

Đặt $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Một số 4 chữ số được ký hiệu

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4},\ \text{với } a_1 \in E, i = \overline{1,4} \text{ và } a_1 \neq 0$$

Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $a_5 = 0 \Longrightarrow$ Có 1 cách chọn.

* a_1, a_2, a_3, a_4 là bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{1\}$ do đó nó là một chỉnh hợp 5 chập 4

$\Longrightarrow$ Có A_5^4 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được

$$1.A_5^4 = 120 \text{ số}$$

Trường hợp 2: Nếu $a_5 = 0 \Longrightarrow$ Có 1 cách chọn.

* a_1 được chọn từ tập $E\backslash\{0, 5\}$

$\Longrightarrow$ Có 4 cách chọn.

* a_2, a_3, a_4 là một bộ phận thứ tự được chọn từ $E\backslash\{5, a_1\}$ đo đó nó là một chỉnh hợp 4 chập 3

$\Longrightarrow$ Có A_4^3 cách chọn.

Vậy trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$$1.4.A_4^3 = 96 \text{ số}$$

Vậy, số các số thỏa mãn điều kiện đầu bài hình thành từ E bằng:

$$120 + 96 = 216 \text{ số}$$

Ví dụ 13. Cho tập các chữ số $E = \{1, 2, ..., n\}$. Có thể lập được bao nhiêu số gồm n chữ số phân biệt sao cho các chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau ?

Giải

Ta có lập luận:

* Gọi A là tập các số gồm n chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, suy ra

$$|A| = P_n = n!$$

* Gọi B là tập các số gồm n chữ số phân biệt sao cho các chữ số 1 và 2 đùng cạnh nhau. Để tính $|B|$ ta tiến hành theo hai bước sau:

* Bước 1: Chọn một bộ $n-1$ phần tử từ tập $F = \{\alpha, 3, 4, ..., n\}$, trong đó $\alpha = (1, 2)$

$\Longrightarrow$ Có P_{n-1} cách chọn.

* Bước 2: Chọn một hoán vị các phần tử của α

$\Longrightarrow$ Có P_2 cách chọn.

Vậy,

$$|B| = P_{n-1}.P_2 = 2.(n-1)!$$

Ta có

$\overline{B} = A \backslash B$ là tập các số gồm n chữ số phân biệt sao cho các chữ số 1 và 2 đúng cạnh nhau. Ta được:

$$|\overline{B}| = |A \backslash B| = |A| - |B| = n! - 2,(n-1)! = (n-2).(n-1)! \text{ cách}$$

Ví dụ 14. Với 5 chữ số $, 1, 2, 3, 4, 5$. Có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số phân biệt và thỏa mãn điều kiện:

a) Mỗi số nhỏ hơn 40000

b) Mỗi số nhỏ hơn 45000.

Giải

Đặt $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Một số 5 chữ số được ký hiệu

$$\alpha = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5},\ \text{với } a_1 \in E, i = \overline{1,5} \text{ và } a_1 \neq 0$$

a) Ta có thể lựa chọn hai cách trình bày sau:

Cách 1: Ta có:

* Vì α nhỏ hơn 40000 nên $a_1 \in \{1, 2, \}$

$\Longrightarrow$ Có 3 cách chọn.

* a_2, a_3, a_4, a_5 là một bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E\backslash\{a_1\}$ do đó nó là một hoán vị của 4 phần tử

$\Longrightarrow$ Có P_4 cách chọn.

Vậy,các số gồm 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 40000, hình thành từ tập E, bằng:

$$3.P_4 = 360 \text{ số}$$

Cách 2: Gọi A là tập các số gồm 5 chữ số phân biệt, hình thành từ E và mỗi số nhỏ hơn 40000

* Gọi A_1 là tập các số có 5 chữ số khác nhau, hình thành từ tập E, và bắt đầu bằng chữ số 1, suy ra:

$$A_1 \subset A \& |A_1| = P_4 = 24.$$

* Gọi A_2 là tập các số có 5 chữ số khác nhau, hình thành từ tập E, bắt đầu bằng chữ số 2,suy ra:

$$A_2 \subset A \& |A_2| = P_4 = 24$$

* Gọi A_3 là tập các số có 5 chữ số khác nhau, hình thành từ tập E, bắt đầu bằng chữ số 3,suy ra:

$$A_3 \subset A \& |A_3| = P_4 = 24$$

Ta có:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \& A_1, A_2, A_3 \text{ đôi một không giao nhau}$$

Theo qui tắc cộng

www.VNMATH.com

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 3.24 = 72 \text{ số}$$

b) Vì α nhỏ hơn 45000 nên $a_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a_1 \in \{1, 2, 3\}$

$\Longrightarrow$ Có 3 cách chọn.

* a_2, a_3, a_4 là bộ phân biệt thứ tự được chọn từ $E \backslash \{a_1\}$ do đó nó là một hoán vị của 4 phần tử

$\Longrightarrow$ Có P_4 cách chọn.

Vậy, trong trường hợp này chúng ta nhận được

$$3.P_4 = 72 \text{ số}$$

Trường hợp 2: Nếu $a_1 = 4 \Longrightarrow$ Có 1 cách chọn.

* $a_2 \in \{1, 2, 2\} \Longrightarrow$ Có 3 cách chọn.

* a_3, a_4, a_5 là một bộ phận thứ tự được chọn từ $E \backslash \{a_1, a_2\}$ đo đó nó là một hoán vị của 3 phần tử

$\Longrightarrow$ Có P_3 cách chọn.

Vậy trong trường hợp này chúng ta nhận được:

$$1.3.6.P_3 = 18 \text{ số}$$

Vậy, số các số chẵn gồm 5 chữ số phân biệt nhỏ hơn 45000, hình thành từ tập E, bằng

$$72 + 18 = 90 \text{ số}$$

Ví dụ 15. Có bao nhiêu số nguyên, dương với các chữ số phân biệt, nhỏ hơn 10000?

Giải

Đặt $E = \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$

Gọi A là tập các số gồm các chữ số phân biệt, hình thành từ tập E, nhỏ hơn 10000.

Gọi $A_k, k = \overline{1, 4}$ là tập các số có k chữ số phân biệt, hình thành từ tập E.

Ta có

* $A_k \subset A$.

* Mỗi số thuộc $A_k, k = \overline{1,4}$ ứng với một chỉnh hợp 10 chập k các phần tử của E, trong đó chữ số đứng đầu khác 0, suy ra:

$$|A_k| = A_{10}^k - A_9^{k-1} = \frac{9(10-1)!}{(10-k)!}$$

từ đó

$|A_1| = 9,$

$|A_2| = 81,$

$A_3| = 648,$

$A_4| = 4536.$

Ta có:

$$A = YA_k(k = \overline{1,4}) \& A_k, k = \overline{1,4} \text{ đôi một không giao nhau}$$

Theo qui tắc cộng:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 5274 \text{ số}$$

Chú ý: Trong lời giải trên ta đã sử dụng công thức tính:

$$A_n^k - A_{n-1}^{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!} - \frac{(n-1)!}{(n-k)!} = \frac{(n-1)(n-1)!}{(n-k)!}$$

Tất nhiên, chúng ta có thể không cần sử dụng tới công thức trên.

II. Đếm số phương án.

1. Phương pháp

Sử dụng phương pháp mô hình hóa cùng các qui tắc đếm cơ bản.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem ấy lên 3 bì thư đã chọn. Một bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy ?

Giải

Ta có ngay:

* C_5^3 cách chọn tem thư.

* C_6^3 cách chọn bì thư.

* $3!$ cách dán tem. do đó, số cách làm bằng

$$C_5^3.C_6^3.3!$$

Ví dụ 2. Một ban chấp hành thanh niên có 11 người, trong đó có 7 nam và 4 nữ. Người ta muốn chọn một ban thường trực 3 người, trong đó phải có ít nhất một nữ. Có bao nhiêu cách chọn ban thường trực ?

Giải

* Gọi A là tập các cách chọn ban thường trực, suy ra

$$|A| = C_{11}^3.$$

* Gọi B là tập các cách chọn ban thường trực không có nữ, suy ra

$$|B| = C_7^3$$

Ta có $\overline{B} = A\backslash B$ là tập các cách thành ban thường trực 3 người, trong đó phải có ít nhất một nữ. Ta được:

$$|\overline{B}| = |A\backslash B| = |A| - |B| = 130 \text{ cách}$$

Ví dụ 3. Trong 100 vé số có 2 vé trũng thưởng. Nếu mua 12 vé số thì có bao nhiêu trường hợp:

a) Không vé nào trúng thưởng ?

b) Có ít nhất 1 vé trúng thưởng ?

c) Có đúng 1 vé trúng thưởng ?

Giải

Trong 100 vé số có 2 vé trúng thưởng còn 98 vé không trúng thưởng.

Gọi A là tập các bộ 12 vé số trong bộ 12 vé số trong bộ 100 chiếc, suy ra

$$|A| = C_{100}^{12}$$

b) Ta có $\overline{a_1} = A\backslash A_1$ là tập các bộ vé trúng htưởng. Ta được:

$$|\overline{A_1}| = |A\backslash A_1| = |A| - |A_1| = C_{100}^{12} - C_{98}^{12}.$$

c) Số các bộ 12 vé, có đúng một vé trúng thưởng bằng:

$$C_2^1.C_{98}^{11}.$$

Ví dụ 4. Người ta muốn thành lập một tổ công tác gồm 3 nữ và 4 nam, 3 nữ có thể chọn trong 10 nữ, còn 4 nam có thể chọn trong 7 nam, trong đó có anh Bình và chị An.

a) Có bao nhiêu cách lập tổ ?

b) Có bao nhiêu cách lập tổ mà anh Bình và chị An không ở trong cùng một tổ?

Giải

a) Muốn thành lập tổ công tác, có thể tiến hành theo hai bước sau:

Bước 1: Chọn 3 nữ trong 10 nữ

$\Longrightarrow$ Có C_{10}^3 cách chọn.

Bước 2: Chọn 3 nam trong 7 nam

$\Longrightarrow$ Có C_7^4 cách chọn.

Vậy số cách chọn tổ bằng

$$C_{10}^3.C_7^4 = 4200 \text{ cách}$$

b) Gọi A là số cách thành lập tổ, ta có:

$$|A| = 42000$$

Gọi B là tập các cách thành lập tổ mà nah Bình và chị An ở cùng một tổ, suy ra $B \subset A$. Muốn tính $|B|$ ta tiến hành theo hai bước sau:

Bước 1: Chọn 2 nữ trong 9 nữ (vì đã có chị An)

$\Longrightarrow$ Có C_9^2 cách chọn.

Bước 2: Chọn 3 nam trong 6 nam (vì đã có anh Bình)

$\Longrightarrow$ Có C_6^3 cách chọn.

Vậy

$$|B| = C_9^2.C_6^3 = 720 \text{ cách}$$

Ta có $\overline{B} = A \backslash B$ là tập các cách thành lập tổ mà anh Bình và chị An không ở cùng một tổ. Ta được

$$|\overline{B}| = |A \backslash B| = |A| - |B| = 3480 \text{ cách}$$

Ví dụ 5. Trong một hộp chứa 100 sản phẩm có 90 sản phẩm đạt yêu cầu và 10 sản phẩm chưa đạt yêu cầu. Hãy lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 10 sản phẩm.

a) Có bao nhiêu kết quả khác nhau ?

b) Có bao nhiêu bộ 10 sản phẩm trong đó có 8 sản phẩm đạt yêu cầu ?

Giải

a) Số bộ 10 sản phẩm khác nhau là

$$C_{100}^{10}$$

b) Số bộ 10 sản phẩm trong đó có 8 sản phẩm đạt yêu cầu là

$$C_{90}^{8}.C_{10}^{2}.$$

Ví dụ 6. Người ta muốn phân loại một thế hệ thanh niên theo giới tính (nam hoặc nữ), theo tình trạng hôn nhân (đã lập gia đình hoặc chưa lập gia đình), và theo nghề nghiệp (17 nghề nghiệp trong xã hội). Có bao nhiêu cách phân loại khác nhau ?

Giải

Mỗi cách phân loại ứng với bộ ba pần tử (x,y_j,z_k), trong đó:

* x_i là phần tử của tập $E = \{\text{ nam và nữ }\}$

* y_j là phần tử của tập $F = \{\text{ đã lập gia đình, chưa lập gia đình}\}$

* z_k là phần tử của tập K, gồm 17 phần tử về nghệ nghiệp trong xã hội.

Vậy, mỗi bộ (x_i, y_j, z_k) là phần tử của tích Đềcác $E \times F \times K$.

Vậy số cách phân loại bằng:

$$|E \times F \times K| = |E| \times |F| \times |K| = 2.2.17 = 68 \text{ cách}$$

Ví dụ 7. Gieo một con xúc xắc 6 mặt k lần

a) Có bao nhiêu kết quả khác nhau ?

b) Có bao nhiêu kết quả, trong đó 1 điểm không lần nào xuất hiện ?

Giải

Đặt $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ là tập các số điểm trên 6 mặt xúc xắc.

a) Một kết quả của k lần giao con xúc xắc ứng với một bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ có k phần tử, trong đó $\alpha_i \in E, i = \overline{1, k}, \alpha_i$ chỉ số điểm trên mặt xúc xắc ở lần gieo thứ i.

Vậy, mỗi bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ có k là phần tử của tích Đềcác $\underbrace{E_{1_{4\times 2...4\times 3}}E}_{n \text{ lần}} =$

$E^{(k)}$

Vậy số cách phân loại bằng:

$$|E^{(k)}| = |E|^k = 6^k \text{ cách}$$

b) Một kết quả của k lần gieo con xúc xắc, trong đó mặt 1 điểm không lần nào xuất hiện, ứng với một bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ có k phần tử, trong đó $\alpha_i \in E_1 = E \setminus \{1\}, i = \overline{1, k}, \alpha_i$ chỉ số điểm trên mặt xúc xắc ở lần gieo thứ i.

Vậy mỗi bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ là phần tử của tích Đềcác $\underbrace{E_{1_{4\times 2...4\times 3}}E_1}_{n \text{ lần}} =$

$E^{(k)} = E_1^{(k)}$

Vậy số cách phân loại bằng

$$|E_1^{(k)}| = |E_1|^k = 5^k \text{ cách}$$

3. Các bài toán chọn lọc

Bài 1 (ĐH Thái Nguyên 99). Có 12 chiếc bánh ngọt khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp chúng vào 6 chiếc hộp giống nhau. , mỗi chiếc hộp có 2 chiếc bánh.

Kết quả: $C_{12}^2 = 66 \qquad C_{66}^6 = 9085768.$

Bài 2 (ĐHSP Vinh 99). Một ôổ sinh viên có 20 em trong đó có 8 em chỉ biết tiếng Anh, 7 em chỉ biết tiếng Pháp, 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp, 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm.

Kết quả: $C_8^3.C_7^4.C_5^2 = 19600$ cách.

Bài 3 (ĐHYK 98). Một chi đoàn có 20 đoàn viên trong đó 10 nữ. Tôt công tác có 5 người. Có bao nhiêu cách chọn nếu tổ cần ít nhất 1 nữ.