

Chuyên đề:

Đa thức hệ số nguyên

Email : david_black_rose@yahoo.com.

Người thực hiện :

1)Trần Quốc Sang

2)Nguyễn Xuân Đào

3)Phạm Hồng Mỹ Hạnh

4)Nguyễn Nhật Tân

...Lời giới thiệu: Toán học là một ngành khoa học mà hàng triệu con người đam mê theo đuổi. Đại số là một trong ba nhánh lớn của cây đại thụ toán học. Mà trên đó, đa thức là một cảnh quan trọng. Đa thức nói chung và đa thức hệ số nguyên nói riêng có những tính chất lí thú đẹp đẽ và nhiều ứng dụng.

Chuyên đề này chúng tôi trình bày về đa thức hệ số nguyên. Kiến thức trong chuyên đề này là những gì đơn giản và rất dễ hiểu. Nội dung bao gồm các định nghĩa, định lí và bài tập được trình bày cụ thể như sau :

I) Kiến thức cần nhớ.

II) Bài toán ví dụ.

III) Bài tập áp dụng.

Các bạn đam mê toán học đặc biệt là về đa thức có thể xem đây là tài liệu bổ ích để tham khảo. Dù đã nỗ lực hết sức nhưng không thể tránh được những sai sót. Nhóm chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các bạn.

I) Kiến thức cần nhớ :

1) Khái niệm :

- Nếu đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ có các hệ số $a_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{0, n}$ thì ta nói $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên.
- Ta kí hiệu tập hợp các đa thức hệ số nguyên là $\mathbb{Z}[x]$.

2) Các định lý :

- **Định lý 1:** Nếu đa thức $f(x)$ có nghiệm nguyên $x = \alpha$ thì $f(x) = (x - \alpha).g(x)$ với $g(x)$ là đa thức hệ số nguyên.

- **Định lý 2:** Cho $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Z}; i = \overline{0, 1, 2, \dots, n})$$

a, b là hai số nguyên khác nhau. Khi đó $f(a) - f(b) : (a - b)$.

Chứng minh:

$$\text{Ta có: } f(a) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0$$

$$f(b) = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

$$\text{Suy ra: } f(a) - f(b) = a_n (a^n - b^n) + a_{n-1} (a^{n-1} - b^{n-1}) + \dots + a_1 (a - b)$$

$$\text{Vì } a^k - b^k : (a - b), \forall k \in \mathbb{Z} \text{ nên } f(a) - f(b) : (a - b) \text{ (đpcm).}$$

- **Định lý 3:** Cho đa thức hệ số nguyên $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0$. Nếu $x = \frac{p}{q}, (p, q) = 1, q \neq 0$ là nghiệm của $f(x)$ thì $p | a_0$ và $q | a_n$.

Chứng minh:

Giả sử phân số tối giản $\frac{p}{q}$ là nghiệm của đa thức $f(x)$. Khi đó ta có :

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 q^{n-1}) \quad (1)$$

Và

$$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $a_n p^n$ chia hết q mà $(p^n, q) = 1$ nên a_n chia hết q .

Từ (2) suy ra $a_0 q^n$ chia hết p mà $(p^n, q) = 1$ nên a_0 chia hết p . Suy ra đpcm.

II) Bài tập ví dụ :

1) Dạng 1: Bài toán liên quan đến tính chia hết:

Bài toán 1: [Vĩnh Long_2010] Tồn tại hay không một đa thức với hệ số nguyên mà $f(26) = 1931$ và $f(3) = 1995$?

Giải

Giả sử tồn tại một đa thức với hệ số nguyên thỏa điều kiện đề bài.

Ta luôn có : $f(26) - f(3) : (26 - 3) = 23$

Nhưng $f(26) - f(3) = 1931 - 1995 = -64 \not\vdots 23$.

Do đó không tồn tại đa thức hệ số nguyên thỏa mãn đề bài (đpcm).

Bài toán 2: Cho $f(x), g(x)$ là hai đa thức với hệ số nguyên thỏa điều kiện $F(x) = f(x^3) + xg(x^3)$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$. Chứng minh rằng $f(x), g(x)$ cùng chia hết cho $(x - 1)$.

Giải

Ta có: $F(x) = [f(x^3) - f(1)] + x[g(x^3) - g(1)] + f(1) + xg(1)$ (2.1)

$$\begin{aligned} f(x^3) - f(1) &= (x^3 - 1) : (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) \\ g(x^3) - g(1) &= (x^3 - 1) : (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Theo giả thiết, $F(x) : x^2 + x + 1$ nên từ (2.1) suy ra $f(1) + xg(1) : x^2 + x + 1$. Mà $f(1) + xg(1)$ có bậc bé hơn hoặc bằng 1 nên $f(1) + xg(1) \equiv 0 \Rightarrow f(1) = g(1) = 0$. Theo định lý Bezout suy ra $f(x) : (x - 1)$ và $g(x) : (x - 1)$.

➤ Nhận xét : Để hai đa thức $f(x), g(x)$ cùng chia hết cho $x - 1$, theo định lý Bezout thì ta cần chứng minh $x_0 = 1$ là nghiệm của $f(x)$ và $g(x)$, tức là $f(1) = g(1) = 0$. Một cách tự nhiên ta thêm bớt $f(1), g(1)$ vào và áp dụng định lý 2 để đi đến kết quả.

Bài toán 3 : Cho hai đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và $g(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$ có hệ số a, b, c, d nguyên và d không chia hết cho 5. Giả sử $f(m)$ chia hết cho 5, $m \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng có thể tìm được $n, n \in \mathbb{Z}$, sao cho $g(n)$ chia hết cho 5.

Giải

Ta có:

$$f(m) = am^3 + bm^2 + cm + d : 5 \text{ và } d \not\vdots 5 \Rightarrow m \not\vdots 5$$

Do đó tồn tại số nguyên n sao cho $mn \equiv 1 \pmod{5}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } n^3 f(m) - g(n) &= n^3(am^3 + bm^2 + cm + d) - (dn^3 + cn^2 + bn + a) \\ &= a(m^3n^3 - 1) + bn(m^2n^2 - 1) + cn^2(mn - 1) : (mn - 1) \\ &\Rightarrow g(n) : (mn - 1) : 5 \end{aligned}$$

Vậy số nguyên n thỏa $mn \equiv 1 \pmod{5}$ thì $g(n) : 5$.

➤ Nhận xét : Ta có: $f(m) - g(n) = am^3 + bm^2 + cm + d - (dn^3 + cn^2 + bn + a)$. Ta cần làm mất hệ số tự do (a hoặc d) để xuất hiện nhân tử chung. Nhân $f(m)$ với n^3 rồi trừ cho $g(n)$, ta có $n^3 f(m) - g(n) : mn - 1$. Lại có $m \not\equiv 5$ nên tồn tại số nguyên n để $mn \equiv 1 \pmod{5}$. Từ đó đi đến đpcm.

Bài toán 4 : Cho đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên, chia hết cho 3 khi x lấy các giá trị nguyên $k, k+1, k+2$. Chứng minh rằng:

$$P(m) : 3, \forall m \in \mathbb{Z}$$

Giải

Với hai số nguyên m và n phân biệt ta có:

$$P(m) - P(n) : (m - n)$$

Ta có:

Các số $P(m) - P(k), P(m) - P(k+1)$ và $P(m) - P(k+2)$ theo thứ tự chia hết cho

$m - k, m - (k+1), m - (k+2)$ với mọi $m \notin \{k, k+1, k+2\}$. Vì $m - k, m - (k+1), m - (k+2)$ là ba số nguyên liên tiếp nên trong đó có một số chia hết cho 3.

Do đó một trong các số $P(m) - P(k), P(m) - P(k+1)$ và $P(m) - P(k+2)$ có một số chia hết cho 3. Mặt khác, theo giả thiết, các số $P(k), P(k+1), P(k+2)$ đều chia hết cho 3.

Vậy :

$$P(m) : 3, \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 5: Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện:

$$P(x^3) + xQ(x^3) : x^2 + x + 1.$$

Gọi d là UCLN của hai số $P(2007)$ và $Q(2007)$. Chứng minh rằng $d : 2006$.

Giải

Ta có

$$P(x^3) + xQ(x^3) = [P(x^3) - P(1)] + x[Q(x^3) - Q(1)] + xQ(1) + P(1) \quad (5.1)$$

$$\text{Rõ ràng } P(x^3) - P(1) : x^3 - 1 : x^2 + x + 1 \quad (5.2)$$

$$Q(x^3) - Q(1) : x^3 - 1 : x^2 + x + 1 \quad (5.3)$$

Từ (5.1), (5.2), (5.3) và từ giả thiết suy ra

$$xQ(1) + P(1) : x^2 + x + 1 \quad (5.4)$$

Ta có $\deg[xQ(1) + P(1)] \leq 1$, $\deg(x^2 + x + 1) = 2$, vì thế từ (5.4) suy ra $xQ(1) + P(1) \equiv 0$, hay

$$P(1) = Q(1) = 0.$$

Vì $x=1$ là nghiệm của $P(x)$ và $Q(x)$ nên $\begin{cases} P(x) = (x-1).R_1(x) \\ Q(x) = (x-1).R_2(x) \end{cases}$ với $R_1(x)$ và $R_2(x)$ là hai đa thức hệ số nguyên. Thay $x=2007$ ta có

$$\begin{cases} P(2007) = (2006).R_1(2007) \\ Q(2007) = (2006).R_2(2007) \end{cases} \quad (5.5)$$

Do $R_1(2007)$ và $R_2(2007)$ là các số nguyên nên từ (5.5) suy ra $P(2007):2006$ và $Q(2007):2006$. Điều đó chứng tỏ rằng

$$d = (P(2007), Q(2007)):2006 \quad (\text{đpcm}).$$

➤ Nhận xét: Tương tự bài toán 2, ta thêm bớt $P(1)$, $Q(1)$ vào để áp dụng định lý 2. Ngoài ra, bài toán trên còn có áp dụng định lý 1 để được $R_1(x)$ và $R_2(x)$ là hai đa thức hệ số nguyên. Đây là một bài toán khá hay có áp dụng nhiều định lý.

Bài toán 6: Cho đa thức $P(x)$ bậc 4 có các hệ số nguyên và $P(x)$ chia hết cho 7 với mọi x nguyên. Chứng minh rằng các hệ số của đa thức $P(x)$ đều chia hết cho 7.

Giải

Xem đa thức : $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, với $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$.

Ta có : $P(x):7 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Do đó:

$$P(0):7 \Rightarrow e:7 \quad (6.1)$$

$$P(1) = a + b + c + d + e:7 \quad (6.2)$$

$$P(-1) = a - b + c - d + e:7 \quad (6.3)$$

$$\Rightarrow P(1) + P(-1) = 2a + 2c:7 \Rightarrow a + c:7 \quad (6.4)$$

$$\Rightarrow P(1) - P(-1) = 2b + 2d:7 \Rightarrow b + d:7 \quad (6.5)$$

$$P(2) = 16a + 8b + 4c + 2d + e:7$$

$$\Rightarrow 2a + b + 4c + 2d:7$$

$$\Rightarrow 2c + d:7 \quad (6.6)$$

$$P(-2) = 16a - 8b + 4c - 2d + e:7$$

$$\Rightarrow P(2) + P(-2) = 32a + 8c + 2e:7 \Rightarrow 4a + c:7 \quad (6.7)$$

$$\text{Mà } a + c:7$$

$$\text{Do đó: } 3a:7 \Rightarrow a:7 \quad (6.8)$$

$$\text{Từ (6.4) và (6.8)} \Rightarrow c:7 \quad (6.9)$$

$$\text{Từ (6.6) và (6.9)} \stackrel{(6.5)}{\Rightarrow} d:7 \Rightarrow b:7$$

Vậy: Các hệ số a, b, c, d, e thỏa yêu cầu của bài toán.

➤ Nhận xét:

1) Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn 4 thì kết luận của bài toán không đúng nữa.

Chẳng hạn:

$$Q(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+7) : 7, \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } H(x) = x^7 - x : 7, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

2) Vậy nếu bậc của $P(x)$ bé hơn 4 thì kết luận đó có đúng không? Câu trả lời là có. Khi $\deg P(x) = 1, 2, 3, 4$, $P(x) : 7$ với mọi x nguyên luôn luôn kéo theo các hệ số của $P(x)$ chia hết cho 7.

3) Số 7 là số nguyên tố. Nếu ta thay 7 bởi một số nguyên tố khác thì sẽ có được kết quả gì? Cho số nguyên tố p lớn hơn hoặc bằng 5 và đa thức:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in \mathbb{Z}[x], f(x) : p, \forall x \in \mathbb{Z}$$

thì $a, b, c, d, e : p$

Ta sẽ xét bài toán này ở phần bài tập rèn luyện.

2) Dạng 2: Bài toán xác định đa thức:

Bài toán 1: Tìm a, b sao cho đa thức $P(x) = x^3 + 8x^2 + 5x + a$ chia hết cho đa thức $x^2 + 3x + b$.

Giải

Viết lại đa thức $P(x)$ dưới dạng sau:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + 8x^2 + 5x + a \\ &= x(x^2 + 3x + b) + 5(x^2 + 3x + b) - (b + 10)x + a - 5b \\ &= (x^2 + 3x + b)(x + 5) - (b + 10)x + a - 5b. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Vì $P(x) : x^2 + 3x + b$ và $(x^2 + 3x + b)(x + 5) : x^2 + 3x + b$ nên từ (1.1) suy ra đa thức bậc nhất $R(x) = -(b + 10)x + a - 5b$ chia hết cho đa thức $Q(x) = x^2 + 3x + b$.

Do $\deg Q(x) = 2$, còn $\deg R(x) \leq 1$, nên từ $R(x) : Q(x)$ suy ra $R(x) \equiv 0$, hay:

$$\begin{cases} b + 10 = 0 \\ a - 5b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -10 \\ a = -50 \end{cases}$$

Vậy hai đa thức cần tìm là: $P(x) = x^3 + 8x^2 + 5x - 50$ và $Q(x) = x^2 + 3x - 10$.

➤ Nhận xét:

1) Bài toán trên sử dụng tính chất về bậc của đa thức để có được $R(x) \equiv 0$.

2) $P(x)$ là đa thức có bậc nhỏ ($\deg P = 3$) nên ta có thể giải bài toán này bằng phương pháp đồng nhất hệ số. Giả sử $P(x) = (x^2 + 3x + b)(x + c)$. Qua các bước nhân, rút gọn rồi đồng nhất hệ số ta vẫn được $a = -50, b = -10 (c = 5)$.

Bài toán 2: Tìm đa thức $f(x)$ không đồng nhất 0 với hệ số nguyên nhận số $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Giải

Ta có $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

$$\begin{aligned}
 a^3 &= 6 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} \\
 &= 6 + 6(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \\
 &= 6 + 6a
 \end{aligned}$$

$$\text{hay } a^3 - 6a - 6 = 0.$$

Rõ ràng a là nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 6x - 6$. Vậy $f(x)$ là đa thức cần tìm.

➤ Nhận xét:

1) Ta lập phương số a để làm mất căn. Việc lũy thừa số a có thể phải thực hiện nhiều lần. Ở bài toán sau ta sẽ dùng phương pháp khác.

2) Ta có thể mở rộng thành bài toán xác định một số a là số vô tỉ hay số hữu tỉ. Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập một đa thức với hệ số nguyên nhận $x = a$ làm nghiệm.

Bước 2: Chứng minh rằng hoặc là đa thức tìm được không có nghiệm nguyên, hoặc là trong số tất cả các nghiệm nguyên có thể có của đa thức không có nghiệm nào bằng a .

Ví dụ: Số $a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ hay hữu tỉ?

Giải. Theo bài toán 2 ta có a là nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 6x - 6$.

Theo định lý 3, nếu $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó phải thuộc tập hợp $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$

Bằng cách thử trực tiếp ta thấy $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ không phải là nghiệm của đa thức $f(x)$. Do a là nghiệm của $f(x)$ nên a là số vô tỉ.

Ta sẽ xét những bài toán tương tự ở phần bài tập rèn luyện.



Bài toán 3: Hãy tìm đa thức không đồng nhất 0 với hệ số nguyên nhận số $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.

Giải

Đa thức $Q(x) = x - \sqrt{2} - \sqrt[3]{3}$ nhận $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ là nghiệm.

$$\begin{aligned}
 \text{Xét đa thức } R(x) \text{ xác định như sau: } R(x) &= Q(x) \left[(x - \sqrt{2})^2 + (x - \sqrt{2})^2 \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \right] \\
 &= \left[(x - \sqrt{2}) - \sqrt[3]{3} \right] \left[(x - \sqrt{2})^2 + (x - \sqrt{2})^2 \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \right] \\
 &= (x - \sqrt{2})^3 - 3 = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} - 3
 \end{aligned}$$

Ta thấy $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ cũng là nghiệm của đa thức $R(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Xét đa thức } P(x) \text{ được xác định bởi: } P(x) &= R(x) \left[(x^3 + 6x - 3) + \sqrt{2}(3x^2 + 2) \right] \\
 &= \left[(x^3 + 6x - 3) - \sqrt{2}(3x^2 + 2) \right] \left[(x^3 + 6x - 3) + \sqrt{2}(3x^2 + 2) \right] \\
 &= (x^3 + 6x - 3)^2 - 2(3x^2 + 2)^2 \\
 &= x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1
 \end{aligned}$$

Vậy $P(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ là đa thức không đồng nhất 0 với hệ số nguyên nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm một nghiệm.

➤ Nhận xét :

1) Trong bài toán trên, ta nhân các biểu thức liên hiệp thích hợp vào đa thức để làm mất căn bậc hai, căn bậc ba.

2) Đa thức $P(x)$ tìm được có phải là đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm không?

Giả sử có một đa thức có bậc không lớn hơn 5 với hệ số nguyên

$$G(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

cũng nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm. Ta có:

$$G(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_5(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^5 + a_4(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^4 + a_3(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^3 + a_2(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^2 + a_1(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) + a_0 = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{Thực hiện khai triển và rút gọn (3.1) ta có: } b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt[3]{3} + b_3\sqrt[3]{9} + b_4\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + b_5\sqrt{2}\sqrt[3]{9}. \quad (3.2)$$

Trong đó:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 50a_5 \\ b_1 = a_1 + 2a_3 + 12a_4 + 4a_5 \\ b_2 = a_1 + 6a_3 + 3a_4 + 20a_5 \\ b_3 = 3a_2 + 12a_4 + 3a_5 \\ b_4 = 2a_2 + 8a_4 + 15a_5 \\ b_5 = 3a_3 + 20a_5 \end{cases} \quad (3.3)$$

Vì $a_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \overline{0, 5}$ nên suy ra b_i cũng là số nguyên, $\forall i \in \overline{0, 5}$. Từ (3.2) suy ra $b_i = 0, \forall i \in \overline{0, 5}$. Do vậy từ (3.3) suy ra hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_0 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 50a_5 = 0 \\ a_1 + 2a_3 + 12a_4 + 4a_5 = 0 \\ a_1 + 6a_3 + 3a_4 + 20a_5 = 0 \\ 3a_2 + 12a_4 + 3a_5 = 0 \\ 2a_2 + 8a_4 + 15a_5 = 0 \\ 3a_3 + 20a_5 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $a_i = 0, \forall i \in \overline{0, 5}$. Vậy mọi đa thức không đồng nhất 0 với hệ số nguyên có bậc bé hơn hoặc bằng 5 không thể nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Tóm lại, $P(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ là đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ nhất nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.

Bài toán 4 : Tìm đa thức bậc 3 dạng $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sao cho $f(x)$ chia hết cho $(x - 2)$ và $f(x)$ chia cho $x^2 - 1$ thì dư $2x$.

Giải

Vì $f(x)$ chia hết cho $x-2$ nên $f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 0$.

Do $f(x)$ chia cho $x^2 - 1$ thì dư $2x$ nên $g(x) = f(x) - 2x$ chia hết cho $(x^2 - 1)$.

Suy ra $g(1) = 1 + a + (b - 2) + c = 0$ hay $a + b + c = 1$ và $g(-1) = -1 + a - b + 2 + c = 0$ hay $a - b + c = -1$.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 4a + 2b + c = -8 \\ a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = -19 \\ c = -10 \end{cases}$$

Vậy đa thức cần tìm có dạng :

$$f(x) = x^3 - 10x^2 - 19x - 10$$

➤ Nhận xét: Bài toán trên áp dụng định lý Bezout về nghiệm của đa thức. Lần lượt thay các nghiệm vào đa thức ta có hệ phương trình rồi suy ra a, b, c .

Bài toán 5 : Xác định đa thức $f(x)$ dạng :

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

Biết rằng nó chia hết cho đa thức $(x-1)(x+1)(x-2)$.

Giải

Ta có $f(x)$ chia hết cho $(x-1)(x+1)(x-2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c = 0 \\ f(-1) = a - b + c - 6 = 0 \\ f(2) = 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta thu được $a = 1, b = -3, c = 2$

Vậy đa thức cần tìm là : $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2$

➤ Nhận xét:

1) Đối với lớp bài toán xác định các hệ số để được một đa thức như trên, các hệ số tìm được có thể không là số nguyên.

2) Khi cần xác định n hệ số chưa biết, thông thường, ta cần n dữ kiện. Trong bài toán trên, cần xác định ba hệ số a, b, c , ta thấy ngay ba dữ kiện đề bài.

3) Các dạng khác :

Bài toán 1 : Cho $P(x)$ là một đa thức bậc 6 sao cho :

$$P(1) = P(-1), P(2) = P(-2), P(3) = P(-3)$$

Chứng minh rằng : $P(x) = P(-x), \forall x$

Giải

Ta có :

$$P(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Với $a_6 \neq 0, a_i \in \mathbb{Z}, (i = 0, 1, \dots, 6)$

Xem đa thức $f(x) = P(x) - P(-x)$, ta có

$$f(x) = 2a_5x^5 + 2a_3x^3 + 2a_1x$$

$$\Rightarrow \deg f(x) \leq 5$$

Ta có : $f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0, f(-1) = 0, f(-2) = 0, f(-3) = 0$

Đa thức $f(x)$ có $\deg f(x) \leq 5$ và có 6 nghiệm số. Do đó $f(x) \equiv 0$

Vậy : $P(x) = P(-x), \forall x$

 **Chú ý:** Áp dụng định lý về nghiệm của đa thức: Nếu $f(x)$ có bậc không quá n và có quá n nghiệm thì $f(x)$ là đa thức không.

Bài toán 2: Chứng minh rằng $f(x) = ax^2 + bx + c$ nhận các giá trị nguyên với mọi x nguyên khi và chỉ khi $2a, a+b$ và c là các số nguyên.

Giải

Ta có: $f(x) = ax^2 - ax + ax + bx + c$

$$= a(x^2 - x) + (a+b)x + c$$

$$= 2a \cdot \frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x + c.$$

(2.1)

i) Giả sử $f(x)$ nhận các giá trị nguyên với mọi x nguyên.

Lấy $x = 0 \Rightarrow c$ nguyên.

Lấy $x = 1 \Rightarrow f(x) = a + b + c \Rightarrow a + b$ nguyên.

Lấy $x = 2 \Rightarrow f(x) = 4a + 2b + c = 2a + 2(a+b) + c \Rightarrow 2a$ nguyên.

ii) Đảo lại, giả sử $2a, a+b, c \in \mathbb{Z}$ thì từ (2.1) và $\frac{x(x-1)}{2} \in \mathbb{Z}$ ta có $f(x) \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z}$.

Vậy điều kiện cần và đủ đã được chứng minh.

Bài toán 3 : Cho đa thức $P(x) = x^2 + px + q$; p, q nguyên. Chứng minh rằng tồn tại k nguyên sao cho $P(k) = P(2005).P(2006)$.

Giải

Ta có :

$$P(P(x) + x) = (P(x) + x)^2 + p(P(x) + x) + q$$

$$= (x^2 + px + q + x)^2 + p(x^2 + px + q + x) + q$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 + px + q)^2 + 2.(x^2 + px + q)x + x^2 + p(x^2 + px + q) + xp + q \\
&= (x^2 + px + q).(x^2 + px + q + 2x + p + 1) \\
&= (x^2 + px + q).((x+1)^2 + p(x+1) + q) \\
&= P(x).P(x+1).
\end{aligned}$$

Đặt $k = P(2005) + 2005$. Vì p, q nguyên suy ra $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên. Do đó k là số nguyên. Suy ra $P(k) = P(2005).P(2006)$. (đpcm)

➤ Nhận xét: Phân tích đpcm ta thấy: $P(2005).P(2006) = P(2005).P(2005+1)$ có dạng $P(x).(x+1)$.
Lại tiếp tục phân tích ngược thì $P(x).(x+1) = (x^2 + px + q)[(x+1)^2 + p(x+1) + q] = P[P(x) + x]$. Từ đó ta có điều cần chứng minh để đi đến kết quả.

Bài toán 4 : Cho phương trình bậc hai sau đây có nghiệm hữu tỉ :

$ax^2 + bx + c = 0$ với các hệ số nguyên. Chứng minh rằng biệt số Δ của phương trình không thể bằng 1994 và cũng không thể bằng 1995 .

Giải

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với các hệ số nguyên, có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó nguyên. Do đó Δ là số chính phương.

a) Nếu $\Delta = 1994 \Rightarrow \Delta \equiv 2 \pmod{4}$, vô lý

b) Nếu $\Delta = 1995 \Rightarrow \Delta \equiv 3 \pmod{4}$, vô lý

Suy ra đpcm.

Bài toán 5: Cho đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên. Chứng minh rằng không tồn tại ba số phân biệt a, b, c sao cho $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$.

Giải

Đa thức có dạng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$. Giả sử tồn tại ba số nguyên a, b, c đôi một khác nhau thỏa điều kiện đề bài.

Vì $P(a) - P(b) : a - b$ và $P(a) - P(b) = b - c \Rightarrow b - c : a - b$

$$\Rightarrow |b - c| \geq |a - b| \quad (5.1)$$

Tương tự, ta có:

$$|a - b| \geq |c - a| \quad (5.2)$$

$$|c - a| \geq |b - c| \quad (5.3)$$

Từ (5.1), (5.2), (5.3) suy ra $|a - b| = |b - c| = |c - a|$. Vì a, b, c đôi một khác nhau nên từ đó ta suy ra:

$$\begin{cases} a-b=b-c \\ b-c=c-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b-c \\ a=2c-b \end{cases} \Rightarrow 2b-c=2c-b \Leftrightarrow b=c, \text{ vô lý.}$$

Vậy giả thiết là sai suy ra đpcm.

Bài toán 6: Chứng minh rằng nếu phân số tối giản $\frac{p}{q}$ là nghiệm của đa thức với hệ số nguyên

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

thì $p-mq$ là ước của $f(m)$ với m nguyên.

Giải

Phân tích $f(x)$ theo các lũy thừa của $(x-m)$ ta được

$$f(x) = a_n (x-m)^n + b_{n-1} (x-m)^{n-1} + \dots + b_1 (x-m) + b_0 = g(x-m)$$

Vì m là số nguyên nên $b_i, i = \overline{0, n}$ là các số nguyên. Ta có: $f(m) = b_0$

$$\text{Thay } x \text{ bởi } \frac{p}{q} \text{ ta được } f\left(\frac{p}{q}\right) = g\left(\frac{p}{q} - m\right) = g\left(\frac{p-mq}{q}\right) = 0$$

Do đó $\frac{p-mq}{q}$ là nghiệm của $g(x)$. Áp dụng định lý 3 thì $p-mq$ là ước của $b_0 = f(m)$ (đpcm).

III) Bài tập áp dụng:



Bài toán 1: Cho đa thức $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 97$

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n luôn tồn tại số nguyên a_n sao cho $P(a_n)$ chia hết cho 3^n .

Hướng dẫn : $\forall x \in \mathbb{Z} \quad P(3x+1) = 27Q(x)$. Với $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

$$27Q(3x) = P(9x+1) \Rightarrow P(9x+1) = 81R(x)$$

$$\text{Với } R(x) = 9x^3 - 6x^2 + x - 1$$

$$\text{Vì } 9:3, 6:3, 1 \not:3 \Rightarrow R(b_n):3^n$$

$$P(9b^n+1) = 81R(b_n); a_n = 9b^n+1$$

$$P(a_n) = 81R(b_n):3^{n+2}$$

(đpcm).

Bài toán 2: Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu các số $P(0), P(1), \dots, P(m-1)$ đều không chia hết cho m (m là số nguyên dương) thì đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn : Cm phản chứng :

$$P(x) = (x-c)Q(x)$$

$$\text{Tính } P(0); P(1) \dots \Rightarrow P(m-1) = (m-1-c)Q(m-1)$$

$0-c, 1-c, \dots, m-1-c$ là n số nguyên liên tiếp.

$$\Rightarrow \exists k (0 \leq k \leq m-1) \text{ thỏa } k-c : m$$

$$\Rightarrow P(k):m \text{ mâu thuẫn suy ra đpcm.}$$

Bài toán 3 : Cho đa thức $P(x)$ bậc 3 có các hệ số nguyên và $P(x)$ chia hết cho 7 với mọi x nguyên. Chứng minh rằng các hệ số của đa thức $P(x)$ đều chia hết cho 7.

Hướng dẫn: Làm tương tự bài toán 6 (dạng 1)

Bài toán 4 : Cho đa thức có dạng :

$$P(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Biết rằng $P(x)$ chia hết cho $(x-2)(x+2)(x+3)$. Hãy tìm đa thức $P(x)$ ấy.

Hướng dẫn : $P(2) = P(-2) = P(-3) = 0$ (định lý Bezout)

Đáp số : $a = -1; b = 20; c = -12$

Bài toán 5 : Tìm đa thức $P(x)$ dưới dạng

$$P(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c,$$

Biết rằng $P(x)$ chia hết cho đa thức $x+2$, nhưng khi chia cho đa thức $x^2 - 1$ thì được phần dư là x .

Hướng dẫn :

$$P(-2) = 0; Q(x) = P(x) - x : x^2 - 1$$

$$Q(1) = Q(-1) = 0$$

$$\text{Đáp số : } a = -\frac{28}{3}; b = 1; c = \frac{22}{3}$$

Bài toán 6 : Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên không âm và không lớn hơn 8. Giả sử $P(9) = 32078$. Hãy tìm đa thức $P(x)$.

Đáp số : $P(x) = 4x^4 + 8x^3 + 2$

Bài toán 7 : Tìm đa thức hệ số nguyên bậc nhỏ nhất nhận $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ làm một trong các nghiệm của nó.

Đáp số : $P(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8$

Bài toán 8 : Tìm mọi đa thức $P(x) \neq 0$, thỏa mãn điều kiện

$$xP(x-1) = (x-3)P(x), \forall x.$$

Hướng dẫn :

$$P(0) = P(1) = P(2) = 0$$

$$P(x) = x(x-1)(x-2).Q(x)$$

$$\Rightarrow Q(x-1) = Q(x) : \text{Hàm số tuần hoàn.}$$

Đáp số : $P(x) = x(x-1)(x-2)$

Bài toán 9 : Xác định xem số a được xác định như sau là số hữu tỉ hay vô tỉ.

$$a = \sqrt{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{7}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{7}}}$$

Hướng dẫn :

$$a^3 + 5a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \in \mathbb{Q}$$

Bài toán 10 : [Đề thi vào lớp 10 chuyên toán TP.HCM năm 1982]

Đặt $x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3} \sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$. Chứng minh rằng với mọi $a \geq \frac{1}{8}$ thì x là số tự nhiên.

Hướng dẫn: Lũy thừa số x ta có $(x-1)(x^2+x+2a)=0$. Biện luận để có $x=1$.

Bài toán 11 : Lập một đa thức với hệ số nguyên nhận $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ làm nghiệm.

Đáp số: $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$

Bài toán 12 : Cho n là số tự nhiên. Xác định đa thức $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$, biết rằng $P(x) : x^2 + x + 1$

Hướng dẫn: Xét ba trường hợp $n = 3k, n = 3k + 1, n = 3k + 2 (k \in \mathbb{N})$. Đáp án: $n \not\equiv 3$.

Bài toán 13 : Chứng minh rằng nếu phân số tối giản $\frac{p}{q}$ là nghiệm của đa thức hệ số nguyên

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

thì $p - q$ là ước của $f(1)$ và $p + q$ là nghiệm của $f(-1)$.

Hướng dẫn: Cmtt bài toán..... Với $m = 1$ và $m = -1$

Bài toán 14: Đa thức $P(x)$ bậc 4 có hệ số bậc cao nhất là 1 và thỏa mãn điều kiện $P(1)=3, P(3)=11$ và $P(5)=27$. Chứng minh rằng $P(-2)+P(6)=1112$.

Hướng dẫn : Xét $f(x) = x^2 + 2; f(1)=3; f(3)=11, f(5)=27$

$$Q(x) = P(x) - f(x); \deg Q(x) = \deg P(x) = 4$$

Hệ số bậc cao nhất của $P(x) \Rightarrow Q(x)$ cũng là 1

$$Q(1) = Q(3) = Q(5) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-k)$$

Với k là hằng số

$$P(-2) = 216 + 105k$$

$$P(6) = 128 - 15k \Rightarrow \text{đpcm. Đáp số : } 1112$$

Bài toán 15 : Cho đa thức : $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

Biết $P(1)=10, P(2)=20, P(3)=30$. Chứng minh rằng:

$$\frac{P(12) + P(-8)}{10} + 22 = 2006$$

Hướng dẫn : Xét

$$Q(x) = P(x) - 10x; \deg P(x) = \deg Q(x) = 4$$

$$Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)R(x)$$

$$\Rightarrow R(x) = x - x_0 \Rightarrow P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-x_0)$$

Tính $P(12)$ và $P(-8)$ suy ra đpcm.

Bài toán 16: Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc 1991 với hệ số nguyên. Xét đa thức $Q(x) = P^2(x) - 9$. Chứng minh rằng số nghiệm nguyên của đa thức $Q(x)$ không vượt quá 1995.

Hướng dẫn : Chứng minh phản chứng nghiệm $Q(x) \leq 1996$

Bài toán 17: Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu các số $P(0), P(1), \dots, P(m-1)$ đều không chia hết cho m (m là số nguyên dương) thì đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Hướng dẫn : Cm phản chứng :

$$P(x) = (x - c)Q(x)$$

$$\text{Tính } P(0); P(1) \dots \Rightarrow P(m-1) = (m-1-c) \cdot Q(m-1)$$

$0-c, 1-c, \dots, m-1-c$ là n số nguyên liên tiếp.

$$\Rightarrow \exists k (0 \leq k \leq m-1) \text{ thỏa } k-c \vdots m$$

$$\Rightarrow P(k) \vdots m \text{ mâu thuẫn suy ra đpcm.}$$

Tài liệu tham khảo:

- Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học cơ sở: Đa thức. [Phan Huy Khải]
- Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học cơ sở: Số học. [Nguyễn Vũ Thanh]
- Tuyển tập 216 bài toán số học chọn lọc. [Võ Đại Mau]
- Một số bài toán về đa thức và phân thức. [Nguyễn Văn Mậu]
- Tuyển tập 5 năm toán học tuổi trẻ.



 mathematics 4 teachers n' students

..HẾT..