Dồn biến cổ điển và bất đẳng thức Jack Garfunkel

Võ Quốc Bá Cẩn
Đại học Y Dược Cần Thơ

Ngày 9 tháng 5 năm 2008

Tóm tắt nội dung

Trong bài này, chúng ta sẽ giới thiệu một cách chứng minh bằng phép dồn biến cổ điển cho bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Bất đẳng thức này được tác giả Jack Garfunkel đề nghị trên tạp chí Crux Magazine năm 1991 (bài toán 1490). Đây là một bài toán hay và khó mặc dù hiện nay đã nhận được nhiều lời giải cho nó nhưng một lời giải bằng phép dồn biến thuần túy thì đến nay vẫn chưa nhận được.

Trước hết chúng ta cần có kết quả sau làm bổ đề phụ trợ cho chứng minh bất đẳng thức Jack Garfunkel

Bài toán 1 *Cho các số không âm a, b, c, tất cả không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b} \le \frac{1}{3}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $a+b+c=3$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{3-c}+\frac{b}{3-a}+\frac{c}{3-b} \le 1$$

$$\Leftrightarrow a(3-a)(3-b)+b(3-b)(3-c)+c(3-c)(3-a) \le (3-a)(3-b)(3-c)$$

$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc \le 4$$

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số hạng nằm giữa a và c, thế thì ta có

$$c(b-a)(b-c) \le 0$$

$$\Rightarrow b^2c + c^2a \le abc + bc^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a + abc &\le b(a+c)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2b\cdot(a+c)\cdot(a+c)\\ &\le \frac{1}{2}\left(\frac{2b+a+c+a+c}{27}\right)^3 = 4.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $(a, b, c) \sim (2, 1, 0)$.

Nhận xét 1 *Đây là một bổ đề khá chặt và có thể được dùng để giải nhiều bài toán khác, các bạn hãy ghi nhớ nó nhé! Ngoài ra, chúng ta có thể làm mạnh bổ đề như sau*

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc + \frac{1}{2}abc(3 - ab - bc - ca) \le 4$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

■

Bây giờ chúng ta sẽ đi đến giải quyết bài toán chính

Bài toán 2 *Cho các số không âm $a, b, c,$ không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}.$$

(Jack Garfunkel)

Lời giải. Ta xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. $c \ge b \ge a$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}}\right)^2 \le (a+b+c)\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right)$$

Lại có do $c \ge b \ge a$ nên

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right)\\ &= \frac{3}{2} - \frac{(c-a)(c-b)(b-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{3}{2} < \frac{25}{16}\end{aligned}$$

Nên hiển nhiên

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Trường hợp 2. $a \ge b \ge c$.

Trường hợp 2.1. $\frac{11}{5}b \ge a$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 &\le \left[\sum_{cyc}\frac{a(4a+4b+c)}{a+b}\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\right)\\ &= \left[3\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)}{a+b}\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\right)\\ &= \left(\sum_{cyc}a\right)\left(3+\sum_{cyc}\frac{a}{a+b}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\right)\end{aligned}$$

Theo kết quả bài toán trước, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c} \le \frac{1}{3}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{a}{a+b} \le \frac{27}{16}$$

$$\Leftrightarrow (11a^2+6ab-5b^2)c+(ab+c^2)(11b-5a) \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Trường hợp 2.2. $a \ge \frac{11}{5}b$, đặt $f(a,b,c) = \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}}$. Vì bài toán này có đẳng thức xảy ra tại $a=3, b=1, c=0$ nên ý tưởng của chúng ta sẽ là dồn 1 biến về 0, tức là chứng minh

$$f(a,b,c) \le f(a_1,b_1,0)$$

với $a_1+b_1 = a+b+c$.
Việc làm này nói có vẻ rất đơn giản nhưng khi thực hiện, bạn sẽ thấy rất khó vì các biểu thức trong căn rất khó cho ta để đánh giá chúng, và nếu chúng ta cứ "cố chấp" một giá trị a_1, b_1 hoài khi dồn biến thì cũng rất khó mà ta phải linh động hơn, tùy theo những trường hợp cụ thể mà chọn a_1, b_1 thích hợp ứng với những trường hợp ấy. Chúng ta sẽ xét những trường hợp nhỏ như sau
Trường hợp 2.2.1. $a \ge 3b$, khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} \le \frac{a+\frac{c}{2}}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+b+c) \le \left(a^2+ac+\frac{c^2}{4}\right)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}c^4(a+b) \ge 0 \text{ (đúng)}$$

và

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \sqrt{b+\frac{c}{2}}$$

Do $a \ge 3b$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{3b+c}} \le \sqrt{b+\frac{c}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{3b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}} \le b+\frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{3b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}} \le \frac{c}{2}+\frac{bc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{3b+c}+\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}} \le \frac{b}{b+c}+\frac{1}{2}$$

Do $b \ge c$ nên $3b+c \ge 2(b+c)$, suy ra

$$\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}} \le \frac{\sqrt{2}b}{b+c} \le \frac{3b}{2(b+c)}$$

Lại có

$$\frac{1}{2}+\frac{b}{b+c}-\frac{c}{3b+c}-\frac{3b}{2(b+c)}=\frac{c(b-c)}{2(b+c)(3b+c)} \ge 0$$

Từ đây, ta đi đến

$$f(a,b,c) \le f\left(a+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, 0\right)$$

Trường hợp 2.2.2. $3b \ge a \ge \frac{5}{2}b$, khi đó, ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} \le \frac{a+\frac{3}{8}c}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+b+c) \le \left(a^2+\frac{3}{4}ac+\frac{9}{64}c^2\right)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{64}c^2(a+b)+\frac{1}{4}ca(3b-a) \ge 0 \text{ (đúng)}$$

và

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \sqrt{b+\frac{5}{8}c}$$

Tương tự như trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+\frac{5}{2}b}} \le \sqrt{b+\frac{5}{8}c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{\frac{5}{2}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}} \le b+\frac{5}{8}c$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{\frac{5}{2}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}} \le \frac{5}{8}c+\frac{bc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\frac{5}{2}b+c}+\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}} \le \frac{b}{b+c}+\frac{5}{8}$$

Do $b \ge c$ nên

$$\frac{5}{2}b+c \ge \frac{7}{4}(b+c) = \frac{28}{16}(b+c) \ge \frac{25}{16}(b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}} \le \frac{8b}{5(b+c)}$$

Lại có

$$\frac{5}{8}+\frac{b}{b+c}-\frac{8b}{5(b+c)}-\frac{c}{\frac{5}{2}b+c} = \frac{(b+10c)(5b-3c)}{40(b+c)(5b+2c)} \ge 0$$

Vậy nên

$$f(a,b,c) \le f\left(a+\frac{3}{8}c, b+\frac{5}{8}c, 0\right)$$

Trường hợp 2.2.3. $\frac{5}{2}b \ge a \ge \frac{11}{5}b$, khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} \le \frac{a+\frac{5}{14}c}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+b+c) \le \left(a^2+\frac{5}{7}ac+\frac{25}{196}c^2\right)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{196}c^2(a+b)+\frac{1}{7}ca(5b-2a) \ge 0 \text{ (đúng)}$$

và

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \sqrt{b+\frac{9}{14}c}$$

Tương tự như trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+\frac{11}{5}b}} \le \sqrt{b+\frac{9}{14}c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{\frac{11}{5}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}} \le b+\frac{9}{14}c$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{\frac{11}{5}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}} \le \frac{9}{14}c+\frac{bc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\frac{11}{5}b+c}+\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}} \le \frac{b}{b+c}+\frac{9}{14}$$

Do $b \ge c$ nên

$$\frac{11}{5}b+c \ge \frac{8}{5}(b+c) \ge \frac{25}{16}(b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}} \le \frac{8b}{5(b+c)}$$

Lại có

$$\frac{9}{14}+\frac{b}{b+c}-\frac{8b}{5(b+c)}-\frac{c}{\frac{11}{5}b+c}=\frac{33b^2+160bc-125c^2}{70(b+c)(5b+2c)} \ge 0$$

Vậy nên

$$f(a,b,c) \le f\left(a+\frac{5}{14}c, b+\frac{9}{14}c, 0\right)$$

Như vậy, ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp có 1 biến bằng 0 là đủ. Không mất tính tổng quát, giả sử $c=0$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b}$$

$$\Leftrightarrow a+\sqrt{b(a+b)} \le \frac{5}{4}(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{b(a+b)} \le a+5b$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a+b}-2\sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \text{ (đúng)}.$$

Bài toán được giải quyết xong.

Nhận xét 2 *Trong lời giải trên, mặc dù không sử dụng máy tính phụ trợ nhưng tại sao ta lại chia được trường hợp có số lẻ $\frac{5}{2}$? Câu trả lời xin được dành cho các bạn.*
Đây là một lời giải dài và khá phức tạp nhưng nó gợi mở cho chúng ta nhiều điều trong việc sử dụng phép dồn biến. Từ xưa đến nay, chúng ta thường "cổ hữu" chỉ khư khư một số kiểu dồn biến, chẳng hạn như

$$f(a,b,c) \le f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$$

$$f(a,b,c) \le f(a+c,b,0)$$

$$f(a,b,c) \le f\left(a+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, 0\right)$$

Nhưng những điều này không phải lúc nào cũng luôn có mà chỉ có trong một số rất ít trường hợp. Vì thế, chúng ta cần linh động hơn nữa trong phép dồn biến, chẳng hạn trong bài này

$$f(a,b,c) \le f(a_1,b_1,0)$$

với $a_1+b_1=a+b+c$.
Đây là một ý tưởng độc đáo và khá thú vị.

■

Phần cuối cùng của bài viết, chúng tôi xin được giới thiệu cùng các bạn một số chứng minh khác mà chúng tôi được biết cho bài toán đẹp này.
Lời giải 2. [1]Đặt $b+c=x^2, c+a=y^2, a+b=z^2$ với $x,y,z>0$, từ đây ta được

$$a=\frac{y^2+z^2-x^2}{2}\ge 0,\quad b=\frac{z^2+x^2-y^2}{2}\ge 0,\quad c=\frac{x^2+y^2-z^2}{2}\ge 0$$

Bất đẳng thức đã cho được viết lại thành

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{z}+\frac{z^2+x^2-y^2}{x}+\frac{x^2+y^2-z^2}{y}\le \frac{5}{4}\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+\frac{(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}\le \frac{5}{4}\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}$$

Từ đây, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x\ge z\ge y$[2], khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}\ge x+\sqrt{y^2+z^2}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$x+y+z+\frac{(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}\le \frac{5}{4}\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$$

[1]By G.P. Henderson
[2]why?

$$\Leftrightarrow f(x) \le 0$$

với

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow f(t) &= 4(z-y)t^3 - t^2yz + \left(4y^3 + 4y^2z + 4yz^2 - 4z^3 - 5yz\sqrt{y^2+z^2}\right)t \\ &\quad + 4yz(z^2-y^2) \le 0\end{aligned}$$

Nếu $y = z$ thì ta có

$$f(x) = -xy^2\left[(x-y) + \left(5\sqrt{2}-7\right)y\right] < 0$$

Nếu $z > y$, ta có

$$\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty, \quad f(0) = 4yz(z^2-y^2) > 0, \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty$$

Lại có

$$f(z) = -yz^2\left[5\sqrt{y^2+z^2} - 4y - 3z\right] = -\frac{yz^2(3y-4z)^2}{5\sqrt{y^2+z^2}+4y+3z} < 0$$

$$f\left(\sqrt{y^2+z^2}\right) = 2yz\left(4y\sqrt{y^2+z^2} - 5y^2 - z^2\right) = -2yz\left(\sqrt{y^2+z^2} - 2y\right)^2 \le 0$$

Ta suy ra được $f(t)$ có 3 nghiệm thực, cụ thể, 1 nghiệm âm, 1 nghiệm thuộc $(0, z)$ và một nghiệm thuộc $\left[\sqrt{y^2+z^2}, \infty\right)$. Mặt khác, $f(t)$ là một hàm đa thức bậc 3 với hệ số thực nên nó có tối đa 3 nghiệm.Từ đây, ta suy ra được $f(t)$ có đúng 3 nghiệm: $t_0 < 0, t_1 \in (0,z), t_2 \in \left[\sqrt{y^2+z^2}, \infty\right)$. Từ đây, bằng cách lập bảng xét dấu, ta thấy

$$f(t) \le 0 \quad \forall t_1 \le t \le t_2$$

Mà ta có

$$t_1 < z \le x \le \sqrt{y^2+z^2} \le t_2$$

nên hiển nhiên ta có

$$f(x) \le 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Nhận xét 3 *Đây là một chứng minh hay và đặc sắc dựa trên tính chất về dấu của hàm đa thức bậc 3 nhưng để nghĩ đến được điều này quả thật không phải dễ...*

■

Lời giải 3. [3]Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 &\le \left[\sum_{cyc}a(5a+b+9c)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right]\\ &= 5\left(\sum_{cyc}a\right)^2\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right]\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc}a\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right] \le \frac{5}{16}$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$\frac{5}{16}-\left(\sum_{cyc}a\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right] = \frac{A+B}{C}$$

trong đó

$$\begin{aligned}A &= \sum_{cyc}ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2 \ge 0\\ B &= 243\sum_{cyc}a^3b^2c+835\sum_{cyc}a^2b^3c+232\sum_{cyc}a^4bc+1230a^2b^2c^2 \ge 0\\ C &= 16(a+b)(b+c)(c+a)(5a+b+9c)(5b+c+9a)(5c+a+9b) > 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{3}=\frac{b}{1}=\frac{c}{0}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ∎

Chúng ta còn có 3 lời giải khác cho bài toán này, 1 bằng dồn biến toàn miền, 1 bằng dồn biến-khảo sát hàm số, 1 bằng kỹ thuật *pqr* nhưng trên quan niệm cá nhân, chúng tôi cho rằng những lời giải ấy đều không mang nét đặc sắc riêng nên chúng tôi sẽ không giới thiệu chúng ở đây.

Chúng tôi xin được kết thúc bài viết ở đây. Xin cảm ơn các bạn đã theo dõi bài viết này!

Regards
Võ Quốc Bá Cẩn

[3]By Võ Quốc Bá Cẩn, due to CYH techniques