

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng có phương trình $y = x + 2015$.

Câu 2 (2,0 điểm). Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

b) $\log_2 x + \log_2 (x-2) = \log_2 (6-x)$

Câu 3 (2,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

Câu 4 (2,0 điểm). Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có 2 học sinh nữ đứng cạnh nhau.

Câu 5 (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD .

Câu 6 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(3; 0)$ và trung điểm của BC là $I(6; 1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x + 2y - 3 = 0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC . Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC , biết đường thẳng DE có phương trình $x - 2 = 0$ và điểm D có tung độ dương.

Câu 7 (2,0 điểm). Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính bằng a . Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn tâm O và O' sao cho AB hợp với trục OO' một góc 45° và khoảng giữa chúng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính theo a diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.

Câu 8 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 9 (2,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y - z = -1$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức
$$P = \frac{x^3 y^3}{(x + yz)(y + xz)(z + xy)^2}.$$

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

I. LƯU Ý CHUNG:

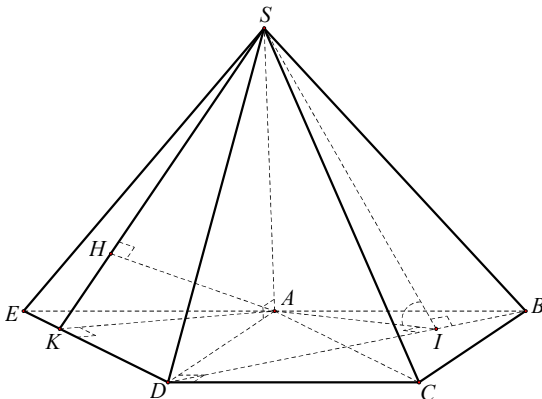
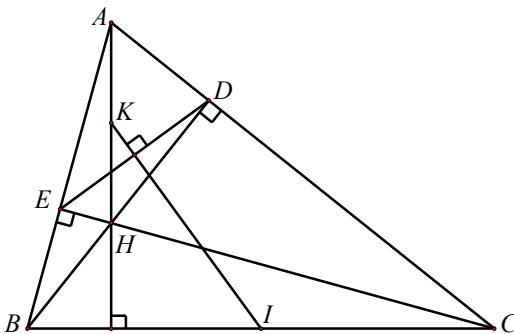
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.

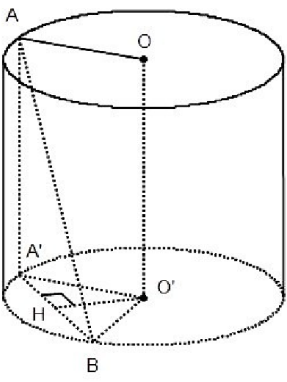
- Với bài hình học không gian nếu thí sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Ý	Nội dung trình bày	Điểm															
1	a	Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho	2,0															
		* Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	0,25															
		* Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$	0,25															
		Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ - Cực trị: Hàm số không có cực trị	0,25															
		- Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 2$	0,25															
		- Bảng biến thiên :	0,5															
		<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td></td><td>-</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td><td></td><td>2</td></tr></table>		x	$-\infty$		1		$+\infty$	y'		-		-		y	2	
x	$-\infty$		1		$+\infty$													
y'		-		-														
y	2		$+\infty$		2													
Đồ thị: (C) cắt Ox tại $\left(\frac{1}{2};0\right)$, cắt Oy tại (0;2). 	0,5																	
b	Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng có phương trình $y = x + 2015$.	2,0																
	Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Ta có hệ số góc của tiếp tuyến	0,5																

		tại điểm có hoành độ x_0 là $k = f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}$	
		Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng có phương trình $y = x + 2015$ nên ta có $k = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$	0,5
		Với $x_0 = 0$ ta được tiếp tuyến có phương trình $y = -x + 1$	0,5
		Với $x_0 = 2$ ta được tiếp tuyến có phương trình $y = -x + 5$	0,5
2	a	Giải phương trình $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$	1,0
		$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -2 \end{cases}$	0,25
		$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,25
		$\sin x = -2$ PT vô nghiệm	0,25
		Kết luận: PT có các nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,25
	b	Giải phương trình $\log_2 x + \log_2 (x - 2) = \log_2 (6 - x)$	1,0
		Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 6 \\ 6 - x > 0 \end{cases}$	0,25
		PT $\Leftrightarrow \log_2 [x(x - 2)] = \log_2 (6 - x)$	0,25
		$\Leftrightarrow x(x - 2) = 6 - x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$	0,25
		Kết hợp điều kiện ta được $x = 3$ là nghiệm của phương trình đã cho.	0,25
3		Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[0; 2]$.	2,0
		Hàm số đã cho liên tục trên $[0; 2]$	0,5
		Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$	
		$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$	0,5
		$f(0) = 2, f(2) = 4, f(1) = 0$	0,5
		$\max_{[0; 2]} f(x) = f(2) = 4; \min_{[0; 2]} f(x) = f(1) = 0$	0,5
4		Xếp ngẫu nhiên 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ thành một hàng ngang. Tính xác suất để có 2 học sinh nữ đứng cạnh nhau.	2,0
		Gọi không gian mẫu là Ω , A là biến cố “xếp hai nữ đứng cạnh nhau”. Ta có $n(\Omega) = 5!$	0,5
		Đánh thứ tự các vị trí cần xếp từ 1 đến 5. Để 2 nữ đứng cạnh nhau thì vị trí xếp hai nữ là một trong bốn trường hợp: $(1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5)$	0,5
		Mỗi trường hợp số cách xếp là $2!3!$ nên tất cả số cách xếp thỏa mãn hai nữ đứng cạnh nhau là $n(A) = 4 \cdot 2!3!$	0,5

		Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{5}$	0,5
5	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.	2,0	
			
	Trong tam giác ABD kẻ đường cao $AI (I \in BD)$ $\Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow \widehat{(SBD), (ABCD)} = \widehat{SIA} = 60^\circ$	0,5	
	$BD = 2a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = \frac{3a}{2}$ $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{a^3.\sqrt{3}}{2}$	0,5	
	Trong mặt phẳng $(ABCD)$ đường thẳng qua D song song với AC, cắt đường thẳng AB tại E. Trong tam giác ADE kẻ đường cao $AK (K \in DE) \Rightarrow (SAK) \perp (SDE)$. Dựng $AH \perp SK$ tại H, suy ra $AH \perp (SDE)$. Do $AC \parallel (SDE) \Rightarrow d(AC, SD) = d(A, (SDE)) = AH$	0,5	
	Ta có $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4} \Rightarrow d(AC, SD) = \frac{3a}{4}$	0,5	
6	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm $H(3;0)$ và trung điểm của BC là $I(6;1)$. Đường thẳng AH có phương trình $x + 2y - 3 = 0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC, biết đường thẳng DE có phương trình $x - 2 = 0$ và điểm D có tung độ dương.	2,0	
			
	Gọi K là trung điểm của AH . Tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn tâm K và $BCDE$ nội	0,5	

	tiếp đường tròn tâm I . Suy ra $IK \perp DE \Rightarrow$ phương trình $IK : y - 1 = 0$.	
	Tọa độ $K(1;1) \Rightarrow A(-1;2)$	0,5
	$D(2;a) \in DE$. Ta có $KA = KD \Leftrightarrow 5 = 1 + (a-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-1(l) \end{cases} \Rightarrow D(2;3)$	0,5
	Phương trình $AC : x - 3y + 7 = 0$. Phương trình $BC : 2x - y - 11 = 0$. Tọa độ $C(8;5) \Rightarrow B(4;-3)$ Vậy, $A(-1;2)$, $B(4;-3)$ và $C(8;5)$.	0,5
7	Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn tâm O và O' , bán kính bằng a . Hai điểm A, B lần lượt nằm trên hai đường tròn tâm O và O' sao cho AB hợp với trục OO' một góc 45° và khoảng giữa chúng bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính theo a diện tích toàn phần của hình trụ đã cho.	2,0
		
	Kẻ đường sinh AA' ($A' \in (O')$). Gọi H là trung điểm $A'B$	0,5
	Từ giả thiết ta có $\widehat{BAA'} = 45^\circ$, $d(AB; OO') = O'H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	0,5
	Ta có $HB = \sqrt{O'B^2 - O'H^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'B = a\sqrt{2}$	0,5
	Do $\widehat{BAA'} = 45^\circ$ nên tam giác $AA'B$ vuông cân đỉnh $A' \Rightarrow AA' = A'B = a\sqrt{2}$	
	$S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = (2\pi a)a\sqrt{2} + 2(\pi a^2) = (2\sqrt{2} + 2)\pi a^2$	0,5
8	Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x. \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R})$	2,0
	$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \quad (1) \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x \quad (2). \end{cases}$ Vì $\sqrt{x^2 + 2} - x > \sqrt{x^2} - x = x - x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2} - x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ Nên ta có $(1) \Leftrightarrow y(\sqrt{x^2 + 2} - x) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \sqrt{x^2 + 2} + x$	0,5
	Thế $y = \sqrt{x^2 + 2} + x$ vào phương trình (2) , ta có : $(\sqrt{x^2 + 2} + x)^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 2x^2 - 4x$ $\Leftrightarrow 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + 2x + (x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 0$.	0,5

	$\Leftrightarrow (x+1)\left[1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right]=(-x)\left[1+\sqrt{(-x)^2+2}\right] \quad (*)$ Xét hàm số $f(t)=t\left(1+\sqrt{t^2+2}\right)$. Ta có $f'(t)=1+\sqrt{t^2+2}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0, \forall t \in R \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } R.$	0,5
	$(*) \Leftrightarrow f(x+1)=f(-x) \Leftrightarrow x+1=-x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$ $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=1. \text{ Vậy hệ đã cho có nghiệm là } \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=1. \end{cases}$	0,5
9	Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y-z=-1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x^3 y^3}{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}$.	2,0
	Ta có $x+y-z=-1 \Rightarrow z=x+y+1 \Rightarrow z+xy=x+y+1+xy=(x+1)(y+1)$ $x+yz=x+y(x+y+1)=x+xy+y^2+y=(x+y)(y+1)$ $y+xz=y+x(x+y+1)=(x+y)(x+1)$	0,5
	Ta được $P=\frac{x^3 y^3}{(x+y)^2 \cdot (x+1)^3 \cdot (y+1)^3}$ Vì $\begin{cases} (x+y)^2 \geq 4xy \\ x>0 \\ y>0 \end{cases} \Rightarrow P \leq \frac{x^3 y^3}{4xy \cdot (x+1)^3 \cdot (y+1)^3} = \frac{x^2 y^2}{4 \cdot (x+1)^3 \cdot (y+1)^3}$	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x+1=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}} \Rightarrow (x+1)^3 \geq \frac{27}{4}x^2 \Rightarrow 0 < \frac{x^2}{(x+1)^3} \leq \frac{4}{27}$ Lập luận tương tự ta được $0 < \frac{y^2}{(y+1)^3} \leq \frac{4}{27}$	0,5
	$\Rightarrow P \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{27} \cdot \frac{4}{27} = \frac{4}{729}$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = 1 \\ z = x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$ Vậy $\max P = \frac{4}{729}$ đạt được khi $\begin{cases} x = y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$.	0,5

-----HẾT-----