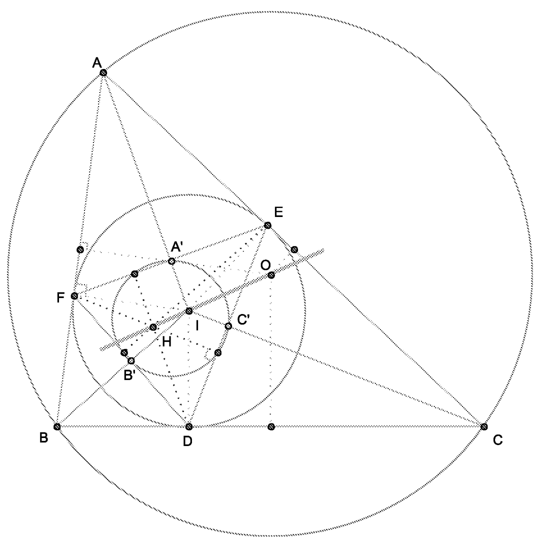
Hạ Vũ Anh

HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA
CHÙM ĐIỀU HÒA



Vĩnh Yên tháng 9 năm 2004

Kiến thức cơ bản

1.1 Tỷ số đơn, tỷ số kép của bộ các điểm thẳng hàng

Định nghĩa 1.1.1. *Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Khi đó tỷ số đơn của chúng lấy theo thứ tự đó, ký hiệu (AB, C), là tỷ số* $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$

Định lý 1.1.1. *Cho hai điểm A, B phân biệt và số thực $k \neq 1$. Khi đó tồn tại duy nhất điểm C sao cho $(AB, C) = k$*

Định nghĩa 1.1.2. *Cho bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng. Khi đó tỷ số kép của chúng lấy theo thứ tự đó, ký hiệu $(ABCD)$, là tỷ số* $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$

Nhận xét. Nếu $(ABCD) = \alpha$ thì

1. $(ABCD) = (BCDA) = (CDAB) = (DABC) = \alpha = (DCBA) = (CBAD) = (BADC) = (ADCB)$
2. $\frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\alpha} = (BACD) = (ABDC)$ nếu $\alpha \neq 0$
3. $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$

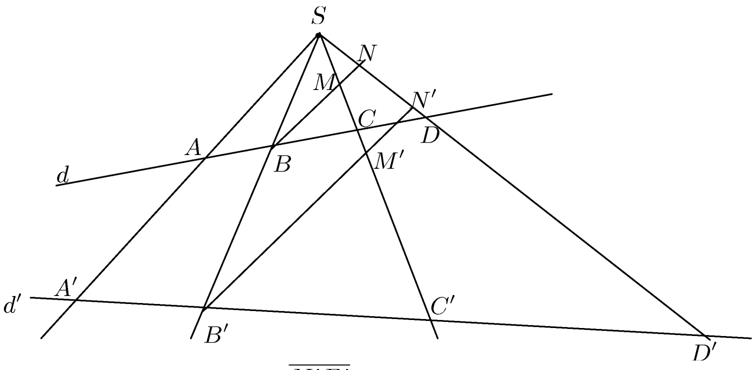
Định nghĩa 1.1.3. *Cho đường thẳng d và điểm $S \notin d$. Ánh xạ biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành một điểm M' là giao điểm của đường thẳng SM với d được gọi là phép chiếu xuyên tâm (tâm chiếu S) lên đường thẳng d.*

Định lý 1.1.2. *Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép của bộ bốn điểm thẳng hàng*

Chứng minh. Cho hai đường thẳng d, d' và các điểm $A, B, C, D \in d; S \notin d, d'$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là giao điểm của SA, SB, SC, SD với đường thẳng d'.
Ta sẽ chứng minh $(ABCD) = (A'B'C'D')$.
Qua B kẻ đường thẳng song song với SA, cắt SC, SD tại M, N và qua B' kẻ đường thẳng song song với SA cắt SC, SD tại M', N'. Khi đó, theo định lý Thalès ta có

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{MB}} \text{ và } \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{NB}}$$

Suy ra $(ABCD) = \dfrac{\overline{NB}}{\overline{MB}}$ (1)



Tương tự, cũng có $(A'B'C'D') = \dfrac{\overline{N'B'}}{\overline{M'B'}}$ (2)

Nhưng do định lý Thalès, $\dfrac{\overline{NB}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{N'B'}}{\overline{M'B'}}$ (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra điều phải chứng minh.

1.2 Hàng điểm điều hòa

Bộ bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D được gọi là lập thành một *hàng điểm điều hòa*, nếu $(ABCD) = -1$. Khi đó, cặp điểm A, B chia điều hòa cặp điểm C, D hay cặp điểm A, B liên hợp điều hòa đối với cặp điểm C, D.

Định lý 1.2.1. *Cho A, B, C, D thẳng hàng. Khi đó*

$$\begin{aligned}(ABCD) = -1 &\Longleftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \quad \textbf{(Hệ thức Descartes)}\\ &\Longleftrightarrow IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID} \quad \textbf{(Hệ thức Newton)}\\ &\Longleftrightarrow \overline{CI} \cdot \overline{CD} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} \quad \textbf{(Hệ thức Mc Laurint)}\end{aligned}$$

với I là trung điểm đoạn thẳng AB

Chứng minh. Trên đường thẳng AB với gốc O, đặt $\overline{OA} = a, \overline{OB} = b, \overline{OC} = c$ và $\overline{OD} = d$. Khi đó

$$\overline{CA} = a - c, \overline{CB} = b - c, \overline{DA} = a - d, \overline{DB} = b - d$$

Do đó

$$\begin{aligned}(ABCD) = -1 &\Leftrightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-c} = -\frac{a-d}{b-d}\\ &\Leftrightarrow (a-c)(b-d) = -(a-d)(b-c) \Leftrightarrow 2(ab+cd) = (a+b)(c+d) \quad (\star)\end{aligned}$$

+ Chọn $O \equiv A$ ta được $a = 0$, do đó $(\star)$ trở thành

$$2cd = bc + bd \Longleftrightarrow \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

hay $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$
+ Chọn $O \equiv I$ ta được $b = -a$ và do đó $(\star)$ trở thành $2(-a^2 + cd) = 0 \iff cd = a^2$ hay $IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$
+ Chọn $O \equiv C$ ta được $c = 0$. Để ý rằng $a + b = 2i$, $(\star)$ trở thành $2ab = 2id \iff ab = id$ hay $\overline{CI} \cdot \overline{CD} = \overline{CA} \cdot \overline{CB}$

1.3 Chùm điều hòa

Trong mặt phẳng, tập hợp các đường thẳng đồng quy tại một điểm S, được gọi là một chùm đường thẳng tâm S.
Mở rộng. Tập hợp các đường thẳng đôi một song song cũng được gọi là một chùm đường thẳng có tâm tại điểm xa vô tận.

Định lý 1.3.1. *Cho chùm bốn đường thẳng a, b, c, d. Một đường thẳng Δ bất kỳ cắt a, b, c, d tại A, B, C, D theo thứ tự đó. Khi đó $(ABCD)$ không phụ thuộc vào vị trí của Δ*

Giá trị không đổi của tỷ số kép $(ABCD)$ được gọi là tỷ số kép của chùm bốn đường thẳng, ký hiệu $(abcd)$ hay $S(abcd)$ khi cần quan tâm đến tâm của chùm.

Khi $(abcd) = -1$ ta nói rằng chùm bốn đường thẳng a, b, c, d lập thành một chùm điều hòa. Khi đó, cặp đường thẳng a, b liên hợp điều hòa đối với cặp c, d.

Định lý 1.3.2. *Chùm bốn đường thẳng a, b, c, d lập thành một chùm điều hòa khi và chỉ khi mọi đường thẳng song song với một trong bốn đường thẳng, bị ba đường còn lại chia thành hai đoạn bằng nhau.*

Định lý 1.3.3. *Trong một chùm điều hòa, cặp đường liên hợp vuông góc khi và chỉ khi chúng là phân giác của góc tạo bởi cặp còn lại.*

1.4 Tứ giác toàn phần

Hình hợp bởi bốn đường thẳng, đôi một cắt nhau, không có ba đường nào đồng quy, được gọi là *hình tứ cạnh toàn phần* hay *hình tứ giác toàn phần*. Mỗi một đường thẳng, được gọi là một cạnh, giao điểm của hai cạnh gọi là đỉnh, cặp đỉnh không chung cạnh gọi là cặp đỉnh đối diện, đoạn thẳng nối cặp đỉnh đối diện gọi là đường chéo.

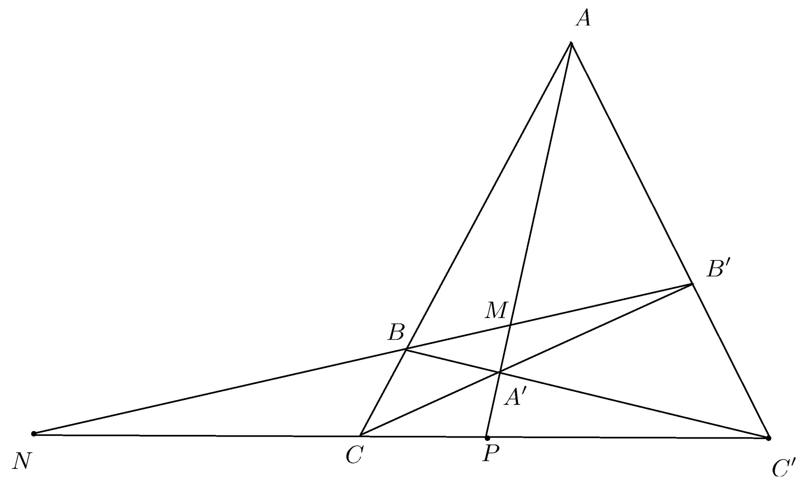
Định lý 1.4.1 (Về đường thẳng Gauss)**.** *Trong một hình tứ cạnh toàn phần, trung điểm ba đường chéo cùng nằm trên một đường thẳng.*

Định lý 1.4.2. *Trong hình tứ cạnh toàn phần, mỗi đường chéo bị hai đường chéo kia chia điều hòa.*

Chứng minh. Cho tứ giác toàn phần $ABCA'B'C'$. Gọi $M = AA' \cap BB', N = BB' \cap CC', P =$

$AA' \cap CC'$. Ta phải chứng minh

$$(AA'PM) = (BB'MN) = (CC'NP) = -1$$



Ta có

$$\begin{aligned}(AA'PM) &= B(AA'PM) = B'(AA'PM)\\ &= B'(C'CPN) = B(C'CPN)\\ &= B(A'APM) = (A'APM) = \frac{1}{(AA'PM)}\end{aligned}$$

Suy ra $(AA'PM) = 1$ hoặc $(AA'PM) = 1$. Nhưng nếu $(AA'PM) = 1$ thì $(AA', P) = (AA', M)$ tức là $M \equiv P$, vô lý. Điều đó chứng tỏ $(AA'PM) = -1$.
Các tỷ số kép còn lại chứng minh tương tự.

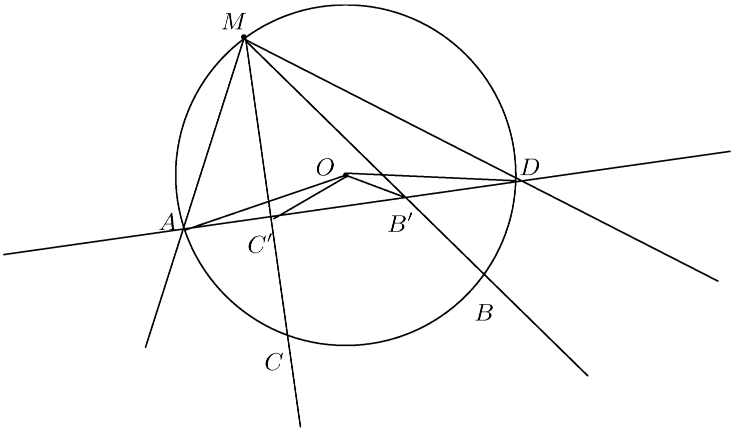
1.5 Tứ giác điều hòa

Định lý 1.5.1. *Cho trước bốn điểm $A, B, C, D \in (O)$ và một điểm M thay đổi của (O). Khi đó tỷ số kép $M(ABCD)$ không phụ phuộc vào M.*

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, coi đường tròn (O) có bán kính bằng 1. Đường thẳng AD cắt MB, MC tại B', C'. Khi đó

$$M(ABCD) = M(AB'C'D) = (AB'C'D) = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB'}}$$

Đặt $(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}) = x, (\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}) = y, (\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OA}) = z, (\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OB}) = t$, ký hiệu $[XYZ]$ để chỉ diện tích đại số của tam giác XYZ.



Ta có

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B'}} = \frac{[OC'A]}{[OC'B']} = \frac{OC' \cdot OA \cdot \sin x}{OC' \cdot OB' \cdot \sin y} = \frac{\sin x}{OB' \cdot \sin y}$$

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB'}} = \frac{[ODA]}{[ODB']} = \frac{OD \cdot OA \cdot \sin z}{OD \cdot OB' \cdot \sin t} = \frac{\sin z}{OB' \cdot \sin t}$$

Suy ra

$$\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB'}} = \frac{\sin x}{OB' \cdot \sin y} : \frac{\sin z}{OB' \cdot \sin t} = \frac{\sin x}{\sin y} : \frac{\sin z}{\sin t} - \text{const}$$

Giá trị không đổi của tỷ số kép đó được gọi là *tỷ số kép của bộ bốn điểm đồng viên* A, B, C, D, khi không sợ nhầm lẫn, chúng ta cũng ký hiệu $(ABCD)$.

Với tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O), nếu $(ABCD) = -1$ thì ta nói tứ giác nội tiếp $ABCD$ là một tứ giác điều hòa[1].

Với mỗi điểm $M \in (O)$, ký hiệu (MM) là để chỉ đường tiếp tuyến của (O) tại M.

Định lý 1.5.2. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Khi đó*

$$\begin{aligned} \textit{Tứ giác } ABCD \textit{ điều hòa} &\iff (ABCD) = -1 \\ &\iff (AA) \cap (CC) = P \in (BD) \\ &\iff (BB) \cap (DD) = Q \in (AC) \\ &\iff AB \cdot CD = BC \cdot DA \end{aligned}$$

Định lý 1.5.3. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) và $(AA) \cap (CC) = P \in (BD), (AC) \cap (BD) = Q$. Khi đó*

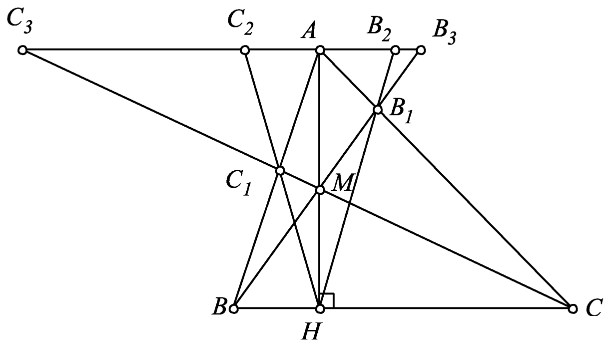
$$PQ = \frac{2}{\frac{1}{PB} + \frac{1}{PD}}$$

[1] Các kết quả chi tiết về tứ giác điều hòa, xem thêm Tài liệu giáo khoa chuyên toán Hình học 10, trang 146-165

Ứng dụng giải toán

1. Cho tam giác ABC với đường cao AH. Xét $M \in AH, CM \cap AB = C_1, BM \cap AC = B_1$. Chứng minh rằng $\angle MHB_1 = \angle MHC_1$

   Lời giải.
   Đường thẳng qua A, song song với BC, cắt HB_1, HC_1 tại B_2, C_2. Theo tính chất của tứ giác toàn phần, có $H(BAC_1B_1) = -1$. Suy ra $AB_2 = AC_2$ và do đó $\angle B_1HC = \angle C_1HB$ suy ra đpcm
   Nhận xét rằng HB, HA là cặp

   tia liên hợp của chùm, nên $HA \perp HB \Leftrightarrow HA, HB$ là phân giác của các góc tạo bởi HB_1, HC_1. ĐPCM

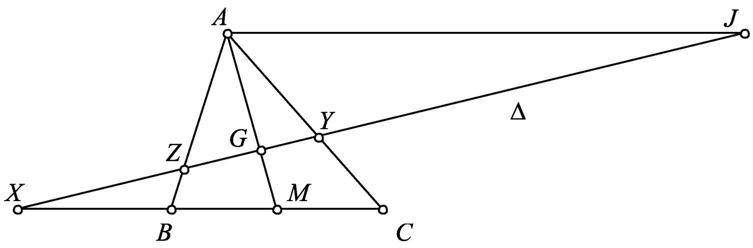
   Chú ý. Bằng cách kẻ đường thẳng qua A, song song với BC (hình vẽ), áp dụng định lý Thalès, đạt được $AC_2 = AB_2$, rồi cũng suy ra đpcm.

2. (*Hệ thức Descartes*) Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Một đường thẳng Δ qua G, cắt các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự tại X, Y, Z.

   (a) Chứng minh rằng trong ba đại lượng $\frac{1}{GX}, \frac{1}{GY}, \frac{1}{GZ}$ có một đại lượng bằng tổng hai đại lượng còn lại.

   (b) Các đường thẳng qua A theo thứ tự song song với GB, GC cắt Δ tại N, P. Chứng minh rằng trong ba đại lượng $\frac{1}{GX}, \frac{1}{GN}, \frac{1}{GP}$ có một đại lượng bằng tổng hai đại lượng còn lại.

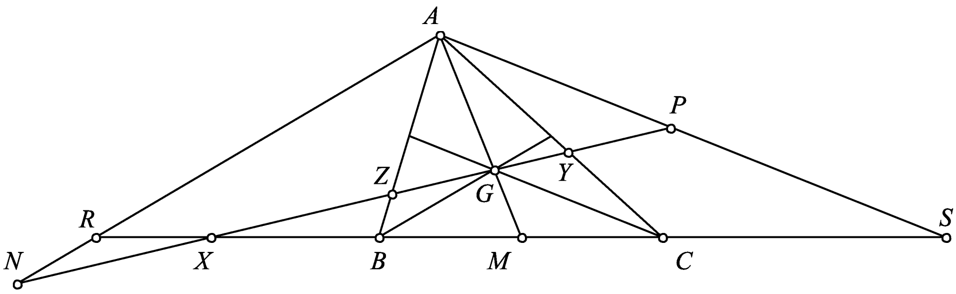
Lời giải. (a) Gọi M là trung điểm BC và J là gia điểm của đường thẳng qua A song song với BC với Δ. Do $(BCM\infty) = -1$ nên $(ZYGJ) = -1$. Từ đó, theo hệ thức Descartes ta có



$$\frac{2}{\overline{GJ}} = \frac{1}{\overline{GY}} + \frac{1}{\overline{GZ}}$$

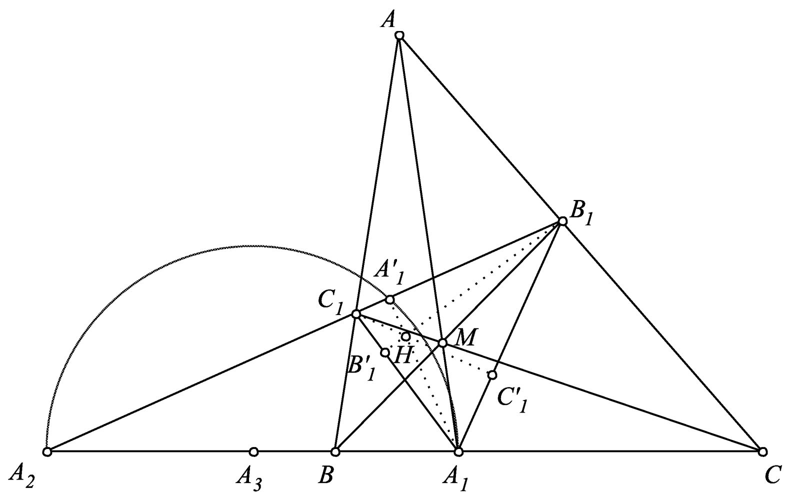
Mặt khác, do G là trọng tâm tam giác, nên $\overline{GJ} = -2\overline{GX}$. Suy ra đpcm

(b) Các đường thẳng qua A, song song với GB, GC cắt BC tại R, S. Khi đó $V_M^3\ :\ \triangle ARS \to \triangle GBC$ suy ra $\overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\ \ \forall O$



Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$. Do đó G là trọng tâm tam giác ARS. Áp dụng kết quả phần (a) có ngay đpcm.

3. (*Hệ thức Newton*) Cho điểm M ở bên trong tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(MA; BC), (MB; CA), (MC; AB)$. Các đường thẳng BC, B_1C_1 cắt nhau tại A_2, gọi A_3 là trung điểm A_1A_2. Các điểm B_2, C_2, B_3, C_3 được xác định tương tự. Gọi O, H theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng A_3, B_3, C_3 cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với OH



Ký hiệu $\omega_a(A_3; R_a), \omega_b(B_3; R_b)$ và $\omega_c(C_3; R_c)$ theo thứ tự là đường tròn đường kính A_1A_2, B_1B_2 và C_1C_2. Gọi A'_1, B'_1, C'_1 là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 theo thứ tự đó. Khi đó, do $\overline{HA_1} \cdot \overline{HA'_1} = \overline{HB_1} \cdot \overline{HB'_1} = \overline{HC_1} \cdot \overline{HC'_1}$, nên H nằm trên trục đẳng phương của ω_a và ω_b, của ω_b và ω_c, của ω_c và ω_a (1)

Mặt khác từ $(BCA_1A_2) = -1$ và A_3 là trung điểm A_1A_2, nên

$$R_a^2 = \overline{A_3A_1}^2 = \overline{A_3B} \cdot \overline{A_3C} = P_{A_3/(O)} = OA_3^2 - R^2 \Rightarrow P_{O/(\omega_a)} = OA_3^2 - R_a^2 = R^2$$

Hoàn toàn tương tự, cũng có $P_{O/(\omega_b)} = R^2 = P_{O/(\omega_c)}$ Suy ra O nằm trên trục đẳng phương của ω_a và ω_b, của ω_b và ω_c, của ω_c và ω_a (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

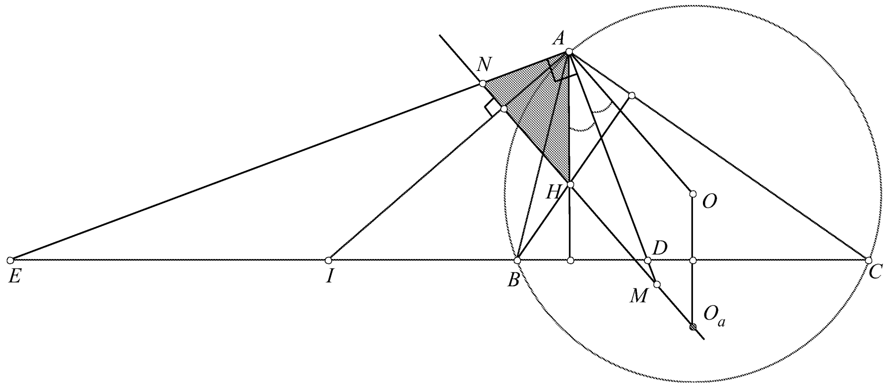
4. (*Hệ thức Newton*) Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên đường tròn sao cho BC không phải đường kính. Lấy A là một điểm trên đường tròn không trùng với B, C. AD, AE là các đường phân giác trong và ngoài của góc $\angle BAC$. I là trung điểm của DE. Qua trực tâm tam giác ABC kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt AD, AE tại M, N.

   (a) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

   (b) Xác định vị trí hình học của điểm A sao cho diện tích của tam giác AMN là lớn nhất.

(VMO 2010)

Lời giải.
1. Do AD, AE lần lượt là phân giác trong, phân giác ngoài của góc $\angle BAC$ nên $(BCDE) = -1$. Từ đó, do hai đường tròn trực giao với nhau khi và chỉ khi đường kính của đường tròn này bị đường tròn kia chia điều hòa, nên đường tròn đường kính DE trực giao với đường tròn (O). Suy ra $IA \perp AO$

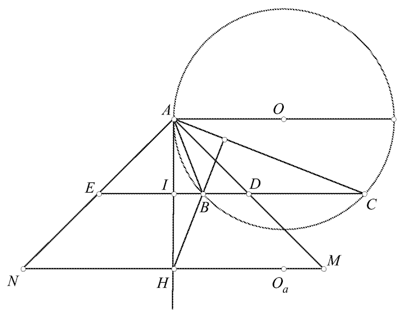


Do đó $MN \parallel OA$ (3.1)

Gọi O_a là điểm đối xứng với O qua BC. Khi đó, dễ dàng chứng minh được $OO_a \parallel AH$ và $OO_a = AH$. Suy ra tứ giác AHO_aO là hình bình hành. Do đó $HO_a \parallel OA$ (3.2)

Từ (3.1) và (3.2) suy ra MN đi qua O_a cố định.

2. Để ý rằng AO, AH đối xứng với nhau qua phân giác AD nên AD là phân giác trong của góc $\angle DAO$. Từ đó, do $AE \perp AD$ nên AE là phân giác ngoài của góc $\angle DAO$. Do đó $A(OHDE) = -1$. Theo chứng minh trên, $MN \parallel AO$, theo tính chất của chùm điều hòa thì MN bị ba tia AE, AH, AD chia thành hai đoạn bằng nhau, suy ra H là trung điểm MN.



Và do đó

$$S_{\triangle AMN} = 2S_{\triangle AHN} = HA \cdot HN \cdot \sin\angle NHA \tag{3.3}$$

Do tam giác MAN vuông tại A, H là trung điểm MN nên

$$HN = HA = 2R\cos A \quad \text{không đổi}$$

từ đó và (3.3) suy ra $S_{\triangle AMN}$ lớn nhất khi và chỉ khi $MN \parallel BC$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\angle AOO_a = \frac{\pi}{2}$ do đó, có hai vị trí của điểm A (hai đầu mút của đường kính song song với BC) trên đường tròn (O) sao cho $S_{\triangle AMN}$ lớn nhất, và giá trị lớn nhất ấy bằng $4R^2\cos^2 A$

Nhận xét.

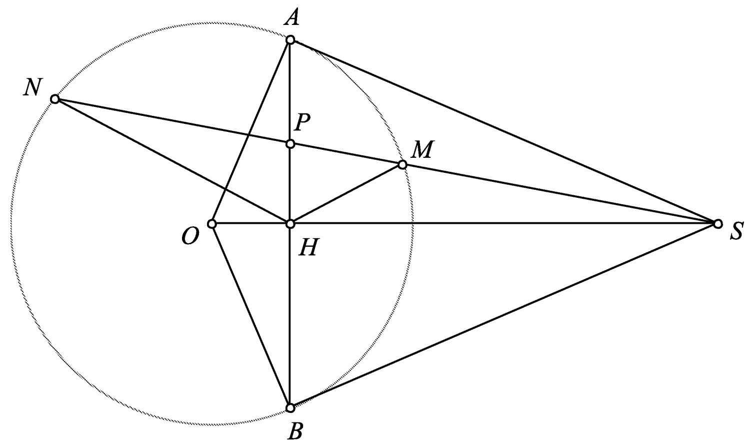
(a) Đây là bài toán có độ khó ở mức trung bình. Tuy nhiên, nhiều học sinh không thể lấy được điểm tối đa ở bài toán này. Chỗ dễ mất điểm nhất là không chứng minh $AH = OO_a$ và không xét hết được các trường hợp của hình vẽ khi lời giải phải phụ thuộc vào hình vẽ.

(b) Trong lời giải trên đã sử dụng kiến thức về hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa để giải, điều đó làm cho lời giải gọn gàng hơn. Tuy nhiên, cũng không nhất thiết phải sử dụng đến những kiến thức đó. Nhưng khi đó đòi hỏi phải xét hết các trường hợp, các thế của hình vẽ.

(c) Ở phần 1, cũng có thể sử dụng hệ thức Newton đối với hàng điểm điều hòa trong việc chỉ ra IA tiếp xúc với đường tròn (O). Khi đó, không cần phải sử dụng đến kiến thức về đường tròn trực giao.

5. (*Hệ thức Maclaurin*)Cho đường tròn (O) và điểm S ở ngoài. Kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn (A, B là tiếp điểm). Đường thẳng Δ qua S, cắt (O) tại $M, N, AB \cap SO = H$. Chứng minh rằng $\angle MHA = \angle NHA$

Lời giải.



Do $(SPMN) = -1$ nên $H(SPMN) = -1$. Nhưng $HS \perp HP$, nên HS, HP là phân giác của các góc tạo bởi HM, HN (ĐPCM)

6. (*Hệ thức Maclaurin*) Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB, CD của tứ giác nội tiếp $ABCD$. Đường tròn (ABN) cắt lại (CD) tại P và đường tròn (CDM) cắt lại (AB) tại Q. Gọi $O = AC \cap BD$. Chứng minh rằng P, Q, O thẳng hàng.

Lời giải 1. Nếu $AB \parallel CD$ thì $P \equiv N, Q \equiv M$ và M, O, N thẳng hàng. ĐPCM
Nếu $AB \cap CD = F$, do các bộ bốn điểm $(A, B, N, P), (C, D, M, Q), (A, B, C, D)$ đồng viên, nên

$$\overline{FN} \cdot \overline{FP} = \overline{FA} \cdot \overline{FB} = \overline{FC} \cdot \overline{FD} \quad (1)$$

và

$$\overline{FM} \cdot \overline{FQ} = \overline{FC} \cdot \overline{FD} = \overline{FA} \cdot \overline{FB} \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $(FPCD) = -1$ và từ (2) suy ra $(FQAB) = -1$ (Do hệ thức Maclaurint). Từ đó, do phép chiếu xuyên tâm (tâm O) bảo toàn tỷ số kép, nên P, O, Q thẳng hàng. ĐPCM.

Lời giải 2.Nếu $AB \parallel CD$ hoặc $AD \parallel BC$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên.

Gọi E, F và P' theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AD; BC), (AB; CD)$ và $(EO; CD)$

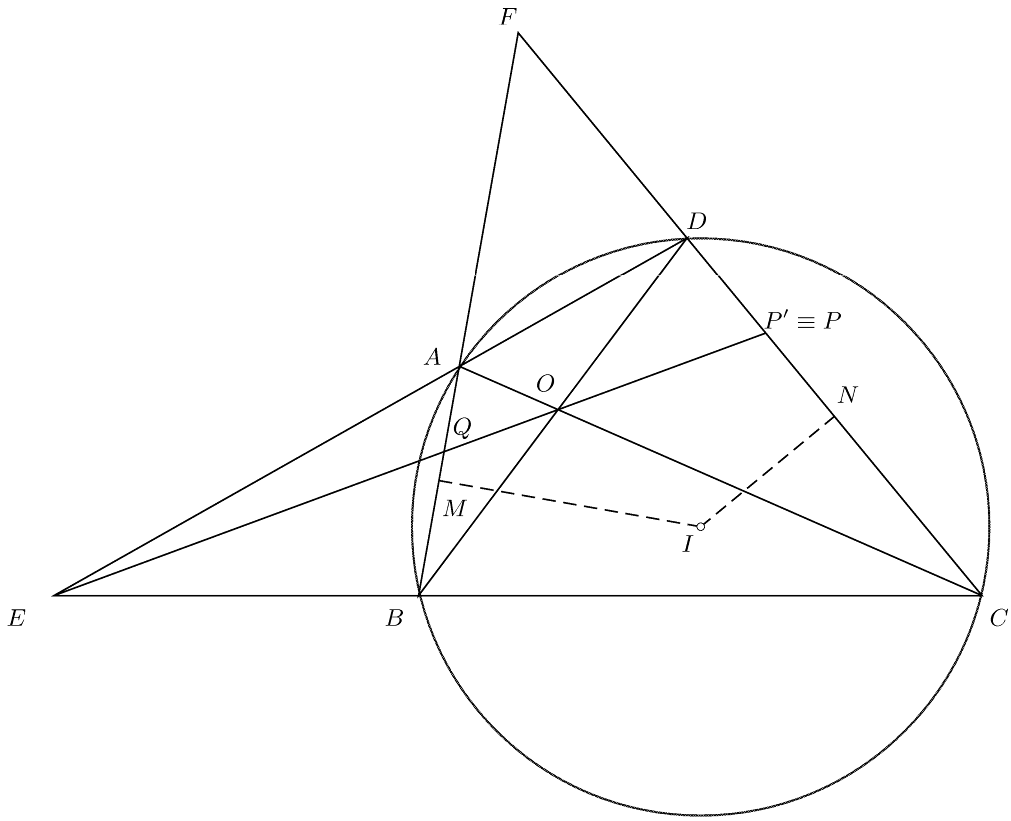
Trong hình tứ giác toàn phần $EBCODA$, đường chéo CD bị hai đường chéo EO, BA chia điều hòa, do đó $(CDP'F) = -1$

Theo hệ thức Mc Laurint, ta có $\overline{FP'} \cdot \overline{FN} = \overline{FD} \cdot \overline{FC}$ (1)

Mặt khác, do tứ giác $ABCD$ nội tiếp, nên $\overline{FD} \cdot \overline{FC} = \overline{FA} \cdot \overline{FB}$ (2)

Từ (1),(2) suy ra $\overline{FP'} \cdot \overline{FN} = \overline{FA} \cdot \overline{FB}$ hay $P' \in (ABNP)$ tức là $P' \equiv P$. Vậy $P \in (EO)$.

Tương tự, cũng chứng minh được $Q \in (EO)$.



7. (*Hệ thức Maclaurin*) Cho tam giác ABC không cân với ba đường cao AD, BE, CF. Đường thẳng (Δ) đi qua D, song song với EF, cắt các đường thẳng AB, AC tại M, N, các đường thẳng EF, BC cắt nhau tại P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP đi qua trung điểm BC

Lời giải. Theo tính chất của tứ giác toàn phần, ta có $(BCDP) = -1$. Khi đó, nếu gọi Q là trung điểm BC, theo hệ thức McLaurint ta có

$$\overline{DQ} \cdot \overline{DP} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} \tag{1}$$

Mặt khác, do tứ giác $BCEF$ nội tiếp (đường tròn đường kính BC) và $MN \parallel EF$ nên

$$\begin{aligned}(NC; NM) &\equiv (EC; EF) \pmod{\pi}\\ &\equiv (BC; BF) \pmod{\pi}\\ &\equiv (BC; BM) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

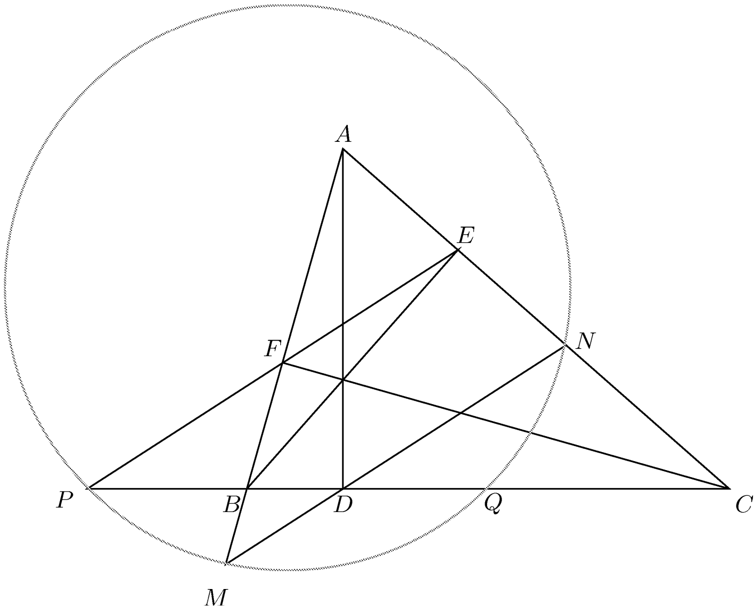
Suy ra bốn điểm B, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn. Do đó

$$\overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DM} \cdot \overline{DN} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\overline{DQ} \cdot \overline{DP} = \overline{DM} \cdot \overline{DN}$$

tức là bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một đường tròn.



8. (*Hệ thức Maclaurin*) Cho tam giác $ABC \quad (AB \neq AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O và ngoại tiếp quanh đường tròn I. Đường tròn (I) tiếp xúc BC tại D. Giả sử rằng $OI \perp AD$, chứng minh rằng AD là đường đối trung của tam giác.

   Lời giải.

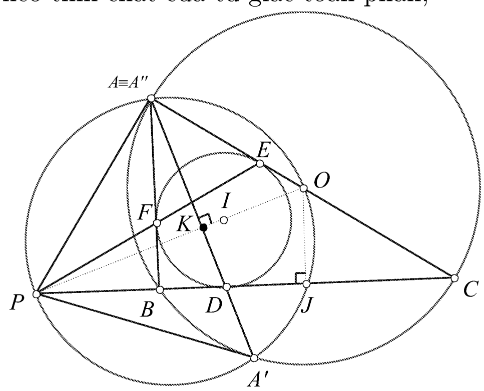
   Trước hết, xin phát biểu và không chứng minh một kết quả quen thuộc sau

   Bổ đề. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác không cân ABC tiếp xúc với BC, CA và AB tại D, E và F theo thứ tự đó. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P. Khi đó $IP \perp AD$.

   Gọi P là giao điểm của các đường thẳng EF và BC, khi đó, theo bổ đề ta có

   $$IP \perp AD \Rightarrow O \in (IP) \text{ và } OP \perp AD \tag{1}$$

   Gọi D' là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (I) và A' là giao điểm thứ hai của AD với đường tròn (O). Theo tính chất của tứ giác toàn phần,



   thì $(BCPD) = -1$, từ đó và do $OP \perp AD$ nên đường thẳng AD là đường đối cực của P đối với đường tròn (O). Bởi vậy, PA, PA' tiếp xúc với (O).

Nhưng vì $(BCPD) = -1$, theo định lý 2, ta được D là chân đường đối trung kẻ từ A. Điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ta có thể sử dụng hệ thức Maclaurin để giải đơn giản hơn, mà không phải sử dụng đến khái niệm cực và đối cực, như sau

Gọi J, K theo thứ tự là trung điểm BC và giao điểm của OI với AD, giả sử đường thẳng PA cắt đường tròn (O) tại hai điểm A, A''.
Khi đó, do $(BCPD) = -1$ nên theo hệ thức Maclaurin ta có

$$\overline{PJ} \cdot \overline{PD} = \overline{PB} \cdot \overline{PC} \tag{1}$$

Nhưng do $OK \perp KD$ và $OJ \perp JD$ nên tứ giác $OKDJ$ nội tiếp. Do đó

$$\overline{PK} \cdot \overline{PO} = \overline{PJ} \cdot \overline{PD} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{PK} \cdot \overline{PO} = \overline{PB} \cdot \overline{PC} = P_{P/(O)} = \overline{PA} \cdot \overline{PA''}$. Từ đó, nếu $A'' \neq A$ thì bốn điểm A, A'', O, K cùng nằm trên một đường tròn . Do $OK \perp KA$ nên $OA'' \perp AA''$ hay $OA'' \perp PA''$. Suy ra PA'' tiếp xúc với (O) và $A'' \equiv A$ (hình vẽ).

Vậy PA tiếp xúc với (O). Nhưng vì $(BCPD) = -1$, theo định lý 2, ta được D là chân đường đối trung kẻ từ A. Điều phải chứng minh.

9. (*Hệ thức Maclaurin*) Trong mặt phẳng cho trước hai điểm A, B cố định. Xét điểm C thay đổi trong cùng mặt phẳng sao cho $\angle BCA = \alpha$ với $\alpha \in (0; \pi)$ cho trước. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với AB, BC và CA tại D, E và F theo thứ tự đó. Các đường thẳng AI, BI lần lượt cắt đường thẳng EF tại MN. Chứng minh rằng

   (a) Đoạn thẳng MN có độ dài không đổi.

   (b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.

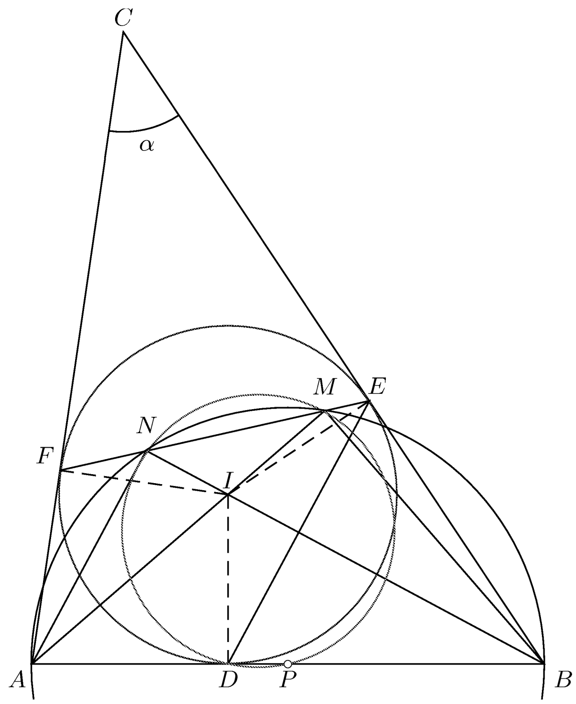
(VMO 2009)

Lời giải.

1. Ta sẽ chứng minh $\angle AMB = \angle ANB = \frac{\pi}{2}$
Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
(NF; NI) &\equiv (EF; NI) \pmod{\pi} \\
&\equiv (EF; FI) + (FI; ID) + (ID; NI) \pmod{\pi} \\
&\equiv \frac{\pi}{2} + (DE; DF) + (AF; AD) + \frac{\pi}{2} + (BD; BI) \pmod{\pi} \\
&\equiv (AF; AI) + (AI; AD) + (BD; BI) + (DE; DF) \pmod{\pi} \\
&\equiv (AF; AI) + (DE; DF) + (DF; DE) \equiv (AF; AI) \pmod{\pi}
\end{aligned}$$

Do đó $N \in (AIF)$ mà $\angle AFI = \frac{\pi}{2}$ nên $\angle ANB = \angle ANI = \frac{\pi}{2}$
Tương tự, cũng có $\angle AMB = \angle IMB = \frac{\pi}{2}$



Từ đó, tứ giác $ABMN$ nội tiếp đường tròn đường kính AB. Theo định lý sine, ta có

$$MN = AB \cdot \sin\angle MAN = AB \cdot \sin\angle IAN = AB \cdot \sin\angle IFM = AB \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - \text{không đổi}$$

2. Gọi P là trung điểm AB, khi đó P cố định. Ta sẽ chứng minh P nằm trên đường tròn (DMN).

Thật vậy, nếu tam giác CAB cân tại C thì $D \equiv P$ do đó đường tròn (DMN) đi qua P. Nếu $CA \neq CB$ thì gọi S là giao điểm của EF với AB, để ý rằng CD, AE, BF đồng quy, ta có bốn điểm S, D, A, B theo thứ tự đó lập thành một hàng điểm điều hòa. Suy ra

$$\overline{SP} \cdot \overline{SD} = \overline{SA} \cdot \overline{SB} \quad \text{(Hệ thức Mc Laurint)}$$

Nhưng

$$\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SM} \cdot \overline{SN} \quad \text{(Do tứ giác } ABMN \text{ nội tiếp)}$$

Vậy $\overline{SP} \cdot \overline{SD} = \overline{SM} \cdot \overline{SN}$ suy ra $P \in (MND)$ (ĐPCM)

Nhận xét.

(a) Đây là bài toán hình học khá hay, được phát triển từ một tính chất của tam giác ngoại tiếp đường tròn ($\angle AMB = \angle ANB = 90°$).Về cơ bản, đây là bài toán thuộc chương trình Hình học 9, tuy nhiên, nếu không có các kiến thức về hướng, hàng điểm điều hòa, ... thì lời giải sẽ khá cồng kềnh và phải phụ thuộc vào hình vẽ rất nhiều.

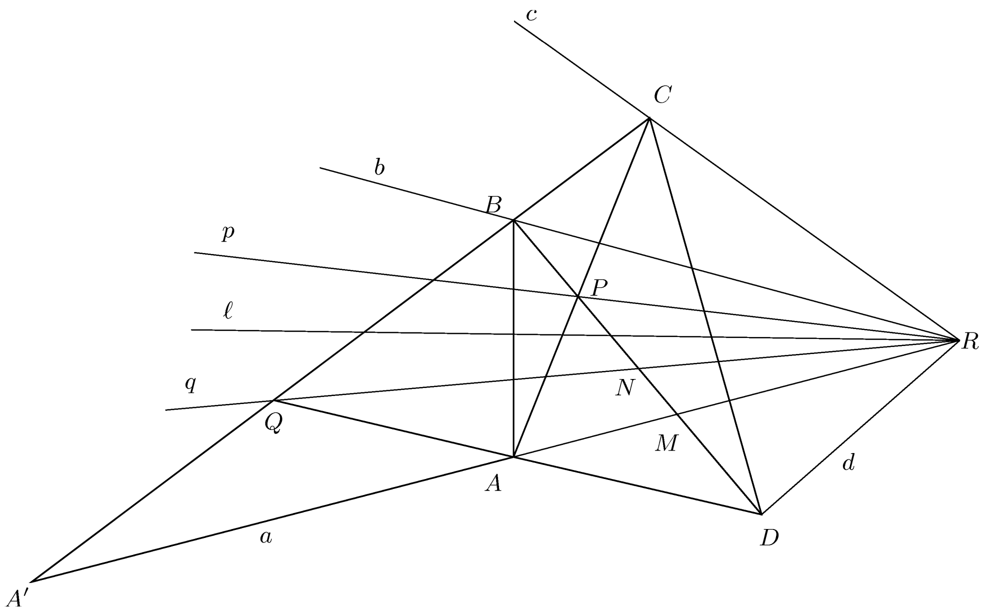
(b) Ở phần 1 của bài toán việc sử dụng góc định hướng là cần thiết và làm cho lời giải gọn gàng hơn. Nếu không, cần phải xem xét đến trường hợp M, N ở trong hay ở ngoài đoạn EF.

(c) Phần 2, tất nhiên có thể sử dụng tính chất P là tâm của đường tròn $(ABMN)$ để chỉ ra $\angle MPN = 2\angle MBI = 2\angle IAN = \angle MDN$.

10. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $P = AC \cap BD, Q = AD \cap BC$, và R là một điểm tùy ý trong mặt phẳng, không nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA, AC, BD. Chứng minh rằng

$$(RA; RD) \equiv (RC; RB) \pmod{\pi} \Leftrightarrow (RB; RP) \equiv (RQ; RA) \pmod{\pi}$$

Lời giải.



Gọi ℓ là phân giác của $\angle ARB$. Ký hiệu $x := RX$, $\forall X$ và gọi $p' = Đ_\ell(q)$.

Ta có

$$\begin{aligned}(abcq) &= (A'BCQ)\\ &= (MBPD) \quad \text{(chiếu tâm xuyên tâm, tâm chiếu } A)\\ &= (abpd) = (badp)\end{aligned}$$

Nếu $(a; d) \equiv (c; b) \pmod{\pi}$, do tính đối xứng ta có

$$(badp') = (abcq) = (badp)$$

Suy ra $p' \equiv p$ hay $(RB; RP) \equiv (RQ; RA) \pmod{\pi}$

Chiều ngược lại chứng minh tương tự

11. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Giả sử có điểm $P \in AD$ và điểm $Q \in BC$ sao cho

$$\angle APB = \angle CPD, \angle AQB = \angle CQD$$

Chứng minh rằng $OP = OQ$, trong đó $O = AC \cap BD$.

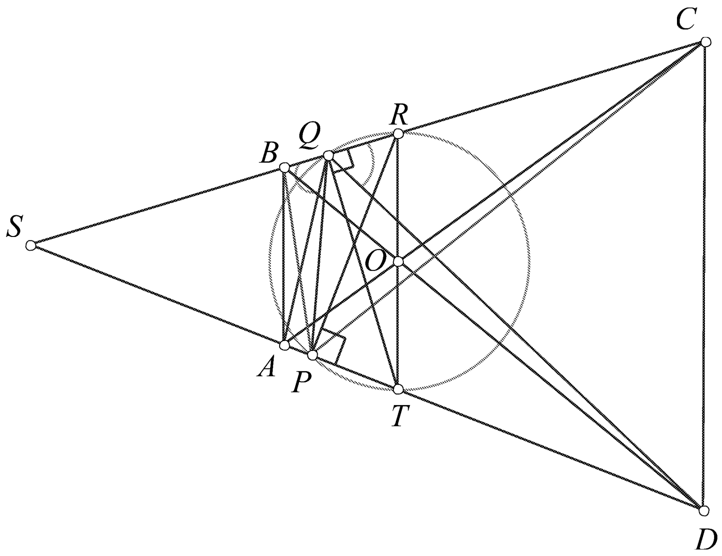
Lời giải.

+ *Trường hợp 1.* $AD \not\parallel CD$ (Hình 1) Gọi S là giao điểm của AD và BC.

Phân giác của góc $\angle AQD$ cắt AD tại T. Khi đó $(ADST) = -1$ (1)

Phân giác của góc $\angle BPC$ cắt BC tại R. Khi đó $(CBSR) = -1$ (2)

Từ (1) và (2), do phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép, suy ra T, O, R thẳng hàng. Do $\angle RPT = \angle RQT = 90^\circ$ nên P, Q nằm trên đường tròn đường kính TR. Ta chỉ cần chứng minh O là trung điểm TR là đủ.



Hình 1

Do PR, PS theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\angle BPC$ nên

$$\frac{RB}{RC} = \frac{SB}{SC} \tag{3}$$

Do QT, QS theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\angle AQD$ nên

$$\frac{SA}{SD} = \frac{TA}{TD} \tag{4}$$

Từ đó, do $\dfrac{SA}{SD} = \dfrac{SB}{SC}$ nên $\dfrac{RB}{RC} = \dfrac{TA}{TD}$ suy ra AB, TR, CD đôi một song song.

Theo định lý Thalès ta có

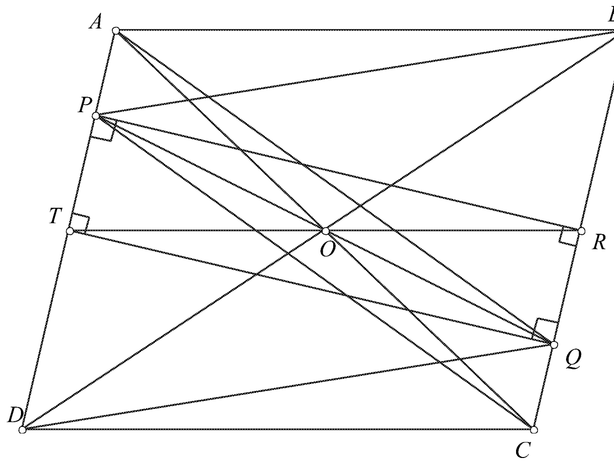
$$OT = \frac{DO}{DB} \cdot AB, OR = \frac{BO}{BD} \cdot CD$$

Do đó

$$OT = OR \Leftrightarrow AB \cdot DO = CD \cdot BO \Leftrightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$$

Theo định lý Thalès, đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do đó $OT = OR$, điều phải chứng minh

+ *Trường hợp 2.* Nếu $AD \parallel BC$ hay $ABCD$ là hình bình hành (Hình 2).



Hình 2

Phân giác của góc $\angle AQD$ cắt AD tại T và phân giác của góc $\angle BPC$ cắt BC tại R.

Do $P(ARBD) = -1$ và $BC \parallel PA$ nên R là trung điểm BC. Tương tự, T là trung điểm của AD.

Do $AD \parallel BC$ và $PR \perp AD, QT \perp BC$ nên P, Q, R, T là đỉnh của một hình chữ nhật có tâm O, suy ra $OP = OQ = OT = OR$, điều phải chứng minh

12. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi E, F, G theo thứ tự là giáo điểm của các cặp đường thẳng AB và CD, BC và DA, AC và BD. Các đường tròn $(DAE), (DCF)$ cắt nhau tại điểm thứ hai H. Phân giác của góc $\angle AHB$ cắt AB tại I, phân giác của góc $\angle DHC$ cắt CD tại J. Chứng minh rằng I, G, J thẳng hàng.

    Lời giải 1. Từ giả thiết suy ra $(HD; HE) = (AD; AE) = (AD; AB) = (CD; CB) = (CD; CF) = (HD; HF) \pmod{\pi}$ do đó H, D, F thẳng hàng.

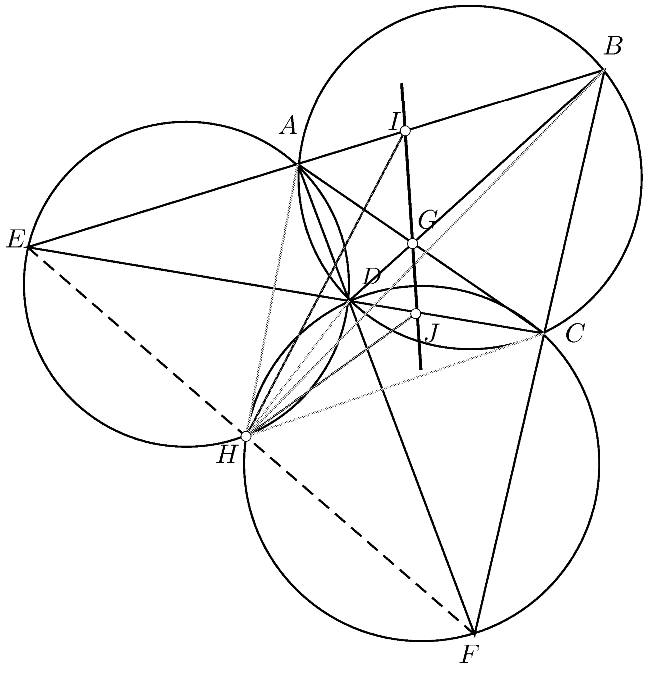
    Áp dụng bổ đề Mi-ken cho tam giác BEC, ta được các đường tròn $(BAF), (CFD)$ và (DEA) cùng đi qua một điểm (khác D). Do đó bốn đường tròn $(BAF), (CFD)$, $(DEA), (EAB)$ cùng đi qua H.

    Vậy
    $$(HA; HD) = (EA; ED) = (EB; EC) = (HB; HC) \pmod{\pi}$$
    và
    $$\begin{aligned}(CB; CH) &= (CB; CD) + (CD; CH) \pmod{\pi} \\ &= (AB; AD) + (FD; FH) \pmod{\pi} \\ &= (EA; EH) \pmod{\pi} = (DA; DH) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

    Suy ra $\triangle HCB \backsim \triangle HDA$. Vì vậy $\frac{HC}{HD} = \frac{HB}{HA} = \frac{BC}{DA}$

    Ta có $\frac{IB}{IA} = \frac{JC}{JD} = \frac{HC}{HD} = \frac{BC}{DA} = \frac{GC}{GD} = \frac{GB}{GA} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{IC}{ID} = \dfrac{GC}{GD} \\ \dfrac{IB}{IA} = \dfrac{GB}{GA} \end{cases}$

Suy ra GI, GJ là phân giác của góc $\angle AGB, \angle CGD$ theo thứ tự đó và vì vậy, I, G, J thẳng hàng.



Lời giải 2.

Từ giả thiết, suy ra $(HD;HE) \equiv (AD;AE) \equiv (AD;AB) \equiv (CD;CB) \equiv (CD;CF) \equiv (HD;HF) \pmod{\pi}$. Suy ra E, H, F thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề Mi-ken cho tam giác BEC ta được các đường tròn $(BAF), (CFD)$ và (EDA) cùng đi qua một điểm (khác D) và do đó, bốn đường tròn $(EDA), (FCD)$, $(FAB), (EBC)$ cùng đi qua H.

Mặt khác

$$(D, C, E, J) = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} : \frac{\overline{JD}}{\overline{JC}} = \frac{HD \cdot \sin(HE;HD)}{HC \sin(HE;HC)} : \frac{HD \sin(HJ;HD)}{HE \sin(HJ;HE)}$$
$$= \frac{\sin(AD;AB)}{\sin(BC;BA)}$$

và tương tự $(B, A, E, I) = \frac{\sin(AD;AB)}{\sin(BC;BA)}$ Từ đó, và do phép chiếu xuyên tâm (tâm G) bảo toàn tỷ số kép, suy ra G, I, J thẳng hàng.

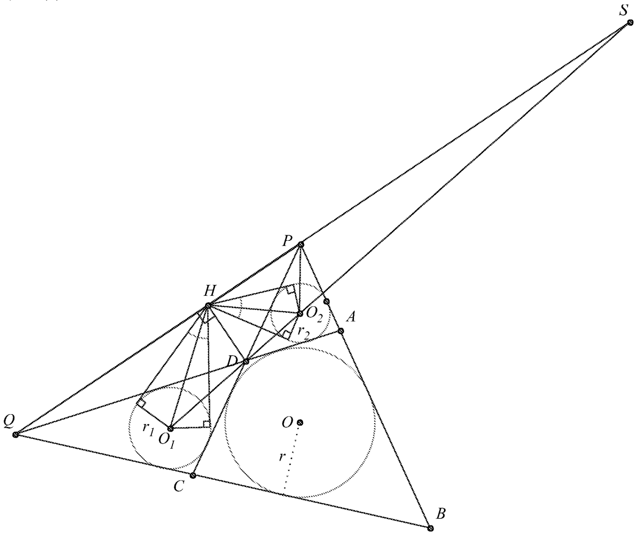
13. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Các tia BA, CD cắt nhau tại P, các tia BC, DA cắt nhau tại Q. Gọi H là hình chiếu của D trên PQ. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn khi và chỉ khi đường tròn nội tiếp của các tam giác ADP, CDQ được nhìn từ H dưới các góc bằng nhau.

(Russia 2008 - Grade 11)

Lời giải.

Gọi $(O_1;r_1), (O_2;r_2)$ theo thứ tự là đường tròn nội tiếp các tam giác QCD, PAD.

Giả sử S là giao điểm của PQ và O_1O_2. Khi đó H nhìn các đường tròn $(O_1),(O_2)$ dưới cùng một góc khi và chỉ khi $\frac{HO_1}{HO_2}=\frac{r_1}{r_2}$ điều này tương đương với $\frac{HO_1}{HO_2}=\frac{O_1D}{O_2D}$ (vì D là tâm vị tự trong của $(O_1),(O_2)$) hay tương đương với HD là phân giác của $\angle O_1HO_2$.



Để ý rằng $HD\perp HS$, nên H nhìn các đường tròn $(O_1),(O_2)$ dưới cùng một góc khi và chỉ khi $(O_1O_2DS)=-1$ khi và chỉ khi S là tâm vị tự ngoài của $(O_1),(O_2)$.

Nếu tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn $(O;r)$ thì theo định lý về trục vị tự của ba đường tròn , S,P,Q thẳng hàng. Từ đó, theo lập luận trên, H nhìn các đường tròn $(O_1),(O_2)$ dưới cùng một góc α.

Ngược lại, giả sử H nhìn các đường tròn $(O_1),(O_2)$ dưới cùng một góc α. Gọi $(O;r)$ là đường tròn bàng tiếp trong góc P của tam giác PAD

Ta có

$$(O_1;r_1)\xrightarrow{V(S;\frac{r_2}{r_1})}(O_2;r_2)\xrightarrow{V(P;\frac{r}{r_2})}(O;r)$$

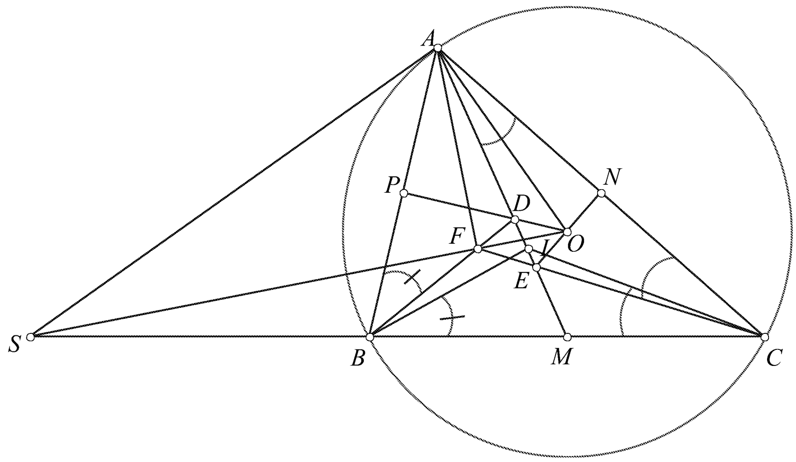
Vậy $V(Q;\frac{r}{r_2}=V(P;\frac{r}{r_2})\circ V(S;\frac{r_2}{r_1})$ biến (O_1) thành (O), do đó (O) là đường tròn bàng tiếp trong góc Q của tam giác QCD

Nhận xét. Nếu $O_1O_2\parallel PQ$ thì kết luận của bài toán là hiển nhiên.

14. Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Trung trực các cạnh AB,AC cắt trung tuyến AM tại D,E. Các đường thẳng BD,CE cắt nhau tại F. Chứng minh rằng A,P,N,F cùng nằm trên một đường tròn (ở đây N,P theo thứ tự là trung điểm các cạnh CA,AB).

(USAMO 2008)

Lời giải 1.



Lấy điểm I trên DE sao cho $\angle EAC = \angle ECA = \angle ICB$. Khi đó $\angle FCB = \angle ICA$ và $\triangle ACM \backsim \triangle CIM$, suy ra

$$MC^2 = AM \cdot IM \Longrightarrow MB^2 = AM \cdot IM \Longrightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{BM}{IM}$$

do đó $\triangle ABM \backsim \triangle BIM$ suy ra $\angle IBM = \angle MAB = \angle DAB = \angle FBA$. Từ đó I, F là cặp điểm liên hợp đẳng giác của tam giác ABC.

Khi đó $\angle PAF = \angle BAF = \angle IAC = \angle BCI$ suy ra $\triangle ABF \backsim \triangle CBI$ suy ra $\triangle APF \backsim \triangle CMI$. Từ đó

$$\angle PFA = \angle MIC = \angle IAC + \angle ICA = \angle BCA = \angle PNA$$

do đó tứ giác $APFN$ nội tiếp, điều phải chứng minh

Lời giải 2. Do cách xác định điểm F ta có

$$\angle BFC = 2\angle BAC = \angle BOC$$

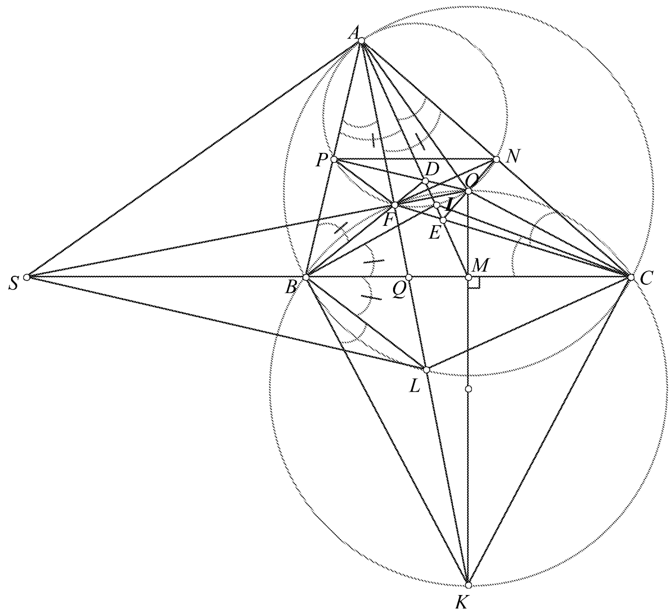
suy ra tứ giác $BCOF$ nội tiếp trong đường tròn ω. Gọi S là giao điểm của OF với tiếp tuyến của (O) tại A và S' là giao điểm của OF với BC.

Lấy điểm I trên DE sao cho $\angle EAC = \angle ECA = \angle ICB$. Khi đó $\angle FCB = \angle ICA$ và $\triangle ACM \backsim \triangle CIM$, suy ra

$$MC^2 = AM \cdot IM \Longrightarrow MB^2 = AM \cdot IM \Longrightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{BM}{IM}$$

do đó $\triangle ABM \backsim \triangle BIM$ suy ra $\angle IBM = \angle MAB = \angle DAB = \angle FBA$. Từ đó I, F là cặp điểm liên hợp đẳng giác của tam giác ABC, do AM là trung tuyến nên AF là đường đối trung của tam giác ABC.

Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại L. Khi đó, do AF là đường đối trung của tam giác ABC nên A, F, L thẳng hàng. Do các tứ giác $BCOF, BLCO$ nội tiếp nên $L \in (BCOF)$ và L là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BLC}$ và do đó FL là phân giác góc $\angle BFC$



Gọi K là giao điểm thứ hai của AL với (O), khi đó tứ giác $ABKC$ là tứ giác điều hòa. Từ đó, với $Q = AL \cap BC$, suy ra

$$(KQLA) = -1 \tag{1}$$

Do tứ giác $OFBC$ nội tiếp, nên

$$\angle BFK = \angle BOK = \angle BAC = \angle KBC = \angle KBQ$$

Suy ra $\triangle KBQ \backsim \triangle KFB$. Từ đó

$$\overline{KL} \cdot \overline{KA} = \overline{KB}^2 = \overline{KF} \cdot KQ$$

Suy ra

$$\overline{KL} \cdot \overline{KA} = \overline{KF} \cdot \overline{KQ} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra F là trung điểm của AL (do hệ thức Maclaurin). Do đó $OF \perp FA$, suy ra $F \in (ANOP)$, điều phải chứng minh

Nhận xét. Ta cũng có thể chứng minh S, F, O thẳng hàng, từ đó suy ra

$$\overline{SF} \cdot \overline{SO} = \overline{SA}^2$$

và thu được $SO \perp AF$

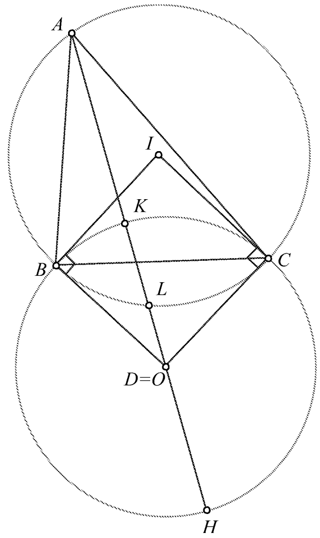
15. Cho điểm A ở ngoài đường tròn (O). Xét $B, C \in (O)$ sao cho $AB \neq AC$ và AO là đường đối trung của tam giác ABC. Chứng minh rằng tâm đường tròn (ABC) luôn nằm trên một đường thẳng cố định. (Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC luôn đi qua một điểm cố định khác A)

Lời giải.

Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Gọi D là giao điểm của tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (I), khi đó D nằm trên đường đối trung của tam giác ABC kẻ từ A. Ngoài ra $OB = OC, DB = DC$

Nếu $D \neq O$, thì đường thẳng OD là đường trung trựcc của đoạn BC. Từ đó, do giả thiết A thuộc vào trung trực của BC hay $AB = AC$ (mâu thuẫn với giả thiết). Vậy $D \equiv O$.

Do OB, OC là tiếp tuyến của (I) nên $(I) \perp (O)$. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại K, H và cắt lại đường tròn (I) tại L. Do $A, (O)$ cố định nên K, H cố định. Do $(I) \perp (O)$ nên $(ALKH) = -1$ từ đó L cố định.



Bài tập tự giải

1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn . Các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại X, các đường thẳng AD, BC cắt nhau tại Y. Các đường thẳng AC, BD cắt đường thẳng XY tại P, Q. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm AC, BD. Chứng minh rằng P, Q, E, F đồng viên.

   Hint. Gọi $Z = AC \cap BD$. Khi đó $(ACZP) = (BDZQ) = -1$

2. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AD \cap BC = E, AB \cap CD = F$. Xét $G, H \in EF, M \in AD, N \in BC$. Gọi I, J là giao điểm hai đường chéo của các tứ giác $ADHG, BCGH$. Chứng minh rằng EF, MI, NJ đồng quy khi và chỉ khi AB, CD, MN đồng quy.

3. Cho tam giác ABC có $\angle CAB < 90°$ nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở P. Đoạn PO cắt (O) tại N và cắt BC tại M. Chứng minh rằng $\angle MAN = \angle PAN$

   (Đường thẳng AP là đường đối trung của tam giác ABC)

4. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm AC, BD. Chứng minh rằng $\angle AMB = \angle AMD \Longleftrightarrow \angle BNA = \angle BNC$
   Hint. Cùng tương đương với tứ giác $ABCD$ điều hòa.

5. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). $AB \cap CD = S, AC \cap BD = I, AD \cap BC = J$. Qua S, kẻ hai tiếp tuyến SM, SN tới đường tròn (M, N là tiếp điểm). Chứng minh rằng M, N, I, J thẳng hàng.

6. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu của O trên AC. Chứng minh rằng $\angle BHA = \angle DHA$

   Hint. Gọi X, Y, Z, T theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với AB, BC, CD, DA. Khi đó XT, YZ, BD, OH đồng quy tại S và $(BDSP) = -1$, ở đây $P = AC \cap BD$.

7. Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Một đường thẳng Δ qua O, cắt các đường thẳng AB, BC, CD và DA tại M, Q, N và P theo thứ tự đó. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(CM; AN), (AQ; CP), (DM; BN), (DQ; BP)$ tương ứng. Chứng minh rằng X, Y, Z, T thẳng hàng.

   Hint. Gọi $K = AB \cap CD, L = AD \cap BC, H = KO \cap BC$. Khi đó $(LHBC) = -1$. Sử dụng tính chất phép chiếu xuyên tâm, chứng minh $X, Y, Z, T \in KL$.

8. Cho tam giác ABC nhọn. Từ A kẻ các tiếp tuyến AA_1, AA_2 tới đường tròn đường kính BC (A_1, A_2 là tiếp điểm). Các điểm B_1, B_2, C_1, C_2 được xác định tương tự. Chứng minh rằng $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2$ đồng viên.

   Hint. A_1, A_2, H thẳng hàng.

9. Cho tam giác ABC. Lấy các cạnh BC, CA, AB làm đáy, dựng ra ngoài các hình vuông có tâm lần lượt là A', B', C'. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của tam giác $A'B'C'$ là tâm đẳng phương của đường tròn nội tiếp các hình vuông.

10. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Tiếp tuyến tại A, B của (O_1) cắt nhau ở Q. Xét điểm M trên đường tròn (O_1). Các đường thẳng AM, BM cắt lại (O_2) tại N, P theo thứ tự đó. Chứng minh rằng đường thẳng MQ luôn đi qua trung điểm NP

11. Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi M, N là tiếp điểm của (O) với AB, CD. Gọi A', B', M' là hình chiếu của A, B, M trên CD, và D', C', N' là hình chiếu của D, C, N trên AB theo thứ tự đó. Chứng minh rằng $B'D', A'C', M'N'$ đồng quy.

12. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AB, CD của tứ giác nội tiếp $ABCD$. Đường tròn (ABN) cắt lại (CD) tại P và đường tròn (CDM) cắt lại (AB) tại Q. Gọi $O = AC \cap BC$. Chứng minh rằng P, Q, O thẳng hàng.

13. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Kẻ phân giác HB_1, HC_1 của các góc $\angle AHC, \angle AHB$ ($C_1 \in AB, B_1 \in AC$). Gọi I, J là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác AHB, AHC và B_2, C_2 theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(BB_1; IJ), (CC_1; IJ)$. Tính góc $\angle B_2HC_2$

14. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với CA, AB tại E, F. Gọi M là trung điểm cạnh BC và N là giao điểm của AM với EF. Đường tròn đường kính BC lần lượt cắt lại BI, CI tại X, Y theo thứ tự đó. Chứng minh rằng $\dfrac{NX}{NY} = \dfrac{AC}{AB}$

    (Romania TST 2007)

15. Cho tam giác ABC vuông tại A và điểm D trên cạnh CA. Gọi E là điểm đối xứng với A qua đường thẳng BD và F là giao điểm của CE với đường thẳng đi qua D và vuông góc với BC. Chứng minh rằng các đường thẳng AF, DE cắt nhau tại một điểm nằm trên BC.

    (Romania JBMO TST 2007)

16. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi $E = AB \cap CDF = DA \cap BC$ và $P = AC \cap BD$. Gọi O là hình chiếu của P trên EF. Chứng minh rằng $\angle BOC = \angle AOD$

    (Chinese TST 2002)

17. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F the thứ tự đó. Đường thẳng AD cắt lại (I) tại M, đường tròn (CDM) cắt lại DF tại N và đường thẳng CN cắt đường thẳng AB tại G. Chứng minh rằng $CD = 3FG$.

18. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Chứng minh rằng nếu BO là đường đối trung của tam giác ABC và DO là đường đối trung của tam giác ADC thì AO là đường đối trung của tam giác BAD

19. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được quanh một đường tròn.Về phía ngoài của tứ giác dựng các đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4)$ sao cho

    - $(O_1), (O_3)$ theo thứ tự tiếp xúc với cạnh AB, CD tại K, L và tiếp xúc với các đường thẳng AD, BC
    - $(O_2), (O_4)$ theo thứ tự tiếp xúc với cạnh AD, BC tại M, N và tiếp xúc với các đường thẳng AB, CD.

    Gọi P là giao điểm của các đường thẳng AD, BC và Q là giao điểm của các đường thẳng AB, CD. Chứng minh rằng P, K, L thẳng hàng khi và chỉ khi Q, M, N thẳng hàng.

20. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), ba đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại H. Gọi B_0 là trung điểm CA, P là giao điểm của BO và CA, Q là giao điểm của C_1A_1 và BB_1. Chứng minh rằng $HB_0 \parallel PQ$

    (Russia 2008 - Grade 10)

    Hint. Gọi D là giao điểm thứ hai của BO với (O). Khi đó B_0 là trung điểm HD. Chứng minh $P(BHQB_1) = -1$.

21. Cho tam giác $ABC \quad (AB \neq AC)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O và ngoại tiếp quanh đường tròn I. Đường tròn (I) tiếp xúc BC tại D. Giả sử rằng $OI \perp AD$, chứng minh rằng AD là đường đối trung của tam giác.

    Hint. Gọi P là giao điểm của OI và BC. Chứng minh PA tiếp xúc với (O).