I. TÊN ĐỀ TÀI:

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHỌN ĐIỂM RƠI.

II. ĐẶT VẤN ĐỀ:

Qua các kỳ thi giỏi toán quốc tế, nhiều chuyên gia thường nhận định bài toán BẤT ĐẲNG THỨC là sở trường của học sinh VIỆT NAM. Tuy nhiên đối với học sinh phổ thông hiện nay và ngay cả học sinh trong các lớp chọn (tự nhiên) của phổ thông các em thường rất thiếu tự tin khi đối diện với bài toán BĐT (bất đẳng thức). Minh chứng rõ ràng nhất là bài toán chứng minh BĐT hoặc bài toán có sử dụng BĐT để chứng minh là một trong số ít dạng toán nằm trong diện phân loại học sinh trong các đề thi đại học.

Phương pháp mà đề tài giới thiệu nhằm vào đại bộ phận các bài toán BĐT hiện nay (là BĐT mà các biến có tính đối xứng hoặc các biến có thể hoán vị vòng quanh). Ngoài ra đối với các BĐT mà các biến không có tính chất trên thì có những biến đổi thích hợp để có thể vận dụng phương pháp trên. Ngoài ra còn có các phương pháp cơ bản khác hổ trợ như: Đổi biến, Đặt ẩn phụ ...

III. CƠ SỞ LÝ LUẬN

1. ĐỊNH NGHĨA: $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$

2. TÍNH CHẤT

* $A > B$ và $B > C \Rightarrow A > C$
* $A > B \Rightarrow A + C > B + C$
* $A > B$ và $C > D \Rightarrow A + C > B + D$
* $A > B$ và $C > 0 \Rightarrow A.C > B.C$
* $A > B$ và $C < 0 \Rightarrow A.C < B.C$
* $A > B > 0$ và $C > D > 0 \Rightarrow A.C > B.D > 0$
* $A > B > 0 \Rightarrow A^n > B^n \quad \forall n$
* $A > B \Rightarrow A^n > B^n$ với $n = 2k + 1$ $(k \in N)$
* $A^2 \geq 0$, $\forall A$ (dấu = xảy ra khi $A = 0$)
* $|A| \geq 0$, $\forall A$ (dấu = xảy ra khi $A = 0$)

2. CÁC BĐT CÓ LIÊN QUAN

a. BĐT Cô-si : $x_i \geq 0$, $(i = 1,\ldots, n)$

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1.x_2...x_n}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

**** BĐT hệ quả thường dùng:***

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...\frac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+...+a_n)\ge n$$; với $a_i \ge 0$, i = 1,..,n.

b.BĐT về GTTĐ (giá trị tuyệt đối)

$$||a|-|b|| \underset{(1)}{\le} |a+b| \underset{(2)}{\le} |a|+|b| \;,\; (a,b\in R)$$

Dấu đẳng thức (1) xảy ra kck a.b ≤ 0, (2) xảy ra kck a.b ≥ 0 .

c.BĐT về véc tơ :

1/ $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$

Dấu đẳng thức xảy ra kck $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

2/ $-|\vec{a}||\vec{b}| \underset{(1)}{\le} \vec{a}.\vec{b} \underset{(2)}{\le} |\vec{a}||\vec{b}|$

Đẳng thức (1) xảy ra ⇔ $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng,

Đẳng thức (2) xảy ra ⇔ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng

d. BĐT Bun-nhi-a-cốp-xki:

Với hai bộ n số thực ($a_1,a_2, \dots , a_n$) , ($b_1,b_2,\dots,b_n$) ta có :

$$(a_1b_1+a_2b_2+....a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+...+_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra kck $a_1: a_2: \dots: a_n = b_1: b_2: \dots: b_n$

**** BĐT hệ quả thường dùng:*** $\dfrac{b_1^2}{a_1}+\dfrac{b_2^2}{a_2}+....\dfrac{b_n^2}{a_n} \ge \dfrac{(b_1+b_2+...+b_n)^2}{a_1+a_2+...+a_n}$

Dấu đẳng thức xảy ra kck $a_1: a_2: \dots: a_n = b_1: b_2: \dots: b_n$

e. Các đẳng thức và BĐT khác có liên quan:

1. $xy=\frac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2)]\le\frac{1}{4}(x+y)^2$

2. $x^2+y^2=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2+(x-y)^2\right]\ge\frac{1}{2}(x+y)^2$

IV. CƠ SỞ THỰC TIỄN

Trên tinh thần giảm tải chương trình Đại số 10 của sách giáo khoa hiện hành, số tiết cũng như lượng bài tập của chương trình dành cho nội dung bài học BĐT là có giới hạn . Trong khi bài toán này có khá nhiều ứng dụng trong thực tế và là bài toán thuộc dạng phân loại học sinh trong các kỳ thi, đặc biệt là kỳ thi tuyển sinh đại học hằng năm. Thậm chí các bài toán giải phương trình , bất phương trình, hệ phương trình …dùng để phân loại học sinh trong các đề thi ĐH thường có sử dụng BĐT để giải hay chứng minh. ***Đề tài này trước mắt hy vọng học sinh phổ thông sẽ có tâm lý tự tin hơn để đối diện với các bài toán về BĐT***. Hy vọng giúp các em giảm bớt cảm giác sợ và thường bỏ qua bài toán BĐT, thậm chí không hề đọc qua nội dung bài toán BĐT có trong đề thi.

V. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU:

A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP

Đối với các BĐT mà các biến có "tính đối xứng hoặc có thể hoán vị vòng quanh" (*) thì việc nhận định dấu đẳng thức xảy ra ***(ĐIỂM RƠI)*** là hết sức quan trọng trong khi việc làm này nếu được hướng dẫn thì rất đơn giản.

Đối với các BĐT mà các biến có tính chất (*) thì phần lớn đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau. *(Đề tài nói phần lớn vì vẫn có những BĐT các biến có tính chất (*) nhưng đẳng thức xảy ra tại các biến không bằng nhau, ví dụ: Với a,b,c không âm :* $a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$*, đẳng thức xảy ra ngoài khi a = b = c, đẳng thức còn xảy ra khi a = b, c = 0. Hoặc Với a,b,c không âm, ab + bc + ca = 1:* $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \ge \frac{5}{2}$*, đẳng thức xảy ra khi a = b = 1, c = 0.).*

Tùy theo các tình huống khi đẳng thức xảy ra mà ta có các cách biến đổi và các phương pháp khác hỗ trợ thích hợp. Sau đây là các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1 : Cho a, b,c là các số thực dương thỏa $a + b + c \le \frac{3}{2}$.

Chứng minh: $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \frac{15}{2}$

Giải: ***Nhận xét : a,b,c bình đẳng, ta dự đoán đẳng thức (điểm rơi) xảy ra khi a = b = c =*** $\frac{1}{2}$. Do vậy ta có thể biến đổi như sau:

Cách 1: $4a+\frac{1}{a}-3a \ge 4-3a$; $4b+\frac{1}{b}-3b \ge 4-3b$; $4c+\frac{1}{c}-3c \ge 4-3c$.

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 12-3(a+b+c) \ge \frac{15}{2}$

Cách 2: $a+\frac{1}{4a} \ge 1$; $b+\frac{1}{4b} \ge 1$; $c+\frac{1}{4c} \ge 1$.

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: $a+b+c+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 3$.

Suy ra: $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge 3+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 3+\frac{3}{4}\frac{9}{a+b+c} \ge 3+\frac{3}{4}\frac{9}{3/2} \ge \frac{15}{2}$.

Ví dụ:

Cho x,y,z là các số thực không âm, thỏa x.y.z = 1. C/m : $\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x} \ge \frac{3}{2}$

Nhận xét: x,y,z không bình đẳng nhưng có thể hoán vị vòng quang, ta dự đoán đẳng thức (điểm rơi) xảy ra khi x = y = z = 1.

Vì vậy ta biến đổi như sau : $\frac{x^2}{1+y}+\frac{1+y}{2} \ge x$; $\frac{y^2}{1+z}+\frac{1+z}{2} \ge y$; $\frac{z^2}{1+x}+\frac{1+x}{2} \ge z$

Cộng vế theo vế: $\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}+\frac{1}{4}(3+x+y+z)\geq x+y+z$

Suy ra : $\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\geq \frac{3}{4}(x+y+z)-\frac{3}{4}\geq \frac{3}{4}.3\sqrt[3]{xyz}-\frac{3}{4}\geq \frac{3}{2}$.

Ví dụ 2 : a, b, c là các số thực dương thỏa a + b + c = 1.Tìm GTNN (giá trị nhỏ nhất) của biểu thức : $P=\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{b^3}{(1-b)^2}+\frac{c^3}{(1-c)^2}$

Nhận xét: a,b,c bình đẳng, ta dự đoán đẳng thức (điểm rơi) xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{3}$.

Vì vậy ta biến đổi như sau: $\frac{a^3}{(1-a)^2}+\frac{1-a}{8}+\frac{1-a}{8}\geq\frac{3}{4}a$.

$\frac{b^3}{(1-b)^2}+\frac{1-b}{8}+\frac{1-b}{8}\geq\frac{3}{4}b$. $\frac{c^3}{(1-c)^2}+\frac{1-c}{8}+\frac{1-c}{8}\geq\frac{3}{4}c$.

Cộng vế theo vế: $P+\frac{1}{4}\big(3-(a+b+c)\big)\geq\frac{3}{4}(a+b+c)$ => $P\geq a+b+c-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

Suy ra MinP = $\frac{1}{4}$ ⇔ a = b = c = $\frac{1}{3}$.

Ví dụ: Cho a, b,c là các số thực dương thỏa a + b + c ≤ $\frac{3}{2}$.

Chứng minh: $\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\geq\frac{3\sqrt{17}}{2}$

Giải: ***Vai trò của a, b, c là bình đẳng, ta có nhận định dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c . Ngoài ra với một ít kinh nghiệm chứng minh BĐT ta kết hợp thêm với BĐT về véctơ ta có cách biến đổi sau:***

Xét các véctơ : $\vec{u}=\left(a\,;\frac{1}{a}\right)$, $\vec{v}=\left(b\,;\frac{1}{b}\right)$, $\vec{w}=\left(c\,;\frac{1}{c}\right)$

Áp dụng BĐT: $|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\geq|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$

Ta có:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}\geq\sqrt{(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}\geq 3\sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}$$

Đặt t = $\sqrt[3]{(abc)^2}$, suy ra : $t\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\leq\frac{1}{4}$, khi a = b = c = $\frac{1}{2}$ thì $t=\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{t}=4$

khi đó ta có cách biến đổi tiếp như sau:

$$\geq 3\sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}=3\sqrt{t+\frac{1}{16t}+\frac{15}{16t}}\geq 3\sqrt{2\sqrt{t.\frac{1}{16t}}+\frac{15}{16t}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{16t}}$$

$$\geq\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{15}{4}}=\frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Ví dụ 3: (ĐH – K_B – 2007).

Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi .

Tìm GTNN của $P = x\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{yz}\right)+y\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{zx}\right)+z\left(\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{xy}\right)$

Giải: ***Do vai trò của x, y, z là bình đẳng, ta nhận định dấu đẳng thức (điểm rơi) xảy ra khi x = y = z .***

Khi đó $x\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{yz}\right)$ trở thành : $x\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x.x}\right)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}$,

tương tự cho hai biểu thức còn lại

khi đó *P* trở thành : $P=\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{y}\right)+\left(\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{1}{z}\right)$.

Đến đây ta liên tưởng đến hàm đặc trưng. Do vậy ta biến đổi như sau

$$P=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy} = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$$

$$\geq \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+\frac{y^2}{2}+\frac{1}{y}+\frac{z^2}{2}+\frac{1}{z}$$

Xét hàm đặc trưng : $g(t)=\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{1}{t}$, $t>0$.

t	0 1 $+\infty$
g'(t)	– +
g(t)	↘ $\dfrac{3}{2}$ ↗

Suy ra P ≥ $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$. Vậy Minp = $\dfrac{9}{2}$ ⇔ x = y = z = 1.

Ví dụ 4:(ĐH – K_B – 2009).
Cho x,y là hai số thực thay đổi thỏa mãn : $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$.
Tim GTNN của biểu thức: $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) – 2(x^2 + y^2) + 1$
Giải:

Nhận xét: trong biểu thức A và giả thiết vai trò của x,y là bình đẳng. Ta dự đoán đẳng thức xảy ra ⇔ x = y và từ $(x+y)^3 + 4xy = 2$ suy ra x = y = $\dfrac{1}{2}$. Ngoài ra nếu xem giả thiết và kết luận là một hệ bất phương trình 2 ẩn thì đây là hệ đối xứng loại một, nên ta nghĩ đến các đẳng thức và BĐT có liên quan đã nêu ở trên :

1. $xy=\dfrac{1}{4}[(x+y)^2-(x-y)^2)]\leq\dfrac{1}{4}(x+y)^2$

2. $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}\left[\left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2\right]\geq\dfrac{1}{2}\left(x+y\right)^2$

Ta có : $(x + y)^3 + 4xy \geq 2 \Leftrightarrow (x + y)^3 +[(x + y)^2 – (x – y)^2)] \geq 2$
$\Leftrightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 – 2 \geq (x – y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y – 1)[(x + y)^2+2(x+y)+2] \geq 0$
$\Leftrightarrow x + y – 1 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq 1$.
Khi đó : $A = 3[(x^2 + y^2)^2 – x^2y^2] – 2 (x^2 + y^2) + 1$

$= 3[(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{4}[(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2]] - 2(x^2+y^2) + 1$

$= \frac{9}{4}[x^2+y^2-\frac{4}{9}]^2 + \frac{3}{4}(x^2-y^2)^2 + \frac{5}{9}$

do $1 \le (x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2 \ge \frac{1}{2}$, $x^2-y^2 \ge 0$.

Suy ra $A \ge \frac{9}{4}[\frac{1}{2}-\frac{4}{9}]^2 + \frac{3}{4}(0)^2 + \frac{5}{9} = \frac{9}{16}$. Vậy MinA = $\frac{9}{16} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

Ví dụ 5: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa: $xy + yz + zx = 5$.

Chứng minh: $3x^2 + 3y^2 + z^2 \ge 10$.

Nhận định x và y bình đẳng, dấu bằng xảy ra khi x = y.

Để có thể sử dụng giả thiết $xy + yz + zx = 5$.Ta có thể tách các số hạng $3x^2$, $3y^2$, z^2 như sau:

$x^2 + y^2 \ge 2xy$

$my^2 + nz^2 \ge 2\sqrt{mn}\,yz$

$pz^2 + mx^2 \ge 2\sqrt{mp}\,xz$.

Cộng vế theo vế:$(m+1)x^2 + (m+1)y^2 + (n+p)z^2 \ge 2xy + 2\sqrt{mn}\,yz + 2\sqrt{mp}\,xz$.

Chọn m, n, p sao cho: $m + 1 = 3$, $n + p = 1$ và $\sqrt{mn} = \sqrt{mp}$

suy ra: $m = 2$, $n = p = ½$. Vậy ta có biến đổi sau:

$x^2 + y^2 \ge 2xy$

$2y^2 + \frac{1}{2}z^2 \ge 2yz$

$\frac{1}{2}z^2 + 2x^2 \ge 2xz$. ;

Cộng vế theo vế ta có kết quả.

Hoặc có thể tổng quát hơn như sau: ***(các hệ số a, b, c cần chú ý tính bình đẳng của x và y)***

Giả sử : $ax^2 + ay^2 \ge 2axy$

$by^2 + cz^2 \ge 2\sqrt{bc}\,yz$

$cz^2 + bx^2 \ge 2\sqrt{bc}\,xz$.

Cộng vế theo vế: $(a+b)x^2 + (a+b)y^2 + cz^2 \ge 2axy + 2\sqrt{bc}\,yz + 2\sqrt{bc}\,xz$.

Để có thể sử dụng được giả thiết trên ta cần chọn: a, b, c sao cho:

$a + b = 3$, $2c = 1$, và $a = \sqrt{bc}$. Suy ra $a = 1$, $b = 2$, $c = \frac{1}{2}$.

Vậy ta có: $x^2 + y^2 \ge 2xy$; $2y^2 + \frac{1}{2}z^2 \ge 2yz$; $\frac{1}{2}z^2 + 2x^2 \ge 2xz$.

Cộng vế theo vế ta được kết quả cần chứng minh.

Ví dụ 6: (đề thi chọn HSG khối 12 năm học 2010 – 2011)

Cho a, b, c là các số thực dương . Chứng minh:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right) \ge \frac{9}{1+abc}$$

Nhận xét: Ta nhận định dấu bằng xảy ra khi a = b = c. Khi đó BĐT trở thành:

$\frac{3}{a}.\frac{3}{1+a} \ge \frac{9}{1+a^3} \Leftrightarrow a^3 - a^2 - a + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(a+1) \ge 0 \Leftrightarrow a \ge 1$

(Ta chú ý phương trình : $a^3 - a^2 - a + 1 = 0.$ (*))

Ngoài ra nếu khéo đặt ẩn phụ thì việc đưa vế trái của BĐT về tổng tích có thể dễ dàng hơn, nên ta nhắm đến hướng giải sau:

Giải:

Đặt : $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. BĐT trở thành: $(x+y+z)\left(\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}\right) \geq \frac{9xyz}{1+xyz}$

Ta có: $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)}} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{\frac{1+x+1+y+1+z}{3}} = \frac{9\sqrt[3]{xyz}}{3+x+y+z}$

Suy ra: $(x+y+z)\left(\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}\right) \geq 9\sqrt[3]{xyz}\,\frac{x+y+z}{3+x+y+z} = 9\sqrt[3]{xyz}\,\frac{1}{1+\frac{3}{x+y+z}}$

$\geq 9\sqrt[3]{xyz}\,\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}} \geq \frac{9\sqrt[3]{(xyz)^2}}{1+\sqrt[3]{xyz}}$ (*), đến đây ta c/m (*) $\geq \frac{9xyz}{1+xyz}$.

Đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$ thì BĐT còn lại cần chứng minh là vế trái của phương trình (*) ta lưu ý ở trên.

HỆ THỐNG BÀI TẬP MINH HỌA THÊM

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Giải: Ta có: $\frac{a^3}{a+b} + \frac{a(a+b)}{4} \geq a^2$, $\frac{b^3}{b+c} + \frac{b(b+c)}{4} \geq b^2$, $\frac{c^3}{c+a} + \frac{c(c+a)}{4} \geq c^2$

Cộng vế theo vế: $\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} + \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right) \geq a^2+b^2+c^2$

Suy ra: $\frac{a^3}{a+b} + \frac{b^3}{b+c} + \frac{c^3}{c+a} \geq \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \frac{1}{4}\left(ab+bc+ca\right)$

$\geq \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) - \frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa a + b +c = 6. Tìm GTNN của biểu thức: $P = \frac{a^3}{(a+b)(b+2c)} + \frac{b^3}{(b+c)(c+2a)} + \frac{c^3}{(c+a)(a+2b)}$

Giải: Ta có:

$\frac{a^3}{(a+b)(b+2c)} + \frac{a+b}{12} + \frac{b+2c}{18} \geq \frac{1}{2}a$; $\frac{b^3}{(b+c)(c+2a)} + \frac{b+c}{12} + \frac{c+2a}{18} \geq \frac{1}{2}b$

$\frac{c^3}{(c+a)(a+2b)} + \frac{c+a}{12} + \frac{a+2b}{18} \geq \frac{1}{2}c$;

Cộng vế theo vế: $P + \frac{2(a+b+c)}{12} + \frac{3(a+b+c)}{18} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$

Suy ra : $P \geq \frac{1}{6}(a+b+c) = 1$; Vậy MinP = 1 ⇔ a = b = c = 2.

Bài 3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa a.b.c = 1.

chứng minh: $\frac{1}{a^4(a+b)} + \frac{1}{b^4(b+c)} + \frac{1}{c^4(c+a)} \geq \frac{3}{2}$.

Giải: Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$.

BĐT trở thành: $\frac{x^4}{z(x+y)} + \frac{y^4}{x(y+z)} + \frac{z^4}{y(z+x)} \geq \frac{3}{2}$. Với x.y.z = 1

Ta có: $\frac{x^4}{z(x+y)} + \frac{z}{2} + \frac{x+y}{4} + \frac{1}{2} \geq 2x$; $\frac{y^4}{x(y+z)} + \frac{x}{2} + \frac{y+z}{4} + \frac{1}{2} \geq 2y$;

$\frac{z^4}{y(z+x)} + \frac{y}{2} + \frac{z+x}{4} + \frac{1}{2} \geq 2z$

Cộng vế theo vế:

$$\frac{x^4}{z(x+y)} + \frac{y^4}{x(y+z)} + \frac{z^4}{y(z+x)} + \frac{1}{2}(x+y+z) + \frac{2}{4}(x+y+z) + \frac{3}{2} \geq 2(x+y+z)$$

Suy ra: $\frac{x^4}{z(x+y)} + \frac{y^4}{x(y+z)} + \frac{z^4}{y(z+x)} \geq x+y+z-\frac{3}{2} \geq 3\sqrt[3]{xyz} - \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$

Bài 4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa: a + b + c = 1.

Chứng minh: $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq \left(\frac{10}{3}\right)^3$

Giải: Ta có : $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) = abc + \frac{1}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1$

Chỉ vận dụng các BĐT mà dấu bằng xảy ra khi a = b = c. Ta có:

$abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$, suy ra: $abc + \frac{1}{abc} \geq \frac{730}{27}$, (có thể dùng bảng biến thiên)

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 9$, Vậy: $abc + \frac{1}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \geq \frac{730}{27} + 9 + 1 = \left(\frac{10}{3}\right)^3$

Nhận xét: ***BĐT tuy không khó nhưng nếu không biết nhận định ngay ban đầu học sinh có thể vấp khi vận dụng các bđt hỗ trợ cho việc chứng minh .***

Bài 5: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa a.b.c = 1.

chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$

Giải: Vận dụng BĐT: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

Ta có: $\left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right)^2 \leq 2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}\right) = 2\left(\frac{1+1+a^2+b^2+a^2b^2-a^2b^2}{(1+a^2)(1+b^2)}\right)$

$2\left(\frac{1-a^2b^2+(1+a^2)(1+b^2)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right) = 2\left(1+\frac{1-a^2b^2}{1+a^2+b^2+a^2b^2}\right) \leq 2\left(1+\frac{(1-ab)(1+ab)}{1+2ab+a^2b^2}\right) =$

$$= 2\left(1+\frac{1-ab}{1+\text{ab}}\right) = 2\left(1+\frac{1-\frac{1}{c}}{1+\frac{1}{c}}\right) = \frac{4c}{c+1}$$, suy ra : $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \le \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{1+c}}$

Cũng từ BĐT cơ bản trên ta có: $1+c \le \sqrt{2(1+c^2)}$ => $\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{\sqrt{2}}{1+c}$

Suy ra: $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{1+c}}+\frac{\sqrt{2}}{1+c}$ (*)

(*) $\le \frac{3}{\sqrt{2}}$ ⇔ $\left(2\sqrt{c}\sqrt{1+c}+\sqrt{2}\right)\sqrt{2} \le 3(1+c)$ ⇔ ... ⇔ $\left(\sqrt{2c}-\sqrt{1+c}\right)^2 \ge 0.$

Bài 6:

Cho k $\in N^*$ và a, b, c là các số thực dương thỏa a.b.c $\le$ 1.

Chứng minh: $\frac{a}{b^k}+\frac{b}{c^k}+\frac{c}{a^k} \ge a+b+c$.

Giải: Do a, b, c có thể hoán vị vòng quanh. Nhận định dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1. Ta biến đổi như sau:

$$\frac{a}{b^k}+\underbrace{a+a+....+a}_{(k-1)a} \ge k\sqrt[k]{\frac{a^k}{b^k}} = k\frac{a}{b}; \quad \frac{b}{c^k}+\underbrace{b+b+....+b}_{(k-1)b} \ge k\sqrt[k]{\frac{b^k}{c^k}} = k\frac{b}{c};$$

$$\frac{c}{a^k}+\underbrace{c+c+....+c}_{(k-1)c} \ge k\sqrt[k]{\frac{c^k}{a^k}} = k\frac{c}{a};$$

Cộng vế theo vế: $\frac{a}{b^k}+\frac{b}{c^k}+\frac{c}{a^k}+(k-1)(a+b+c) \ge k\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$

Cũng trên tinh thần sử dụng các BĐT mà dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c,

Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} \ge 3\text{a}$, $\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3b$; $\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b} \ge 3c$;

Cộng vế theo vế ta được: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge a+b+c$

Khi đó: $\frac{a}{b^k}+\frac{b}{c^k}+\frac{c}{a^k}+(k-1)(a+b+c) \ge k\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge k(a+b+c)$

Suy ra: $\frac{a}{b^k}+\frac{b}{c^k}+\frac{c}{a^k} \ge a+b+c$

Bài 7: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3\text{a}^2+8b^2+14\text{ab}}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14\text{bc}}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14\text{ca}}} \ge \frac{1}{5}(a+b+c).$$

Giải: Trước hết ta xử lý mẫu:

$$\sqrt{3\text{a}^2+8b^2+14\text{ab}} = \sqrt{(a+4b)(3\text{a}+2\text{b})} \le \frac{a+4b+3\text{a}+2\text{b}}{2} = 2\text{a}+3\text{b}$$

Tương tự: $\sqrt{3b^2+8c^2+14\text{bc}} \le 2b+3\text{c}$; $\sqrt{3c^2+8a^2+14\text{ca}} \le 2c+3\text{a}$

Suy ra: $\frac{a^2}{\sqrt{3\text{a}^2+8b^2+14\text{ab}}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14\text{bc}}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14\text{ca}}} \ge$

$$\geq \frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a} \underset{(*)}{\geq} \frac{\left(a+b+c\right)^2}{5\left(a+b+c\right)}=\frac{1}{5}\left(a+b+c\right)$$

(Có thể ch/m (*) bằng cách biến đổi : $\frac{a^2}{2a+3b}+\frac{2a+3b}{25}\geq\frac{2}{5}a$ ....)

Bài 8:

Cho a,b là các số thực dương và thỏa a + b $\leq$ 1. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}$$

Giải: Ta có: $\frac{1}{2ab}=\frac{1}{6ab}+\frac{1}{3ab}$.

Suy ra : $P=\frac{1}{1+a^2+b^2}+\frac{1}{6ab}+\frac{1}{3ab}\geq\frac{4}{a^2+6ab+b^2+1}+\frac{1}{3ab}\geq\frac{4}{(a+b)^2+4ab+1}+\frac{1}{3ab}$

$$\geq\frac{4}{(a+b)^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+1}+\frac{1}{3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\geq\frac{8}{3}.$$

MinP = $\frac{8}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+1=6ab\\ a=b\\ a+b\leq 1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\ a=b=\frac{1}{2}$

Bài 9: ***Ví dụ sau đây minh họa cho việc áp dụng BĐT hệ quả (đã nêu trên) mà các đề thi cũng thường chú trọng đến:*** $\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+....\frac{b_n^2}{a_n}\ \geq\ \frac{\left(b_1+b_2+...+b_n\right)^2}{a_1+a_2+...+a_n}$

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa x + y + z $\geq$ 3.Tìm GTNN của biểu thức:

$$Q=\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}$$

Giải: Ta có: $\frac{x^2}{x+\sqrt{yz}}+\frac{y^2}{y+\sqrt{zx}}+\frac{z^2}{z+\sqrt{xy}}\geq\frac{\left(x+y+z\right)^2}{x+y+z+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz}}$

$$\geq\frac{\left(x+y+z\right)^2}{x+y+z+x+y+z}\geq\frac{x+y+z}{2}=\frac{3}{2}$$

Vậy $MinQ=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\ x=y=z\\ \frac{x}{x+\sqrt{yz}}=\frac{y}{y+\sqrt{zx}}=\frac{z}{z+\sqrt{xy}}\end{cases}\quad\Leftrightarrow$ x = y = z = 1

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

1* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa: ab + bc + ca = 2abc.

Chứng minh: $\frac{1}{a(2a-1)^2}+\frac{1}{b(2b-1)^2}+\frac{1}{c(2c-1)^2}\ge\frac{1}{2}$

2* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa a + b + c ≥ 6. Tìm GTNN của biểu thức: $Q=\frac{a^3}{a+b}+\frac{b^3}{b+c}+\frac{c^3}{c+a}$ (MinQ = 6 ⇔ a = b = c = 2)

3* Cho x, y, z là các số thực dương thỏa x + y + z = 1. Tìm GTNN của biểu thức: $P=\frac{x^2(y+z)}{yz}+\frac{y^2(x+z)}{xz}+\frac{z^2(x+y)}{xy}$ (MinP = 2 ⇔ x =y = z = $\frac{1}{3}$) .

4* Cho x, y, z là các số thực dương thỏa x + y + z = 3.

Chứng minh: $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\ge 3\sqrt{3}$.

5* Cho x, y, z là các số thực không âm.

Chứng minh: $\sqrt{x^2+y^2+3xy}+\sqrt{y^2+z^2+3yz}+\sqrt{z^2+x^2+3zx}\le\sqrt{5}\left(x+y+z\right)$

6* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa: abc = 1. Tìm GTNN của biểu thức:

$M=\frac{bc}{a^2b+a^2c}+\frac{ca}{b^2c+b^2a}+\frac{ab}{c^2a+c^2b}$ (MinM = $\frac{3}{2}$ ⇔ a = b = c = 1.)

7* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa: abc = 1.

Chứng minh: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$

8* Cho Δ ABC . a = BC, b = CA, c = AB. Chứng minh :

1/ $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\ge a+b+c$. 2/ $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{a+b+c}{2}$

9* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa: $a+b+c\le\frac{3}{2}$.

Chứng minh: $\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{3\sqrt{17}}{2}$

10* Cho a, b, c là các số thực thỏa: a + b + c = 3. Tìm GTNN của biểu thức:

$M=\sqrt{4^a+9^b+16^c}+\sqrt{9^a+16^b+4^c}+\sqrt{16^a+4^b+9^c}$. $\left(MinM=3\sqrt{29}\Leftrightarrow a=b=c=1\right)$

11* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa: $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh: $\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

12* Cho ba số thực dương a, b, c .

Chứng minh: $\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c}{a(b+c)}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)$

13* Cho a, b, c là các số thực dương thỏa: a + b + c = 1.

Chứng minh: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}$

14* Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTNN của biểu thức: $P = \frac{x^5}{y^3+z^3} + \frac{y^5}{z^3+x^3} + \frac{z^5}{z^3+x^3} + x^4 + y^4 + z^4$. $\left(MinP = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \right)$

15* Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm GTNN của biểu thức :

$$T = \frac{x^2}{(2y+3z)(2z+3y)} + \frac{y^2}{(2z+3x)(2x+3z)} + \frac{z^2}{(2x+3y)(2y+3x)}$$

$$\left(MinT = \frac{3}{25} \Leftrightarrow x = y = z \right)$$

VI. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU:

Nội dung đề tài nghiên cứu là tài liệu chính thức tôi thường dùng để giảng dạy cho các em thuộc đội tuyển dự thi chọn học sinh giỏi khối 12 Tỉnh Quảng Nam hằng năm của trường THPT Lê quý Đôn Tam Kỳ, và bồi dưỡng cho học sinh lớp 10 và lớp 11 thi chọn học sinh giỏi cấp trường hằng năm. Ở cấp trường lớp $10A_1$ năm học 2009 – 2010 đã đạt được 1 giải nhất, 1 giải 3 và 1 giải khuyến khích, Ở cấp Tỉnh đã có học sinh (Dương Công Nha) đạt giải khuyến khích Toán 12 năm học 2008 – 2009. **Nhưng điểm thành công nhất của đề tài là đã giúp các em tự tin hơn khi tham gia học các lớp bồi dưỡng học sinh giỏi.**

VII. KẾT LUẬN:

Qua quá trình giảng dạy nhiều năm, tôi nhận thấy rằng một bộ phận rất lớn học sinh có kết quả bài làm thấp hơn (thậm chí thấp hơn nhiều) so với khả năng có thực của các em. Theo tôi chắc chắn đó là yếu tố tâm lý. Các em thường sẽ mất bình tĩnh khi không làm chủ được đề thi. Làm quen với loại toán BĐT các em sẽ có tâm lý tự tin hơn và có tầm nhìn rộng hơn trước các đề toán có “ngoại hình” dễ gây khớp cho các em. Tôi tin chắc rằng đề tài là một nguồn tư liệu hữu ích cho mọi đối tượng học sinh phổ thông.

VIII. ĐỀ NGHỊ:

Nếu đề tài được giới thiệu rộng rãi cho học sinh và đồng nghiệp, thì với nhiệt tình góp ý xây dựng của quý thầy cô chắc chắn đề tài sẽ ngày càng sáng sủa hơn, sẽ thích nghi và gần gũi hơn với các em học sinh. Rất mong nhận được sự hưởng ứng của quý độc giả.

IX. PHỤ LỤC:

Kết quả thi của một số em như đã nêu trên có lưu ở hồ sơ của nhà trường. Ngoài ra đề tài đã rất thu hút nhiều em tham gia học đều đặn các buổi học bồi dưỡng học sinh giỏi tại trường *(Nhà trường có thể tham khảo trực tiếp ý kiến của các em)*

X. TÀI LIỆU THAM KHẢO:

1. Báo TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ
(ra định kỳ hằng tháng và các đợt kỷ niệm sinh nhật của BÁO)
2. CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC THỐNG NHẤT TOÀN QUỐC
3. ĐỀ THI OLIMPIC, ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HẰNG NĂM của CÁC TỈNH, và ĐỀ DỰ BỊ THI ĐẠI HỌC CÁC NĂM

XI. MỤC LỤC: