

Bài tập tổ hợp chọn lọc

(Bài tập dành cho chuyên đề: Các phương pháp giải bài toán tổ hợp)

Bài 1. Lát bàn cờ 8×8 bằng 21 quân trimino kích thước 1×3 . Hỏi ô trống còn lại có thể là ô nào ?

Bài 2. (Nghệ An 2009) Cho n là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2. Kí hiệu $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Tập con B của tập A được gọi là 1 tập "tốt" nếu B khác rỗng và trung bình cộng của các phần tử của B là 1 số nguyên. Gọi T_n là số các tập tốt của tập A . Chứng minh rằng $T_n - n$ là 1 số chẵn.

Bài 3. (Vũng Tàu 2009) Trên bàn cờ vua kích thước 8×8 được chia thành 64 ô vuông đơn vị, người ta bỏ đi một ô vuông đơn vị nào đó ở vị trí hàng thứ m và cột thứ n . Gọi $S(m;n)$ là số hình chữ nhật được tạo bởi một hay nhiều ô vuông đơn vị của bàn cờ sao cho không có ô nào trùng với vị trí của ô bị xóa bỏ ban đầu. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $S(m;n)$.

Bài 4. Ba nhóm đường thẳng song song chia mặt phẳng thành N miền. Hỏi số đường thẳng của cả 3 nhóm ít nhất là bao nhiêu để $N > 2011$.

Giả sử số đường thẳng của mỗi nhóm là p, q, r hãy chứng minh số miền tạo thành không vượt quá: $pq + qr + rp + p + q + r + 1$.

Ý tưởng chính là: p đường thẳng song song chia mặt phẳng thành $p+1$ phần. Khi kẻ thêm 1 đường thẳng không song song với p đường thẳng này thì sẽ tạo ra thêm $p+1$ phần. Như thế, sau khi kẻ q đường thẳng nữa thì số phần là $(p+1)(q+1)$.

Cuối cùng, khi đã có 2 họ $p + q$ đường thẳng, khi kẻ thêm đường thẳng của họ thứ 3 sẽ cắt hai họ trên ở nhiều nhất $p+q$ điểm, do đó tạo ra $p+q+1$ miền mới.

Suy ra số miền mới tối đa là $(p+1)(q+1) + r(p+q+1)$.

Bài 5. (Nghệ An 2009) Cho 9 điểm nguyên trên mặt phẳng tọa độ, không có 3 điểm thẳng hàng. Chứng minh ta luôn chọn được 3 điểm thỏa mãn diện tích của tam giác tạo bởi chúng là số chẵn.

Bài 6. (Nga 2007, Bắc Ninh 2009) Trong bảng hình vuông gồm 10×10 ô vuông (10 hàng, 10 cột), người ta viết vào các ô vuông các số tự nhiên từ 1 đến 100 theo cách như sau: ở hàng thứ nhất, từ trái sang phải, viết các số từ 1 đến 10 ; ở hàng thứ hai, từ trái sang phải, viết các số từ 11 đến 20 ; cứ như vậy cho đến hết hàng thứ 10 . Sau đó cắt bảng hình vuông thành những hình chữ nhật cỡ 1×2 hoặc 2×1 . Tính tích số của hai số trong mỗi hình chữ nhật rồi cộng 50 tích lại. Cần phải cắt hình vuông như thế nào để tổng tìm được nhỏ nhất?

Bài 7. (Nhật Bản 2007) Ta có 15 tấm thẻ được đánh số $1, 2, \dots, 15$. Có bao nhiêu cách chọn ra một số (ít nhất 1) tấm thẻ sao cho tất cả các số viết trên các tấm thẻ này đều lớn hơn hoặc bằng số tấm thẻ được chọn.

Bài 8. Trên một đường thẳng nằm ngang, cho 2005 điểm được đánh dấu trắng hoặc đen. Với mỗi điểm, xác định tổng tất cả các điểm trắng bên phải và điểm đen bên trái của nó. Biết rằng, trong 2005 tổng trên có đúng một số xuất hiện số lẻ lần. Hãy tìm tất cả các giá trị có thể có của số này.

Bài 9. (Định lý Mantel – Turan) Chứng minh rằng đồ thị đơn bậc n không chứa tam giác

có không quá $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ đỉnh.

Bài 10. Cho $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Tìm số tất cả các bộ ba tập con (A, B, C) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

- a) $A \cup B \cup C = E$;
- b) $A \cap B \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset$.

Bài 11. (Bài toán về vé hạnh phúc) Vé xe buýt có dạng $abcdef$ trong đó a, b, c, d, e, f là các chữ số thuộc $E = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Vé $abcdef$ được gọi là vé hạnh phúc nếu như $a + b + c = d + e + f$. Hãy tìm số vé hạnh phúc trong các vé từ 000000 đến 999999 theo sơ đồ sau:

- a) Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình

$$a + b + c = d + e + f \quad (a, b, c, d, e, f) \in E^6 \quad (1)$$

bằng số nghiệm của phương trình

$$a + b + c + d + e + f = 27 \quad (a, b, c, d, e, f) \in E^6 \quad (2)$$

- b) Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình (2) bằng số nghiệm của phương trình

$$a + b + c + d + e + f = 27 \quad (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{N}^6$$

trừ đi số phần tử của $N = N_a \cup N_b \cup N_c \cup N_d \cup N_e \cup N_f$, trong đó

$$N_a = \{ (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{N}^6, a + b + c + d + e + f = 27, a \geq 10 \}$$

(N_b, N_c, N_d, N_e, N_f định nghĩa tương tự).

Bài 12. Một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ với $a_i \in \{0; 1\}$ được gọi là một xâu nhị phân có độ dài n . Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài $n, n > 3$ chứa đúng hai lần xuất hiện của 01.

Bài 13. (Vĩnh Phúc 2011) Cho số nguyên $n \geq 2$. Chứng minh rằng trong mọi họ gồm ít nhất $2^{n-1}+1$ tập hợp con không rỗng phân biệt của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$ đều tìm được ba tập hợp mà một trong chúng là hợp của hai tập hợp còn lại.

Bài 14. (Vĩnh Long 2011) Trong mặt phẳng cho 2011 điểm sao cho với ba điểm bất kỳ trong số các điểm đó ta luôn tìm được hai điểm để đoạn thẳng được tạo thành có độ dài bé hơn 1. Chứng minh luôn tồn tại một hình tròn bán kính là 1 chứa không ít hơn 1006 điểm đã cho.

Bài 15. Cho n điểm trong mặt phẳng, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng, biết rằng ba điểm bất kỳ trong n điểm đã cho tạo thành một tam giác có diện tích không lớn hơn 1. Chứng minh rằng có thể phủ tất cả n điểm đã cho bằng một tam giác có diện tích không lớn hơn 4.

Xét tam giác ABC có diện tích lớn nhất và vẽ tam giác DEF là tam giác nhận tam giác ABC là tam giác trung bình. Khi đó DEF là tam giác cân tìm.

Bài 16. Có n đội bóng thi đấu vòng tròn 1 lượt. Hãy lập lịch thi đấu gồm $n-1$ vòng đấu sao cho trong mỗi vòng, mỗi đội chỉ thi đấu nhiều nhất 1 trận.

Bài 17. Cho $2n+1$ máy tính. Hai máy tính bất kỳ được nối với nhau bởi một sợi dây. Chứng minh rằng có thể tô các máy tính và các sợi dây bằng $2n+1$ màu sao cho:

- i) Các máy tính được tô màu khác nhau
- ii) Các sợi dây xuất phát từ cùng một máy tính được tô màu khác nhau
- iii) Hai máy tính và sợi dây nối chúng được tô màu khác nhau.

Xếp các máy tính lên đỉnh một $2n+1$ giác đều $A_1A_2...A_{2n+1}$ và tô màu lần lượt là $1, 2, \dots, 2n+1$. Với mỗi i , Nối đường kính OA_i và tô tất cả các cạnh và đường chéo vuông góc với OA_i bằng màu i . Ta sẽ được phép tô thỏa mãn điều kiện.

Bài 18. (Việt Nam TST 2009) Có $6n+4$ nhà toán học tham dự 1 hội nghị, trong đó có $2n+1$ buổi thảo luận. Mỗi buổi thảo luận đều có 1 bàn tròn cho 4 người ngồi và n bàn tròn cho 6 người ngồi. Biết rằng 2 người bất kỳ không ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau quá 1 lần.

- Hỏi có thể thực hiện được không với $n=1$?
- Hỏi có thể thực hiện được không với $n>1$?

Bài 19. Trong đường tròn đơn vị có 4 điểm sao cho khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ trong chúng lớn hơn 1. Chứng minh rằng có thể kẻ hai đường kính vuông góc của đường tròn sao cho trong mỗi một góc $1/4$ có đúng 1 trong 4 điểm đã cho.

Bài 20. Số nguyên dương A trong cách viết thập phân được gọi là số kỳ quặc nếu tổng của A và số thu được từ A bằng cách viết theo thứ tự ngược lại là một số có tất cả các chữ số đều lẻ. Hãy tìm số các số kỳ quặc có 3 chữ số.

Bài 21. Cho $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Tìm số tất cả các bộ ba tập con A, B, C của M thỏa mãn điều kiện

$$A \cup B \cup C = M, A \cap B \cap C = \emptyset.$$

Bài 22. Có ba lớp học A, B, C , mỗi lớp có 30 học sinh. Biết rằng một học sinh bất kỳ đều quen với ít nhất 31 học sinh khác lớp. Chứng minh rằng tồn tại ba học sinh a, b, c lần lượt thuộc lớp A, B, C sao cho họ đôi một quen nhau.

Chọn học sinh có số bạn quen nhiều nhất ở 1 lớp khác. Giả sử số bạn quen lớn nhất đó là k . Giả sử đó là học sinh a ở lớp A và a quen với k học sinh ở lớp B . Do a quen với ít nhất 31 học sinh và $a \leq 30$ nên a quen với ít nhất một học sinh ở C , giả sử đó là c . Theo định nghĩa của k , c quen không quá k học sinh ở A , do đó c quen với ít nhất $31-k$ học sinh ở B . Vì tổng số người quen của a và c trong B ít nhất là $k + 31-k = 31$ nên a và c phải có ít nhất một người quen chung trong B . Giả sử đó là b thì a, b, c là 3 học sinh cần tìm.

Bài 23. Cho n là số nguyên dương. Ta nói số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện C_n nếu tồn tại $2k$ số nguyên dương phân biệt $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k$ sao cho $a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k$ cũng phân biệt và nhỏ hơn n .

- Chứng minh rằng nếu k thỏa mãn điều kiện C_n thì $k \leq (2n-3)/5$.
- Chứng minh rằng 5 thỏa mãn điều kiện C_{14} .

Page 5

Bài 27. Xét số tự nhiên $n \geq 2$. Bắt đầu các số $1, 2, \dots, 2n-1, 2n$ ta thực hiện các phép biến đổi như sau: Chọn 2 số a, b sao cho $a - b \geq 2$, xóa hai số này và thay bằng hai số $a - 1, b + 1$; với bộ số thu được, ta lại thực hiện phép biến đổi tương tự, và cứ như vậy.

- Chứng minh rằng sau một số lần thực hiện các phép biến đổi như trên, ta phải đạt đến trạng thái dừng, tức là không thể thực hiện được một phép biến đổi nào nữa.
- Gọi k là số phép biến đổi cần thực hiện để đạt đến trạng thái dừng. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của k .

Bài 28. (Vietnam TST 2008) Kí hiệu M là tập hợp gồm 2008 số nguyên dương đầu tiên. Tô tất cả các số thuộc M bởi ba màu xanh, vàng, đỏ sao cho mỗi số được tô bởi một màu và mỗi màu đều được dùng để tô ít nhất một số. Xét các tập hợp sau:

trong đó x, y, z có cùng màu và $x + y + z = 2008$;
 trong đó x, y, z đôi một khác màu và $x + y + z = 2008$.
 Chứng minh rằng $\left| \begin{matrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{matrix} \right|$ (Kí hiệu là tích Đề - các).

Bài 29. Một ngũ giác lồi có tất cả các góc trong bằng nhau và các cạnh đều là các số hữu tỷ. Chứng minh rằng ngũ giác đó là ngũ giác đều.

Bài 30. Hai người A và B cùng chơi một trò chơi. Ban đầu trên bàn có 100 viên kẹo. Hai người thay phiên nhau bốc kẹo, mỗi lần được bốc k viên với $k \in \{1, 2, 6\}$. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng, người đi trước hay người đi sau?

Bài 31. a) Trên bảng có số 2010. Hai người A và B cùng luân phiên thực hiện trò chơi sau: Mỗi lần thực hiện, cho phép xóa đi số N đang có trên bảng và thay bằng $N-1$ hoặc $[N/2]$. Ai thu được số 0 trước là thắng cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng, người đi trước hay người đi sau.

b) Cùng câu hỏi với luật chơi thay đổi như sau: Mỗi lần thực hiện, cho phép xóa đi số N đang có trên bảng và thay bằng $N-1$ hoặc $[(N+1)/2]$.

Bài 32. Hình tròn được bởi 5 đường kính thành thành 10 ô bằng nhau. Ban đầu trong mỗi ô có 1 viên bi. Mỗi lần thực hiện, cho phép chọn 2 viên bi bất kỳ và di chuyển chúng sang ô bên cạnh, 1 viên theo chiều kim đồng hồ và 1 viên ngược chiều kim đồng hồ. Hỏi sau một số hữu hạn lần thực hiện, ta có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng 1 ô được không?

Ta tô màu các ô bằng hai màu đen trắng xen kẽ nhau. Gọi S là tổng số viên bi nằm ở các ô đen thì ở trạng thái ban đầu ta có $S = 5$. Nếu giả sử ngược lại rằng ta có thể đưa các viên bi về cùng 1 ô thì ở trạng thái cuối cùng này, ta sẽ có $S = 0$ (nếu ta dồn các viên bi về một ô trắng) hoặc $S = 10$ (nếu ta dồn các viên bi về một ô đen).

Bây giờ ta sẽ thu được điều mâu thuẫn nếu ta chứng minh được qua các lần thực hiện thì tính chẵn lẻ của S sẽ không thay đổi, tức là nếu ban đầu S là số lẻ thì qua các lần thực hiện, S sẽ luôn là số lẻ (và sẽ không thể bằng 0 hoặc bằng 10).

Nếu nhận xét rằng các ô đen trắng xen kẽ nhau thì điều mà chúng ta cần chứng minh khá hiển nhiên và chúng tôi xin dành phép chứng minh chi tiết cho bạn đọc.

Bài 33. Có $2n$ người xếp thành 2 hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một số người (ít nhất 1) từ $2n$ người này, sao cho không có hai người nào đứng kề nhau được chọn. Hai người đứng kề nhau là hai người có số thứ tự liên tiếp trong một hàng dọc hoặc có cùng số thứ tự ở hai hàng.

Gọi S_n là số cách chọn ra một số người từ $2n$ người xếp thành 2 hàng dọc và T_n là số cách chọn ra một số người từ $2n-1$ người xếp thành 2 hàng dọc, trong đó khuyết một chỗ ở đầu của một hàng. Ta có $S_1 = 2$, $T_1 = 1$.

1	3			
2	4			

Hình 1. S_n với $n = 5$

1	2			

Hình 2. T_n với $n = 5$

Xét $2n$ người xếp thành 2 hàng dọc (như hình 1). Ta xét các cách chọn thoả mãn điều kiện đầu bài. Xảy ra các khả năng sau :

- 1) Người ở vị trí số 1 được chọn : Khi đó người ở vị trí số 2 và số 3 không được chọn. Có $T_{n-1} + 1$ cách chọn (+1 là do bổ sung cách chọn « không chọn gì cả »)
- 2) Người ở vị trí số 2 được chọn : Tương tự, có $T_{n-1} + 1$ cách chọn.

3) Cả hai người ở vị trí số 1 và số 2 đều không được chọn: Có S_{n-1} cách chọn.
 Vậy ta có $S_n = S_{n-1} + 2T_{n-1} + 2$ (1).
 Xét $2n-1$ người xếp thành 2 hàng dọc (như hình 2). Ta xét các cách chọn thoả mãn điều kiện đầu bài. Xảy ra các khả năng sau :

- 1) Người ở vị trí số 1 được chọn : Khi đó người ở vị trí số 2 không được chọn có $T_{n-1} + 1$ cách chọn
 - 2) Người ở vị trí số 1 không được chọn : có S_{n-1} cách chọn.
- Vậy ta có $T_n = S_{n-1} + T_{n-1} + 1$ (2)

Từ (1) ta suy ra $2T_{n-1} = S_n - S_{n-1} - 2$, $2T_n = S_{n+1} - S_n - 2$. Thay vào (2), ta được

$$S_{n+1} - S_n - 2 = 2S_{n-1} + S_n - S_{n-1} - 2 + 2$$

$$S_{n+1} = 2S_n + S_{n-1} + 2$$

Từ đây dễ dàng tìm được

$$S_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} - 2}{2}$$

Bài 34. Tìm số tất cả các bộ n số $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sao cho

- (i) $x_i = \pm 1$ với $i = 1, 2, \dots, n$.
- (ii) $0 \leq x_1 + x_2 + \dots + x_r < 4$ với $r = 1, 2, \dots, n-1$;
- (iii) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 4$.

Bài 35. Trong một nhóm gồm $2n+1$ người với mỗi n người tồn tại một người khác n người này quen với tất cả họ. Chứng minh rằng trong nhóm người này có 1 người quen với tất cả mọi người.

Ta sẽ chứng minh trong nhóm người này có một nhóm $n+1$ người đôi một quen nhau (gọi là nhóm A). Từ đó, xét n người còn lại. Theo giả thiết, có 1 người trong nhóm A quen với n người này. Suy ra người này quen với tất cả mọi người.

Để chứng minh khẳng định về sự tồn tại của nhóm A , ta giả sử k là kích thước (số người) lớn nhất của một nhóm người đôi một quen nhau. Ta cần chứng minh $k \geq n+1$. Giả sử ngược lại $k \leq n$. Theo giả thiết, tồn tại 1 người trong số những người còn lại quen với k người này. Bổ sung người này vào nhóm, ta được nhóm gồm $k+1$ người đôi một quen nhau. Mâu thuẫn với điều giả sử k lớn nhất.

Bài 36. Trong một đa giác lồi có chứa không ít hơn m^2+1 điểm nguyên. Chứng minh rằng trong đa giác lồi này tìm được $m+1$ điểm nguyên cùng nằm trên một đường thẳng.

Bài 37. Chứng minh rằng trong 9 người bất kỳ, hoặc có 3 người đôi một quen nhau, hoặc có 4 người đôi một không quen nhau.

Bài 38. Chọn ra 69 số nguyên dương từ tập hợp $E = \{1, 2, \dots, 100\}$. Chứng minh rằng tồn tại 4 số $a < b < c < d$ trong 4 số được chọn sao cho $a + b + c = d$. Kết luận bài toán còn đúng không nếu ta thay 69 bằng 68?

Giả sử các số đó là $a_1 < a_2 < \dots < a_{69}$. Xét 2 tập hợp

$A = \{a_2 + a_3, a_2 + a_4, \dots, a_2 + a_{69}\}$, $B = \{a_3 - a_1, \dots, a_{69} - a_1\}$ thì $|A| = |B| = 67$. Do $a_{69} - a_2 \geq 67$ nên ta suy ra $a_2 \leq a_{69} - 67 \leq 100 - 67 = 33$. Suy ra $a_2 + a_{69} \leq 133$. Ngoài ra $a_3 - a_1 \geq 2$. Do đây là các số lớn nhất của cả A và B nên ta có

$$A, B \subset \{2, 3, \dots, 133\} = C.$$

Vì $|C| = 132 < 134 = |A| + |B|$ nên từ đây ta suy ra $A \cap B \neq \emptyset$. Suy ra tồn tại $i, j \geq 3$ sao cho

$a_2 + a_i = a_j - a_1$. Rõ ràng $i < j$ và như thế ta có $a_1 + a_2 + a_i = a_j$.

Dựa vào cách giải trên, có thể chỉ ra 68 số mà trong đó không tìm được 4 số thỏa mãn điều bài, đó là:

$$33, 34, \dots, 100.$$

Do tổng ba số nhỏ nhất trong các số này đã là $33 + 34 + 35 = 102 > 100$ là số lớn nhất nên không tồn tại ba số a, b, c, d sao cho $a + b + c = d$.

Bài 39. Một quốc gia có 16 thành phố và có 36 tuyến bay nối giữa chúng. Chứng minh rằng ta có thể tổ chức một chuyến bay vòng quanh giữa 4 thành phố.

Bài toán tương đương với việc trong đồ thị (V, E) có 16 đỉnh và 36 cạnh chứng minh tồn tại một chu trình độ dài 4. Ta chứng minh bằng phản chứng. Với mỗi đỉnh x , ta gọi U_x là tập hợp tất cả những đỉnh kề với x . Gọi V_x là tập hợp tất cả các bộ hai đỉnh cùng kề với x . Rõ ràng $|V_x| = |U_x|(|U_x| - 1)/2$. Ta thấy rằng với mọi x khác y thì $V_x \cap V_y = \emptyset$. Thật vậy, nếu $V_x \cap V_y = (u, v)$ thì rõ ràng $uxvy$ là chu trình độ dài 4, mâu thuẫn với điều giả sử.

Như vậy, các V_x đôi một rời nhau và như thế ta có $|V_x| \leq 15 \cdot 14/2 = 105$ nhỏ hơn hoặc bằng số cặp các đỉnh của đồ thị, tức là không lớn hơn $16 \cdot 15/2 = 120$.

Mặt khác:

Như vậy ta nhận được điều mâu thuẫn là
có điều phải chứng minh.

Do đó điều giả sử là sai và ta

Bài 40. Trong một nhóm n người có 3 người đôi một quen nhau và mỗi một người này quen nhiều hơn 1 nửa số người trong nhóm. Tìm số ít nhất có thể số bộ ba người đôi một quen nhau.

Bài 41. Các số $1, 2, \dots, n$ được viết trên bảng. Mỗi một phút, một học sinh lên bảng, chọn hai số x và y , xóa chúng đi và viết lên bảng số $2x + 2y$. Quá trình này tiếp diễn cho đến

khi trên bảng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng số này không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$.

Bài 42. Cho tập hợp A gồm các số nguyên dương có tính chất sau

(i) $\min A = 1, \max A = 100$.

(ii) Với mọi a thuộc A , $a > 1$ đều tồn tại b, c thuộc A (b không nhất thiết khác c) sao cho $a = b + c$.

Tìm GTNN của $|A|$.

Bài 43. Cho $S = \{1, 2, \dots, 2012\}$. Ta muốn phân hoạch S thành hợp của hai tập con rời nhau sao cho mỗi tập con không chứa hai phần tử phân biệt có tổng là một lũy thừa của 2. Hãy tìm số các phân hoạch như vậy.

Bài 44. Trong hệ thống các tuyến xe buýt của thành phố, hai tuyến bất kỳ có chung đúng một bến, và mỗi tuyến có ít nhất 4 bến. Chứng minh rằng có thể phân các bến thành hai nhóm sao cho mỗi một tuyến xe buýt đều có bến thuộc cả hai nhóm.

Bài 45. Cho $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Với mỗi tập con A khác rỗng của X , gọi $m(A)$ là trung bình và $d(A)$ là trung vị của A . Hãy tìm giá trị trung bình của $m(A)$ và giá trị trung bình của $d(A)$ khi A chạy trên tất cả các tập con khác rỗng của X .

Bài 46. Trong một giải cờ vua có 40 kỳ thủ. Có tổng cộng 80 ván đã được đấu, và hai kỳ thủ bất kỳ đấu với nhau nhiều nhất một lần. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho trong mọi trường hợp, ta đều tìm được n kỳ thủ chưa hề đấu với nhau.

Bài 47. Trò chơi lô-tô ở Lotoland được tổ chức như sau: Người chơi chọn 6 số khác nhau từ các số 1, 2, 3, ..., 36. Sau đó người ta sẽ bốc ra ngẫu nhiên 6 số từ các số 1, 2, 3, ..., 36. Vé nào không chứa bất cứ số nào trong 6 số vừa bốc sẽ là vé thắng giải. Chứng minh rằng tồn tại một cách mua 9 vé để có thể đảm bảo luôn có ít nhất một vé thắng nhưng 8 vé thì nói chung không đủ để đảm bảo điều này.

Bài 48. Bàn cờ 12 x 12 được tô màu đen trắng như bình thường. Mỗi một lần thực hiện ta có thể sơn lại hai ô cạnh nhau theo quy tắc: đen thành xanh, xanh thành trắng, trắng thành đen. Hỏi ta cần phải dùng tối thiểu bao nhiêu bước để sơn bàn cờ thành màu đen trắng ngược với bàn cờ ban đầu?

Bài 49. Có 10 đồng tiền xếp thành một hàng dọc. Trong số đó có 8 đồng tiền thật nặng như nhau và 2 đồng tiền giả nặng như nhau nhưng nhẹ hơn các đồng tiền thật. Biết rằng hai đồng tiền giả xếp cạnh nhau. Hỏi phải cần ít nhất bao nhiêu lần cân đĩa để xác định ra 2 đồng giả?

Bài 50. Một nhóm 5 người bạn đi nghỉ hè. Mỗi ngày họ lập ra một danh sách gồm một số thành viên để lo hoạt động cho ngày hôm đó. Việc lập danh sách tuân thủ quy tắc sau:

- 1) Không có danh sách nào được lặp lại 2 lần;
- 2) Hai danh sách bất kỳ đều có ít nhất 1 người chung.

Hỏi nhóm học sinh trên có thể nghỉ hè chung nhiều nhất bao nhiêu ngày?