Bất biến, đơn biến và ứng dụng

Trần Nam Dũng

Tất cả rồi sẽ đổi thay, chỉ Tình yêu và Niềm tin là mãi mãi

Mở đầu

Bất biến là một trong những khái niệm trung tâm của toán học. Nó có mặt trong hầu hết các lĩnh vực của Toán học: Đại số, Hình học, Tô-pô, Lý thuyết số, Xác suất, Phương trình vi phân Ặ Chẳng hạn, các bất biến được sử dụng trong việc nghiên cứu các đồ thị phẳng (định lý Kuratowsky), giải tích hàm (chứng minh định lý về điểm bất động Brawer hay chứng minh hình cầu không đồng phôi với xuyến. Khó có định lý về phân loại (nhóm, đại số, đồ thị Ặ) nào lại thiếu sự có mặt của các bất biến. Có hẳn một lý thuyết bất biến nghiên cứu các dạng bất biến đại số của các biến đổi tuyến tính.

Bất biến là những đại lượng (hay tính chất) không thay đổi trong quá trình chúng ta thực hiện các phép biến đổi. Chẳng hạn khi thực hiện phép tịnh tiến thì khoảng cách giữa hai điểm sẽ không thay đổi. Với phép vị tự thì khác: khoảng cách có thể sẽ thay đổi, nhưng sẽ có một bất biến khác, đó là tỷ lệ giữa hai đoạn thẳng.

Một ví dụ khác về bất biến: Lấy một số nguyên dương N (viết trong hệ thập phân). Phép biến đổi T biến N thành tổng các chữ số của N. Ví dụ: $1997 \to 26 \to 8 \to 8 \ldots$ Ặ Vậy có gì bất biến ở đây? Có đấy, tất cả các số $N, T(N), T(T(N)), \ldots$ Ặ đều có cùng số dư khi chia cho 8. Đó chính là bất biến.

Đơn biến, trái lại, là một đại lượng luôn thay đổi, nhưng chỉ theo một chiều (tức là tăng lên hay giảm xuống). Chúng ta sẽ định nghĩa một cách chặt chẽ về bất biến cũng như đơn biến trong các phần sau, ở đây chỉ dừng lại ở một số ví dụ.

Xét bộ số nguyên dương (a, b, c). Phép biến đổi T biến (a, b, c) thành $(|bc|, |ca|, |ab|)$. Khi đó có thể chứng minh được rằng hàm số

$$S(a, b, c) = a + b + c$$

là một hàm không tăng, tức là một đơn biến đối với phép biến đổi T.

Trong bài viết này, chúng ta sẽ tìm hiểu về bất biến, đơn biến và ứng dụng của chúng trong việc giải các bài toán Olympic. Có hai mẫu bài toán tổng quát thường được giải quyết bằng bất biến và đơn biến:

Bài 1. *Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ω vào Ω. Có hai trạng thái α và β thuộc Ω. Hỏi có thể dùng hữu hạn các phép biến đổi thuộc T để đưa trạng thái α về trạng thái β được không?*

Bài 2. *Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ωvào Ω. Cần chứng minh rằng, bắt đầu từ một trạng thái α bất kỳ, sau một số hữu hạn các phép biến đổi từ T, ta sẽ đi đến trạng thái kết thúc (trong nhiều trường hợp, đó là trạng thái ổn định, tức là sẽ không tiếp tục thay đổi khi tác động các phép biến đổi từ T, tình huống $T(8) = 8$ ở trên đây là một ví dụ).*

Bất biến và đơn biến sẽ giúp chúng ta giải quyết các tình huống căn bản này. Tất nhiên, các tình huống áp dụng sẽ muôn hình vạn trạng, nhưng cũng cần có những kiến thức cơ bản và lối tư duy chung để tiếp cận các vấn đề. Chúng ta sẽ bắt đầu bằng một số ví dụ đơn giản.

1 Các ví dụ mở đầu

Ví dụ 1. *Xét một bảng vuông 4×4 ô. Tại mỗi ô của bảng vuông có chứa dấu $+$ hoặc dấu $-$. Mỗi một lần thực hiện, cho phép đổi dấu của tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Giả sử bảng vuông ban đầu có 1 dấu $+$ và 15 dấu $-$. Hỏi có thể đưa bảng ban đầu về bảng có toàn dấu cộng được không?*

Câu trả lời là không. Và lời giải khá đơn giản. Thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng -1. Xét tích tất cả các số trên bảng vuông. Khi đó, qua mỗi phép biến đổi, tích này không thay đổi (vì sẽ đổi dấu 4 số). Vì vậy, cho dù ta thực hiện bao nhiêu lần, từ bảng vuông (1, 15) sẽ chỉ đưa về các bảng vuông có số lẻ dấu -, có nghĩa là không thể đưa về bảng có toàn dấu cộng.

Ví dụ 2. *Trên bảng có các số $1/96, 2/96, 3/96, \ldots, 96/96$. Mỗi một lần thực hiện, cho phép xoá đi hai số a, b bất kỳ trên bảng và thay bằng $a + b2ab$. Hỏi sau 95 lần thực hiện phép xoá, số còn lại trên bảng là số nào?*

Tôi rất thích ví dụ này. Khi đặt bài toán cho các học sinh, bạn nào cũng lắc đầu lè lưỡi vì đề bài yêu cầu tính toán quá nhiều. Hơn nữa, trong bài toán trên, thứ tự thực hiện các phép toán lại không được nói rõ, tạo ra một tình huống gần như không thể xử lý nổi.

Nhưng chính những khó khăn đó lại gợi mở ra cách giải. Ở đây tôi sẽ không trình bày cụ thể cách phân tích để tìm ra hướng giải. Chỉ biết rằng, khi lời giải được đưa ra, các bạn học sinh đều vô cùng bất ngờ và thích thú. Cũng từ sự thích thú này, việc đưa tiếp các ví dụ tiếp theo được đón tiếp một cách nồng nhiệt hơn hẳn.

Sau đây là lời giải đó.

Giả sử các số trên đang là $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ta cho tương ứng bảng này với

$$(2a_1 - 1)(2a_2 - 1)(2a_k - 1).$$

Khi đó, sau mỗi lần biến đổi, tích trên bị mất đi hai thừa số $(2a-1)(2b-1)$ và được thêm vào thừa số

$$2(a+b-2ab)-1=-(2a-1)(2b-1).$$

Do đó tích trên vẫn không đổi (chỉ đổi dấu). Vì tích ban đầu bằng 0 (do bảng ban đầu có chứa số $48/96 = 1/2$!) nên số cuối cùng s cũng phải cho tích số bằng 0, tức là $2s1 = 0$, suy ra $s = 1/2$! Thật ấn tượng.

Kết quả không phụ thuộc vào thứ tự thực hiện (điều này có thể dự đoán được qua cách đặt câu hỏi ở đề bài). Và lời giải mới ngắn gọn làm sao! Không cần một tính toán nào.

Ví dụ 3. *Cho 3 số nguyên không âm a, b, c bất kỳ. Mỗi một lần thực hiện, ta biến bộ (a, b, c) thành bộ $(|bc|, |ca|, |ab|)$. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các phép biến đổi, ta thu được bộ có chứa số 0.*

Đặt $M = \max\{a, b, c\}$. Ta chứng minh rằng nếu bộ (a, b, c) không chứa số 0 thì M sẽ giảm sau khi thực hiện phép biến đổi. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geqslant b \geqslant c$. Khi đó ta có

$$|bc| < b \leqslant a, \quad |c-a| < a, |ab| < a,$$

suy ra

$$\max\{|bc|, |ca|, |ab|\} < a = \max(a, b, c).$$

Như vậy, nếu ta chưa thu được số 0 thì M sẽ nhỏ đi ít nhất một đơn vị (do tính chất của số nguyên). Quá trình này không thể kéo dài vô hạn. Vì thế, chắc chắn phải có lúc nào đó xuất hiện số 0.

Trong ví dụ trên, $\max\{a, b, c\}$ chính là một đơn biến. Đây là một phương pháp khá hiệu quả để chứng minh một quá trình là dừng.

Chú ý rằng phương pháp này thường sử dụng các tính chất cơ bản sau đây của số nguyên:

i) $m < n$ suy ra $m \leqslant n1$;

ii) Một tập con bất kỳ của $\mathbb{N}$ đều có phần tử nhỏ nhất (tính sắp thứ tự tốt).

Để thấy rõ điều quan trọng của các tính chất xem chừng rất đơn giản này, ta sẽ đưa ra ví dụ cho thấy rằng kết luận ở ví dụ 3 không còn đúng nếu a, b, c không còn là số nguyên (hay đúng hơn, không còn là số hữu tỷ).

Thật vậy, gọi α là nghiệm dương của phương trình $x^2x1 = 0$. Chọn các số $a = \alpha^2, b = \alpha, c = 1$ thì ta có

$$|ab| = \alpha^2 - \alpha = (\alpha-1)\alpha, \quad |ac| = \alpha^2 1 = (\alpha-1)(\alpha+1) = (\alpha-1)\alpha^2, \quad |bc| = \alpha - 1.$$

Suy ra bộ số mới tỷ lệ với bộ số cũ theo tỷ lệ $\alpha - 1$. Và như thế, sau n lần thực hiện, bộ số của chúng ta sẽ là $(\alpha-1)n(\alpha^2, \alpha, 1)$, không bao giờ chứa 0.

Ví dụ 4. *Trong quốc hội Mỹ, mỗi một nghị sĩ có không quá 3 kẻ thù. Chứng minh rằng có thể chia quốc hội thành 2 viện sao cho trong mỗi viện, mỗi một nghị sĩ có không quá một kẻ thù.*

Đây cũng là một ví dụ mà tôi rất thích. Có nhiều cách giải khác nhau nhưng ở đây chúng ta sẽ trình bày một cách giải sử dụng đơn biến. Ý tưởng tuy đơn giản nhưng có rất nhiều ứng dụng (trong nhiều bài toán phức tạp hơn).

Ta chia quốc hội ra thành 2 viện A, B một cách tùy ý. Với mỗi viện A, B, ta gọi $s(A), s(B)$ là tổng của tổng số các kẻ thù của mỗi thành viên tính trong viện đó. Giả sử rằng cách chia này vẫn chưa thoả mãn yêu cầu, tức là vẫn có một nghị sĩ nào đó có nhiều hơn 1 kẻ thù trong viện của mình. Không mất tính tổng quát, giả sử nghị sĩ x thuộc A có ít nhất 2 kẻ thù trong A. Khi đó ta thực hiện phép biến đổi sau: chuyển x từ A sang B để được cách chia mới là $A = A \setminus \{x\}$ và $B = B \cup \{x\}$. Vì x có ít nhất 2 kẻ thù trong A và A không còn chứa x nên ta có

$$s(A) \leqslant s(A)4$$

(trong tổng mất đi ít nhất 2 của $s(x)$ và 2 của các kẻ thù của x trong A).

Vì x có không quá 3 kẻ thù và có ít nhất 2 kẻ thù trong A nên x có nhiều nhất 1 kẻ thù trong B (hay B), cho nên

$$s(B) \leqslant s(B) + 2.$$

Từ đó $s(A) + s(B)$
$leqslants(A) + s(B)2$.

Như vậy nếu (A, B) là một cách chia chưa thoả mãn điều kiện thì ta có thể biến đổi A, B để có một cách chia mới có tổng $s(A) + s(B)$ nhỏ đi ít nhất 2 đơn vị. Rõ ràng quá trình này không thể thực hiện được mãi, có nghĩa là tồn tại cách chia $(A*, B*)$ mà ở đó không tồn tại nghị sĩ có quá 1 kẻ thù trong viện của mình, đó chính là đpcm.

Bất biến cũng có thể xuất hiện trong các bài toán về trò chơi. Trò chơi Nim là một ví dụ điển hình.

Ví dụ 5. *Có 3 đống sỏi có k, m, n viên sỏi. Hai người cùng chơi trò chơi sau: Người thứ nhất chọn ra một đống sỏi và bốc đi một số sỏi tuỳ ý (ít nhất là 1 viên sỏi); sau đó đến lượt người thứ hai chọn ra một đống sỏi và bốc đi một số sỏi tuỳ ý (ít nhất là 1 viên sỏi); và cứ như thế tiếp tục. Người nào đến lượt mình không thể bốc được nữa (tức là không còn viên sỏi nào) sẽ là người thua cuộc. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng.*

Ý tưởng của lời giải bài toán này là tìm một tính chất của bộ (k, m, n) sao cho với mọi cách bốc sỏi thành bộ (k, m, n), tính chất này sẽ bị mất đi, nhưng từ bộ (k, m, n) không có tính chất này, luôn tìm được một cách bốc để đưa về bộ mới có tính chất này.

Giả sử có một tính chất như vậy (giả sử là T) và giả sử bộ $(0, 0, 0)$ có tính chất T. Khi đó người đi trước sẽ thắng cuộc nếu bộ (k, m, n) ban đầu không có tính chất T và sẽ thua cuộc nếu bộ ban đầu có tính chất T.

Ta sẽ quay lại lời giải của bài toán này ở phần sau, nhưng trước hết ta giải thích về Ôtính chất TÕ thông qua một trường hợp đơn giản của bài toán Nim.

Cụ thể, xét bài toán Nim trong trường hợp chỉ có hai đống sỏi. Khi đó ta nói bộ (m, n) có tính chất T nếu $m = n$. Rõ ràng $(0, 0)$ có tính chất T. Từ bộ (m, n) có tính chất T (tức là m=n), với mọi cách bốc sỏi, ta đều phá đi tính chất T của nó. Ngược lại, với bộ (m, n) không có tính chất T, ta luôn đưa được về bộ có tính chất T bằng cách bốc đi $|mn|$ viên sỏi ở đống sỏi có số sỏi nhiều hơn. Như thế tính chất T của chúng ta thoả mãn yêu cầu đề bài. Và như thế, nếu ban đầu hai đống sỏi có số sỏi khác nhau thì người thứ nhất thắng cuộc, còn nếu hai đống sỏi có số sỏi giống nhau thì người thứ hai thắng cuộc.

Cuối cùng, ta xét đến một ứng dụng của bất biến trong hình học

Ví dụ 6. *Chứng minh rằng trong một đa diện lồi, luôn tồn tại ít nhất 1 đỉnh là đỉnh của một góc tam diện hoặc ít nhất một mặt là tam giác.*

Ví dụ này hơi lạ so với các ví dụ trước vì không có phép biến đổi nào. Thực ra, bất biến không chỉ xuất hiện ở những chỗ có các phép biến đổi mà nó còn xuất hiện khi ta xét một lớp các đối tượng thoả mãn những tính chất nào đó. Ví dụ với các điểm (x, y) nằm trên đường tròn đơn vị thì $x^2 + y^2$ là một bất biến. Còn với một đa diện lồi bất kỳ thì ta có công thức Euler nổi tiếng

$$V\text{-}E + F = 2,$$

trong đó V là số đỉnh, F là số mặt và E là số cạnh của một đa diện lồi bất kỳ.

Ta sẽ dùng công thức này để giải bài toán của chúng ta.

Giả sử ngược lại, tồn tại một đa diện mà không có đỉnh nào là đỉnh của một góc tam diện và không có mặt nào là tam giác. Khi đó, do một mặt sẽ có ít nhất 4 cạnh và một cạnh chỉ có thể là cạnh của hai mặt nên ta có $F \leqslant E/2$. Với lý luận tương tự, ta có $V \leqslant E/2$. Vì vậy $V + F\text{-}E \leqslant E/2 + E/2E = 0$, mâu thuẫn.

Cuối cùng, chúng ta sẽ kết thúc phần ví dụ mở đầu bằng phép chứng minh công thức Euler nêu trên. Qua chứng minh này có thể thấy sự xuất hiện của các phép biến đổi. Phép chứng minh này do Cauchy đưa ra khi ông chỉ mới 20 tuổi.

Remove one face of the polyhedron.

By pulling the edges of the missing face away from each other, deform all the rest into a planar network of points and curves, as illustrated by the first of the three graphs for the special case of the cube. (The assumption that the polyhedron is homeomorphic to the sphere at the beginning is what makes this possible.) After this deformation, the regular faces are generally not regular anymore Ô in fact, they are not even polygons. However, the numbers of vertices, edges and faces remain the same as those of the given polyhedron. (The removed face corresponds to the exterior of the network.)

If there is a face with more than three sides, draw a diagonal Ô that is, a curve through the face connecting two vertices that aren't connected yet. This adds one edge and one face and does not change the number of vertices, so it does not change the quantity $V - E + F$. Continue adding edges in this manner until all of the faces are triangular.

Apply repeatedly either of the following two transformations:

1. Remove a triangle with only one edge adjacent to the exterior, as illustrated by the second graph. This decreases the number of edges and faces by one each and does not change the number of vertices, so it preserves $V - E + F$.

2. Remove a triangle with two edges shared by the exterior of the network, as illustrated by the third graph. Each triangle removal removes a vertex, two edges and one face, so it preserves $V - E + F$.

Repeat these two steps, one after the other, until only one triangle remains.

At this point the lone triangle has $V = 3, E = 3$, and $F = 2$ (counting the exterior), so that $V - E + F = 2$. This equals the original $V - E + F$, since each transformation step has preserved this quantity. Therefore at the start of the process it was true that $V - E + F = 2$. This proves the theorem.

2 Bất biến và ứng dụng

Bây giờ ta sẽ đưa ra định nghĩa chặt chẽ cho một dạng bất biến mà ta sẽ sử dụng nhiều nhất trong các bài toán áp dụng, cũng như một số các khái niệm liên quan như quỹ đạo, bất biến toàn năng, hệ bất biến toàn năng.

Định nghĩa 1. *Cho Ω là một tập hợp các trạng thái. T là tập hợp các phép biến đổi từ Ω vào Ω. Hàm số $f : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là bất biến trên tập các trạng thái Ω đối với tập các phép biến đổi T nếu*

$$f(t(\omega)) = f(\omega), \forall \omega \in \Omega, \forall t \in T.$$

Như vậy, bất biến f có thể giúp chúng ta giải quyết trọn vẹn câu hỏi ÒBằng các phép biến đổi T, có thể đưa từ trạng thái ω_s về trạng thái ω_fÔ trong trường hợp mà $f(\omega_s) \neq f(\omega_f)$. Cụ thể câu trả lời sẽ là ÒkhôngÕ (như ở ví dụ 1). Tuy nhiên, nếu $f(\omega_s) = f(\omega_s)$ thì ta lại chưa có thể kết luận gì. Chính vấn đề này dẫn đến một khái niệm mới: bất biến toàn năng.

Định nghĩa 2. *Bất biến f đối với cặp (Ω, T) được gọi là bất biến toàn năng nếu:*

Trạng thái ω_f có thể đưa về từ trạng thái ω_s bằng các phép biến đổi T khi và chỉ khi $f(\omega_f) = f(\omega_s)$.

Bất biến toàn năng sẽ giúp chúng ta giải quyết trọn vẹn bài toán Òchuyển đượcÕ. Tuy nhiên, việc xây dựng một bất biến như vậy không đơn giản. Trong nhiều trường hợp, sẽ dễ dàng hơn khi chúng ta xét đến một hệ bất biến toàn năng.

Định nghĩa 3. *Hệ các bất biến $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ đối với cặp (Ω, T) được gọi là hệ bất biến toàn năng nếu: Trạng thái ω_f có thể đưa về từ trạng thái ω_s bằng các phép biến đổi T khi và chỉ khi $f_i(\omega_f) = f_i(\omega_s)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$.*

Một khái niệm quan trọng khác có nhiều ứng dụng trong việc nghiên cứu các bất biến, đó là khái niệm quỹ đạo. Trên Ω, ta đưa ra quan hệ Óchuyển đượcÕ như sau: Ta nói trạng thái ω_s có thể chuyển được về trạng thái ω_f bằng các phép biến đổi T nếu tồn tại một dãy các phép biến đổi $t_1, t_2, \dots, t_m$ thuộc T sao cho

$$\omega_f = t_k(t_k - 1((t_1(\omega_s)\dots))$$

Khi đó ta viết $\omega_s {\rightarrow}_T \omega_f$.

Trong nhiều trường hợp, quan hệ $\rightarrow_T$ có tính phản xạ (ω_s có thể đưa về ω_s bằng cách Ặ không làm gì cả), bắc cầu (thực hiện phép hợp các phép biến đổi) và đối xứng (nếu các phép biến đổi T là khả nghịch). Trong trường hợp đó $\rightarrow_T$ là một quan hệ tương đương và ta sẽ viết $\omega_s \equiv \rightarrow_T \omega_f$ thay vì $\omega_s \rightarrow_T \omega_f$. Với quan hệ tương đương này, Ω sẽ được chia thành các lớp tương đương, có đại diện là $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$, ký hiệu là $\Omega_i = \{\omega | \omega \equiv \rightarrow_T \omega_i\}$. Ta gọi Ω_i là các quỹ đạo sinh bởi ω_i. Dễ thấy hai quỹ đạo bất kỳ hoặc trùng nhau, hoặc không giao nhau.

Ví dụ 7. *Trên tập hợp các hàm số, cho phép thực hiện các phép toán sau:*

1) Nhân hai hàm số đã có với nhau,

2) Cộng hai hàm số đã có với nhau,

3) Nhân hàm số với một hằng số thực.

Các phép toán trên tiếp tục có thể được thực hiện với các hàm đã có và các hàm kết quả thu được. Chứng minh rằng từ hai hàm số $f_1(x) = x + 1/x$ và $f_2(x) = x^2$, bằng các phép toán trên không thể thu được hàm số $f(x) = x$.

số phức

Lời giải. Ta thấy $f_1(i) = 0$ và $f_2(i) = -1$. Qua các phép biến đổi trên, số thực luôn biến thành số thực do đó nếu f là một hàm kết quả thì $f(i)$ là số thực. Vì thế, hàm số $f(x) = x$ không thể là một hàm kết quả.

Ví dụ 8. *Hình tròn được chia thành n ô. Trên mỗi ô có một viên sỏi. Mỗi một bước đi cho phép chọn hai viên sỏi và chuyển sang ô bên cạnh, một viên chuyển theo chiều kim đồng hồ, một viên chuyển ngược chiều kim đồng hồ. Với những giá trị nào của n thì có thể chuyển tất cả các viên sỏi về một ô sau một số hữu hạn lần thực hiện.*

Ví dụ 9. *Cho bảng vuông 4×4. Trên mỗi ô vuông người ta ghi dấu + hoặc dấu -. Mỗi phép biến đổi cho phép chọn một hàng hoặc một cột và đổi dấu tất cả các dấu trên đó.*

1) Có thể biến một bảng gồm 9 dấu cộng, 7 dấu trừ về bảng có toàn dấu cộng được không?

2) Tập trạng thái có bao nhiêu phần tử? Có bao nhiêu quỹ đạo?

3) Hãy tìm một hệ bất biến toàn năng của bài toán này.

3 Đơn biến và ứng dụng

Đơn biến là đại lượng mà luôn tăng hoặc luôn giảm trong quá trình biến đổi. Sau đây là định nghĩa chặt chẽ của đơn biến.

Định nghĩa 4. *Cho Ω là một tập hợp các trạng thái. T là tập hợp các phép biến đổi từ Ω vào Ω. Hàm số $f : \Omega \to \mathbb{N}$ được gọi là đơn biến trên tập các trạng thái Ω đối với tập các phép biến đổi T nếu*

$$f(t(\omega)) < f(\omega),\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall t \in T.$$

Chú ý là dấu bằng đôi khi có thể thay thế bằng dấu $>, \geqslant, \leqslant$. Ngoài ra, tập đích $\mathbb{N}$ cũng có thể được thay thế bằng một tập hợp có thứ tự tốt bất kỳ.

Đơn biến được sử dụng trong việc chứng minh một quá trình là dừng. Chúng ta minh hoạ ứng dụng này thông qua một số ví dụ.

Ví dụ 10. *Cho hàm số $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:*

$i) f(0,0) = 5^{2005}$, $f(0,n) = 0$ *với mọi số nguyên* $n \neq 0$,

$ii) f(m,n) = f(m-1,n) - 2\left[\frac{f(m-1,n}{2}\right] + \left[\frac{f(m-1,n-1}{2}\right] + \left[\frac{f(m-1,n+1}{2}\right]$
với mọi số tự nhiên
Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương N sao cho

$$f(m,n) = f(m,n)\,\forall m, m \geqslant N,\ n \in\in \mathbb{N}.$$

Ví dụ 11. *Cho $2n$ điểm trên mặt phẳng, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng những điểm này có thể phân thành n cặp sao cho các đoạn thẳng nối chúng không cắt nhau.*

Lời giải. Đầu tiên ta phân cặp các điểm một cách ngẫu nhiên và nối chúng lại với nhau. Gọi S là tổng các đoạn thẳng được nối (Chú ý rằng, do chúng ta có hữu hạn cách phân cặp nên tập giá trị của S là hữu hạn). Nếu có hai đoạn thẳng AB và CD cắt nhau tại O thì ta thay AB, CD bằng AC, BD. Vì

$$AB + CD = (AO + OB) + (CO + OD) = (AO + OC) + (BO + OD) > AC + BD$$

theo bất đẳng thức tam giác, nên nếu cặp đoạn thẳng nào đó giao nhau, ta có thể thay thế cách nối để S giảm xuống. Vì S chỉ có hữu hạn các giá trị nên một lúc nào đó quá trình phải dừng. Và khi đó, sẽ không có các cặp đoạn thẳng giao nhau.

4 Bài tập

1. Ở Vương quốc ÒSắc màu kỳ ảoÓ có 45 hiệp sĩ: 13 hiệp sĩ tóc đỏ, 15 hiệp sĩ tóc vàng, 17 hiệp sĩ tóc xanh. Khi hai hiệp sĩ có màu tóc khác nhau gặp nhau, tóc của họ sẽ lập

tức đổi sang màu thứ ba. Hỏi có thể có một lúc nào đó, tất cả các hiệp sĩ đều có màu tóc giống nhau?

2. Có 7 chiếc cốc đựng nước: chiếc cốc thứ nhất chứa 1/2 nước, chiếc cốc thứ hai chứa 1/3 nước, chiếc thứ ba chứa 1/4 nước, chiếc thứ tư chứa 1/5 nước, chiếc thứ năm chứa 1/8 nước, chiếc thứ sáu chứa 1/9 nước và chiếc thứ bảy chứa 1/10 nước. Cho phép đổ tất cả nước từ cốc này sang cốc khác hoặc đổ nước từ cốc này sanng cốc khác cho đến khi cốc chưa đầy. Có thể sau một số lần đổ nước, một chiếc cốc nào đó chứa

a) 1/12 nước b) 1/6 nước?

3. Có 1 bảng vuông $n \times n$. Trong $n-1$ ô của bảng có ghi các số 1, trong các ô còn lại ghi số 0. Cho phép thực hiện trên bảng phép biến đổi sau: chọn một ô, giảm số đang viết ở ô đó đi 1 đơn vị và tăng tất cả các số ở các ô cùng hàng, cùng cột với ô này lên một đơn vị. Hỏi có thể từ bảng ban đầu, sau một số phép biến đổi, thu được bảng gồm toàn các số bằng nhau?

4. Trên bảng có 4 số 3, 4, 5, 6. Mỗi một lần thực hiện cho phép xóa đi hai số x, y có trên bảng và thay bằng $x+y+\sqrt{x^2+y^2}, x+y-\sqrt{x^2+y^2}$. Hỏi sau 1 số hữu hạn bước thực hiện, trên bảng có thể xuất hiện 1 số nhỏ hơn 1 được không?

5. Trên bàn có 100 viên kẹo. Hai người cùng thay phiên nhau bốc đi k viên kẹo, trong đó $k \in \{1,2,3\}$. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng? Cùng câu hỏi trên với $k \in \{1,2,a\}$, là số nguyên dương cho trước.

6. Trên bảng có 1 số nguyên. Người ta ghi nhớ chữ số cuối cùng của số này, sau đó xoá đi và cộng thêm vào với số còn lại trên bảng 5 lần chữ số vừa xoá. Ban đầu trên bảng ghi số 7^{1998}. Hỏi có thể sau một số số lần thực hiện như thế, thu được số 1998^7?

7. Số nguyên dương có 4 chữ số trên bảng có thể biến đổi thành một số có 4 chữ số khác theo quy tắc sau: hoặc cộng thêm 1 vào hai chữ số liên tiếp của nó, nếu hai chữ số này đều không bằng 9; hoặc trừ đi 1 từ hai chữ số liên tiếp của nó, nếu hai chữ số này đều không bằng 0. Hỏi bằng các phép biến đổi như vậy, có thể thu được số 2002 từ số 1234?

8. Hai người chơi trò chơi sau. Ban đầu có các số 1, 2, 3, 4. Mỗi một lần thực hiện, người thứ nhất cộng vào hai số cạnh nhau nào đó 1 đơn vị, còn người thứ hai đổi chỗ hai số cạnh nhau nào đó. Người thứ nhất thắng nếu sau một nước đi nào đó tất cả các số bằng nhau. Hỏi người thứ hai có thể cản trở người thứ nhất chiến thắng?

Tài liệu tham khảo

1. Tolpygo, *Bất biến, Kvant*, 12/1976

2. N.Agakhanov, *Olympic Toán toàn nước Nga*, Nhà xuất bản MCCME, 2007 (tiếng Nga).

3. A.Schen, *Trò chơi và chiến thuật dưới quan điểm toán học*, Nhà xuất bản MCCME, 2007.

4. Kin Y.Li, Mathematical Games (I), *Mathematical Excalibur, July-October* 2002.