

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tìm m để phương trình $x^4 - 2x^2 = m + 3$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 2 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình: $2\cos 2x + 8\sin x - 5 = 0$.

b) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(2 - i)(1 + i) + \bar{z} = 4 - 2i$. Tính môđun của z .

Câu 3 (0,5 điểm). Giải bất phương trình: $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$.

Câu 4 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2y + x^2 + 1 = 2x\sqrt{x^2y + 2} \\ y^3(x^6 - 1) + 3y(x^2 - 2) + 3y^2 + 4 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 5 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos^2 x) \sin x dx$.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AC = 2a, BD = 4a$, tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC .

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $E(3; 4)$, đường thẳng $d: x + y - 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d và nằm ngoài đường tròn (C) . Từ M kẻ các tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (C) (A, B là các tiếp điểm). Gọi (E) là đường tròn tâm E và tiếp xúc với đường thẳng AB . Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn (E) có chu vi lớn nhất.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 3; 2)$, đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 6 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của d với (P) và viết phương trình mặt cầu (S) đi qua A , có tâm thuộc d đồng thời tiếp xúc với (P) .

Câu 9 (0,5 điểm). Gọi M là tập hợp các số tự nhiên gồm 9 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ M , tính xác suất để số được chọn có đúng 4 chữ số lẻ và chữ số 0 đứng giữa hai chữ số lẻ (các chữ số liền trước và liền sau của chữ số 0 là các chữ số lẻ).

Câu 10 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $-1 - 2\sqrt{2} < x < -1 + 2\sqrt{2}, y > 0, z > 0$ và $x + y + z = -1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

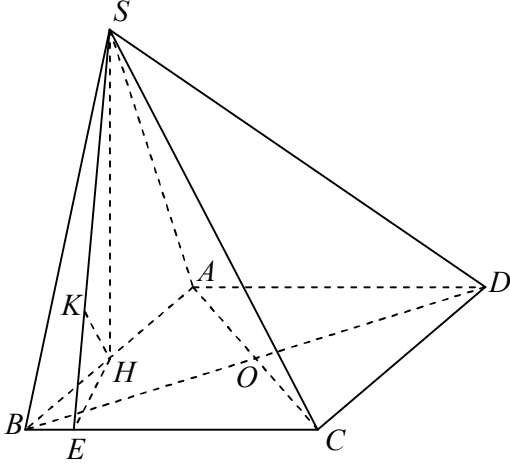
$$P = \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{8 - (y+z)^2}.$$

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm																		
Câu 1 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm)																			
	1) Tập xác định : $D = \mathbb{R}$	0,25																		
	2) Sự biến thiên: a, Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$																			
	b, Bảng biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$	0,25																		
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-4</td><td>$+\infty$</td></tr></table>		x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'	-	0	+	0	+	y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$
	x		$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$													
	y'	-	0	+	0	+														
	y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$														
	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.	0,25																		
	Hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = y(0) = -3$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1, y_{CT} = y(\pm 1) = -4$.																			
3) Đồ thị: Đồ thị (C) của hàm số nhận Oy làm trục đối xứng, giao với Ox tại 2 điểm $(\pm \sqrt{3}; 0)$.	0,25																			
	b) (1,0 điểm)																			
	Ta có $x^4 - 2x^2 = m + 3 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 3 = m$ (1).	0,25																		
	Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của (C) và đường thẳng $y = m$	0,25																		
	Theo đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < m < -3$.	0,25																		
	Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi $m \in (-4; -3)$.	0,25																		
Câu 2 (1,0 điểm)	a) (0,5 điểm)																			
	$2 \cos 2x + 8 \sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - 2 \sin^2 x) + 8 \sin x - 5 = 0$ $\Leftrightarrow 4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0$	0,25																		

	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,25
	b) (0,5 điểm)	
	Đặt $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó $\bar{z} = a - bi$. Theo bài ra ta có $(2-i)(1+i) + a - bi = 4 - 2i \Leftrightarrow a + 3 + (1-b)i = 4 - 2i$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 3 = 4 \\ 1 - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$ Do đó $z = 1 + 3i$, suy ra $ z = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$	0,25
Câu 3 (0,5 điểm)	Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$). Bất phương trình đã cho trở thành $3t^2 - 10t + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 3$	0,25
	Suy ra $\frac{1}{3} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = [-1; 1]$.	0,25
Câu 4 (1,0 điểm)	Điều kiện: $x^2 y \geq -2$. Gọi hai phương trình lần lượt là (1) và (2) $(2) \Leftrightarrow x^6 y^3 + 3x^2 y = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + 3(y-1)$ $\Leftrightarrow (x^2 y)^3 + 3x^2 y = (y-1)^3 + 3(y-1)$ (3)	0,25
	Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ Do đó (3) $\Leftrightarrow f(x^2 y) = f(y-1) \Leftrightarrow x^2 y = y-1, (y \geq -1)$. Thế vào (1) ta được $x^2 y + x^2 + 1 = 2x\sqrt{y+1}$ $\Leftrightarrow x^2(y+1) - 2x\sqrt{y+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{y+1} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{y+1} = 1$	0,25
	Do đó hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x\sqrt{y+1} = 1 \\ x^2 y = y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y + x^2 = 1 \\ x^2 y = y-1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x^2 \\ x^2(2 - x^2) + x^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases} \text{ (4)}$	0,25
	$(4) \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ Do $x > 0$ nên $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	
	Với $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Với $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right), (x; y) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$	0,25
Câu 5 (1,0 điểm)	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$ Đặt $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$	0,25
	Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow I_1 = -x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 1$	0,25

	$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$	0,25
	Vậy $I = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$	0,25
Câu 6 (1,0 điểm)	 Gọi $O = AC \cap BD$, H là trung điểm của AB, suy ra $SH \perp AB$. Do $AB = (SAB) \cap ABCD$ và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$ +) Ta có $OA = \frac{AC}{2} = \frac{2a}{2} = a$, $OB = \frac{BD}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$. $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$	0,25
	+) $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} 2a \cdot 4a = 4a^2$.	0,25
	Thể tích khối chóp S_{ABCD} là: $V = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} \cdot 4a^2 = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.	
	Ta có $BC \parallel AD$ nên $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$. Do H là trung điểm của AB và $B = AH \cap (SBC)$ nên $d(A, (SBC)) = 2d(H, (SBC))$. Kẻ $HE \perp BC, H \in BC$, do $SH \perp BC$ nên $BC \perp (SHE)$. Kẻ $HK \perp SE, K \in SE$, ta có $BC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow HK = d(H, (SBC))$.	0,25
	$HE = \frac{2S_{BCH}}{BC} = \frac{S_{ABC}}{BC} = \frac{S_{ABCD}}{2 \cdot AB} = \frac{4a^2}{2a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{4}{15a^2} = \frac{91}{60a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{15}}{\sqrt{91}} = \frac{2a\sqrt{1365}}{91}$ Vậy $d(AD, SC) = 2HK = \frac{4a\sqrt{1365}}{91}$.	0,25
Câu 7 (1,0 điểm)	Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1)$, bán kính $R = 3$. Do $M \in d$ nên $M(a;1-a)$. Do M nằm ngoài (C) nên $IM > R \Leftrightarrow IM^2 > 9 \Leftrightarrow (a+2)^2 + (-a)^2 > 9$ $\Leftrightarrow 2a^2 + 4a - 5 > 0$ (*) Ta có $MA^2 = MB^2 = IM^2 - IA^2 = (a+2)^2 + (-a)^2 - 9 = 2a^2 + 4a - 5$ Do đó tọa độ của A, B thỏa mãn phương trình: $(x-a)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2 + 4a - 5$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax + 2(a-1)y - 6a + 6 = 0$ (1)	0,25
	Do A, B thuộc (C) nên tọa độ của A, B thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ (2). Trừ theo vế của (1) cho (2) ta được $(a+2)x - ay + 3a - 5 = 0$ (3) Do tọa độ của A, B thỏa mãn (3) nên (3) chính là phương trình của đường thẳng Δ đi qua A, B.	0,25

	+) Do (E) tiếp xúc với Δ nên (E) có bán kính $R_1 = d(E, \Delta)$ Chu vi của (E) lớn nhất $\Leftrightarrow R_1$ lớn nhất $\Leftrightarrow d(E, \Delta)$ lớn nhất Nhận thấy đường thẳng Δ luôn đi qua điểm $K\left(\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right)$ Gọi H là hình chiếu vuông góc của E lên $\Delta \Rightarrow d(E, \Delta) = EH \leq EK = \frac{\sqrt{10}}{2}$ Dấu “=” xảy ra khi $H \equiv K \Leftrightarrow \Delta \perp EK$.	0,25
	Ta có $\overrightarrow{EK} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a; a+2)$ Do đó $\Delta \perp EK \Leftrightarrow \overrightarrow{EK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = -3$ (thỏa mãn (*)) Vậy $M(-3;4)$ là điểm cần tìm	0,25
Câu 8 (1,0 điểm)	d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -2t \end{cases}$. Gọi $B = d \cap (P)$, do $B \in d$ nên $B(-1+2t; 4-t; -2t)$	0,25
	Do $B \in (P)$ nên $2(-1+2t) - 2(4-t) - 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow B(7;0;-8)$	0,25
	Gọi I là tâm mặt cầu (S), do I thuộc d nên $I(-1+2a; 4-a; -2a)$ Theo bài ra thì (S) có bán kính $R = IA = d(I, (P))$ $\Rightarrow \sqrt{(2-2a)^2 + (a-1)^2 + (2+2a)^2} = \frac{ 2(-1+2a) - 2(4-a) - 2a - 6 }{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}$ $\Leftrightarrow \sqrt{9a^2 - 2a + 9} = \frac{ 4a - 16 }{3}$ $\Leftrightarrow 9(9a^2 - 2a + 9) = (4a - 16)^2 \Leftrightarrow 65a^2 + 110a - 175 = 0 \Leftrightarrow a = 1; a = -\frac{35}{13}$.	0,25
	+) Với $a = 1 \Rightarrow I = (1;3;-2), R = 4 \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 16$ +) Với $a = -\frac{35}{13} \Rightarrow I = \left(-\frac{83}{13}; \frac{87}{13}; \frac{70}{13}\right); R = \frac{116}{13}$ $\Rightarrow (S): \left(x + \frac{83}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{87}{13}\right)^2 + \left(z - \frac{70}{13}\right)^2 = \frac{13456}{169}$	0,25
Câu 9 (0,5 điểm)	Xét các số có 9 chữ số khác nhau: - Có 9 cách chọn chữ số ở vị trí đầu tiên. - Có A_8^8 cách chọn 8 chữ số tiếp theo Do đó số các số có 9 chữ số khác nhau là: $9 \cdot A_8^8 = 3265920$	0,25
	Xét các số thỏa mãn đề bài: - Có C_5^4 cách chọn 4 chữ số lẻ. - Đầu tiên ta xếp vị trí cho chữ số 0, do chữ số 0 không thể đứng đầu và cuối nên có 7 cách xếp. - Tiếp theo ta có A_4^2 cách chọn và xếp hai chữ số lẻ đứng hai bên chữ số 0. - Cuối cùng ta có $6!$ cách xếp 6 chữ số còn lại vào 6 vị trí còn lại. Gọi A là biến cố đã cho, khi đó $n(A) = C_5^4 \cdot 7 \cdot A_4^2 \cdot 6! = 302400$. Vậy xác suất cần tìm là $P(A) = \frac{302400}{3265920} = \frac{5}{54}$.	0,25

Câu 10 (1,0 điểm)	Ta có $P = \frac{1}{(-1-z)^2} + \frac{1}{(-1-y)^2} + \frac{1}{8-(-1-x)^2} = \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{8-(1+x)^2}$ Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz}$ Thật vậy: $\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz} \Leftrightarrow (1+yz)[(1+z)^2 + (1+y)^2] \geq [(1+z)(1+y)]^2$. $\Leftrightarrow (1+yz)(2+2z+2y+z^2+y^2) \geq (1+zy+z+y)^2$ $\Leftrightarrow 2(z+y)(1+zy) + 2(1+yz) + (1+zy)(y-z)^2 + 2zy(1+yz)$ $\geq (1+zy)^2 + 2(z+y)(1+zy) + (z+y)^2$ $\Leftrightarrow (1+zy)(y-z)^2 + 2 + 4yz + 2y^2z^2 - (1+yz)^2 - (y-z)^2 - 4yz \geq 0$ $\Leftrightarrow yz(y-z)^2 + (1-yz)^2 \geq 0$ (hiển nhiên đúng). Dấu “=” xảy ra khi $y = z = 1$.	0,25														
	Ta lại có $\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz} \Rightarrow yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \frac{(-1-x)^2}{4} = \frac{(1+x)^2}{4}$ Do đó $\frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+yz} \geq \frac{1}{1+\frac{(1+x)^2}{4}} = \frac{4}{4+(1+x)^2}$ $\Rightarrow P \geq \frac{4}{4+(1+x)^2} + \frac{1}{8-(x+1)^2}$ Do $-1-2\sqrt{2} < x < -1+2\sqrt{2}$ nên $(x+1)^2 \in [0;8)$. Đặt $t = (1+x)^2 \Rightarrow t \in [0;8)$ và $P \geq \frac{4}{4+t} + \frac{1}{8-t}$	0,25														
	Xét $f(t) = \frac{4}{4+t} + \frac{1}{8-t}$ với $t \in [0;8)$. $f'(t) = -\frac{4}{(4+t)^2} + \frac{1}{(8-t)^2} = \frac{-3t^2 + 72t - 240}{(4+t)^2(8-t)^2}$ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 72t - 240 = 0 \Leftrightarrow t = 4; t = 20$ (loại) Bảng biến thiên <table><tr><td>t</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td>$\frac{9}{8}$</td><td></td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	t	0	4	8	$f'(t)$		-	0	+	$f(t)$	$\frac{9}{8}$		$\frac{3}{4}$	$+\infty$	0,25
t	0	4	8													
$f'(t)$		-	0	+												
$f(t)$	$\frac{9}{8}$		$\frac{3}{4}$	$+\infty$												
	Do đó $P \geq f(t) \geq \frac{3}{4}$ và $P = \frac{3}{4}$ khi $\begin{cases} (1+x)^2 = 4 \\ y = z = 1 \\ x+y+z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = z = 1 \end{cases}$ Vậy $\min P = \frac{3}{4}$ khi $x = -3, y = z = 1$	0,25														

-----HẾT-----