CÁC BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRONG CÁC ĐỀ THI QUỐC GIA - VMO

VMO 1985 A:

Bài 2: Gọi M là tập hợp tất cả các hàm số f xác định với mọi số nguyên nhận những giá trị thực thỏa mãn các tính chất sau:

a/ Với mọi số nguyên x và y thì f(x).f(y) = f(x + y) + f(x - y)

b/ f(0) $\neq 0$

Tìm tất cả các hàm số $f \in M$ *sao cho* $f(1) = \dfrac{5}{2}$

VMO 1991 A:

Bài 1: Hãy xác định tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sao cho bất đẳng thức sau đúng với các số thực x, y, z bất kì: $\dfrac{1}{2}f(xy) + \dfrac{1}{2}f(xz) - f(x).f(xy) \geq \dfrac{1}{4}$

Đáp số bài toán là: f(x) $\equiv \dfrac{1}{2}$. Ta lần lượt thực hiện các bước chọn ẩn như sau:

a/ Cho x = y = z = 0 ta nhận được $f(0) - f^2(0) \geq \dfrac{1}{4}$ *hay* $f(0) = \dfrac{1}{2}$

b/ Cho y = z = 0 ta nhận được $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$ *với mọi x*

c/ Cho x = y = z = 1 ta nhận được $f(1) = \dfrac{1}{2}$

d/ Cho y = z = 1 ta nhận được $f(x) \geq \dfrac{1}{2}$ *với mọi x*

Vậy: f(x) $\equiv \dfrac{1}{2}$, và dễ thử lại, đó là đáp số bài toán.

VMO 1993 A:

Bài 3: Hãy xác định tất cả các hàm f(n) xác định trên tập các số nguyên dương với các giá trị nguyên dương thỏa mãn: $f(f(n)) = 1993.n^{1945}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

VMO 1996 A:

Bài 4: Hãy xác định tất cả các hàm f(n) xác định trên tập các số nguyên dương với các giá trị nguyên dương thỏa mãn: $f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 1996, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

VMO 1997 A: - THTT tháng 2/1998 tr22

Bài 3: Có bao nhiêu hàm f(n) xác định trên tập các số nguyên dương với các giá trị nguyên dương thỏa mãn: f(1) = 1 và f(n).f(n+2) = f(n+1)^2 + 1997, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Gọi D là tập tất cả các hàm số f có tính chất đã nêu. Để cho gọn, kí hiệu: a_n = f(n)

$$Ta\,có: a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 1997 \qquad (2)$$

$$a_{n+1}a_{n+3} = a_{n+2}^2 + 1997$$

$$Suy\ ra: \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{a_{n+2}}.\ Vậy: a_{n+2} = c.a_{n+1} - a_n \qquad (3),\ với\ c\ hằng\ số,\ (c = \frac{a_3 + a_1}{a_2})$$

Ta CM $c \in \mathbb{N}^*$. *Thật vậy, nếu* $c = \dfrac{p}{q}$ *với* $(p,q)=1$ *thì từ* (3) *ta có*: $q(a_{n+2}+a_n) = pa_{n+1} \Rightarrow q.a_{n+1}$

Vì $1997 = a_n a_{n+2} - a_{n+1}{}^2 \vdots q^2$, *nên* $q=1$ (*do* 1997 *là nguyên tố*)

Đặt $f(2)=a.$ *từ* (2),(3) *ta có*: $ca_2 - a_1 = a_3 = a_1a_3 = a_2^2 + 1997 \Leftrightarrow ca - 1 = a^2 + 1997 \Rightarrow a/1998$

Nghĩa là f(2) là ước dương của 1998 nếu f thuộc D. Đảo lại, với mỗi ước dương a của 1998 xây dựng hàm f: $\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ như sau:

$f(1)=1.f(20=a.f(n+2)=(a+b)f(n+1)-f(n)$, *ở đó* $b = \dfrac{1998}{a} \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng $\min h\ f \in D$

Dễ thấy $f(n) \in \mathbb{N}^*$ *và* $f(n+2)f(n) - f^2(n+1)$ *không phụ thuộc* n, *vậy*:

$f(n+2)f(n) - f^2(n+1) = f(3) - f^2(2) = (a+b)a - 1 - a^2 = 1997 \Leftrightarrow f \in D$

Tương ứng f--> f(2) là 1 song ánh giữa D và tập các ước dương của 1998. Vậy:

$\left|D\right| = (1+1)(1+3)(1+1) = 16$

<u>VMO 1999:</u> - Bảng A: - THTT tháng 2/2000 tr

<u>Bài 6</u>: Hãy xác định tất cả các hàm f(t) xác định trên tập các số nguyên không âm với các giá trị trong T=$\{0,1,2,...,1999\}$ thỏa mãn các đk sau:

a/ f(t) = t với $0 \le t \le 1999$

b/ f(m + n) = f(f(m) + f(n)) , $\forall m,n \in \mathbb{N}$

Giả sử f là hàm số cần tìm. Đặt f(2000) = a; b = 2000 - a. Ta có: $1 \le b \le 2000$

Ta có các nhận xét sau (dễ chứng minh bằng quy nạp)

Nhận xét 1: Với mọi r mà $0 \le r < b$ *ta có*: $f(2000+r) = a+r$

Nhận xét 2: Với mọi k$\in \mathbb{N}$ mà $0 \le r < b$ *ta có*: $f(2000+kb+r) = a+r$

Từ 2 nhận xét trên ta suy ra nếu f là hàm cần tìm thì:

$$(*)\begin{cases} f(t) = t \\ f(2000) = a \qquad \text{với } r \equiv m \pmod{2000-a};\ 0 \le r < 2000-a \\ f(2000+m) = a+r \end{cases}$$

Ngược lại, cho a $\in$ T. Xét hàm số f xác định trên $\mathbb{N}$ thỏa mãn (*). Dễ thấy $f(n) \in T, \forall n \in \mathbb{N}$. Ta cần kiểm tra: f(m + n) = f(f(m) + f(n)) , $\forall m,n \in \mathbb{N}$ (1)

Việc kiểm tra này dựa trên các nhận xét sau: (dễ chứng minh)

Nhận xét 3: $f(n+b) = f(n), \forall n \ge a, b = 2000-a$

Nhận xét 4: $n \equiv f(n) \pmod{b}, \forall n \in \mathbb{N}$

Bây giờ chỉ cần CM (1) cho trường hợp có ít nhất một trong hai số m, n không thuộc T.

Giả sử $m \ge 2000$. *Khi đó* $m+n \ge 2000 > a$ và f(m)+ f(n) $\ge a$ (*do* $f(m) \ge a$).

Mà $m+n \equiv f(n)+f(m) \pmod{b}$ (theo nhận xét 4).

Thành thử do nhận xét 3 => f(m + n) = f(f(m) + f(n))

<u>Kết luận</u>: Tất cả các hàm số thỏa mãn đầu bài được xác định theo côngthức (*) với mỗi a thuộc T cho trước. Thành thử có 2000 hàm số như vậy.

<u>VMO 2000:</u> - Bảng B:

Bài 6: Tìm tất cả các hàm số f(x) thỏa mãn điều kiện: $x^2.f(x)+f(1-x)=2x-x^4, \forall x \in \mathbb{R}$

(cũng là bài của Áo 199?)

Thay x bởi 1 - x ta được: $(1-x)^2.f(1-x)+f(x)=2(1-x)-(1-x)^4, \forall x \in \mathbb{R}$

Như vậy ta có hệ: $\begin{cases} x^2.f(x)+f(1-x)=2x-x^4 \\ f(x)+(1-x)^2.f(1-x)=2(1-x)-(1-x)^4 \end{cases}$

$Ta\ có: D=(x^2-x-1)(x^2-x+1)\ \ và\ D_x=(1-x^2)(x^2-x-1)(x^2-x+1)$

$Vậy\ D.f(x)=D_x, \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó ta có nghiệm của bài toán là: $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 : x \neq a;, x \neq b \\ c \in \mathbb{R} : x=a\ \ (c\ tùy\ ý) \\ 2a-a^4-a^2c : x=b \end{cases}$

$với\ a,b\ là\ nghiệm\ \ pt: x^2-x-1=0$

VMO 2001: **- Bảng B:** - Không có Phương trình hàm.

VMO 2001: **- Bảng A:** - THTT tháng 11/2001 tr 11

Bài 5: Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$. Hãy tìm tất cả các hàm số f(x) xác định, liên tục trên khoảng (-1; 1) và thỏa mãn hệ thức: $(1-x^2).f(g(x))=(1+x^2)^2.f(x),\ \forall x \in (-1;1)$

Viết lại hệ thức của đề bài dưới dạng: $\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}.f(g(x))=(1-x^2).f(x),\ \forall x \in (-1;1)$ (6)

Đặt: $\varphi(x)=(1-x^2).f(x), x \in (-1;1)$, khi đó, f(x) liên tục trên (-1; 1) và thỏa mãn (6) khi và chỉ khi $\varphi(x)$ liên tục trên (-1; 1) và thỏa mãn hệ thức: $\varphi(g(x))=\varphi(x), \forall x \in (-1;1)$ (7)

Dễ thấy: $u(x)=\dfrac{1-x}{1+x}, x \in (0;+\infty)$ là một song ánh từ $(0;+\infty)$ đến (-1; 1). Do vậy có thể viết lại (7) ở dạng: $\varphi(g(\dfrac{1-x}{1+x}))=\varphi(\dfrac{1-x}{1+x}), x \in (0;+\infty)$ *hay* $\varphi(\dfrac{1-x^2}{1+x^2})=\varphi(\dfrac{1-x}{1+x}), x \in (0;+\infty)$ (8)

Xét hàm số: h(x) = $\varphi(\dfrac{1-x}{1+x}),\ x \in (0;+\infty)$

Khi đó, $\varphi(x)$ liên tục trên (-1; 1) và thỏa mãn (8) khi và chỉ khi h(x) liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn hệ thức: h(x^2) = h(x), $x \in (0;+\infty)$ (9)

Từ (9), bằng PP quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$ dễ dàng chứng minh được: $h(x)=h(\sqrt[2^n]{x}),\ \forall x \in (0;+\infty), \forall n \in \mathbb{N}$

Từ đó, do $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[2^n]{x})=1$ *và do* $h(x)$ *liên tục trên* $(0;+\infty)$ suy ra h(x) = h(1), $\forall x \in (0;+\infty)$

Dẫn tới $\varphi(x)=$ const $\forall x \in (-1;1)$. Vì vậy: $f(x)=\dfrac{a}{1-x^2}\ \forall x \in (-1;1)$ *trong đó* $a \in \mathbb{R}$ *tùy ý*

Dễ thấy các hsố f(x) xác định ở trên thỏa mãn tất cả các yêu cầu của đề bài, và vì thế chúng là tất cả các hàm số cần tìm.

VMO 2002: **- Bảng B:** - THTT tháng 10/2002 tr10

Bài 2: Hãy tìm tất cả các hàm số f(x) xác định trên tập hợp số thực R và thỏa mãn hệ thức:

$$f(y - f(x)) = f(x^{2002} - y) - 2001.y.f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Giả sử f(x) là hsố thỏa yêu cầu đề bài

Lần lượt thế y = f(x) và y = x^{2002} vào hệ thức của bài, ta được:

$f(0) = f(x^{2002} - f(x)) - 2001.(f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x^{2002} - f(x)) = f(0) - 2001.x^{2002}.f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Cộng vế theo vế 2 đẳng thức trên, ta được:

$f(x).(f(x) + x^{2002}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó suy ra nếu f là hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài thì:

$f(0) = 0 \;\; (1) \;\; và \;\; f(x) = -x^{2002} \;\; (2), \forall x \; mà \; f(x) \neq 0$

Dễ thấy, hai hàm số $f_1(x) \equiv 0$ *và* $f_2(x) = -x^{2002}, \forall x \in \mathbb{R}$ *thỏa mãn* (1) *và* (2)

Ta sẽ CM nếu tồn tại hsố f(x) thỏa mãn yêu cầu đề bài mà khác f_1 và f_2 thì dẫn đến mâu thuẫn

Khi đó, theo các lập luận ở trên, f phải thỏa mãn (1) và (2). Hơn nữa, do f khác f_2 nên tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = 0$. Lại do f khác f_1 nên tồn tại $y_0 \neq 0$ sao cho $f(y_0) \neq 0$

Thay x = 0 vào hệ thức của bài, với lưu ý tới (1), ta được: f(y) = f(-y), $\forall y \in \mathbb{R}$. Do đó có thể giả sử $y_0 > 0$.

Vì $f(y_0) \neq 0$ nên theo (2), phải có $f(y_0) = -{y_0}^{2002}$ (*)

Mặt khác, thay x = x_0 và y = $-y_0$ vào hệ thức của bài, ta được: $f(-y_0) = f({x_0}^{2002} + y_0)$ (**)

Từ (*) và (**) và (2) ta có:

$o \neq -{y_0}^{2002} = f(y_0) = f(-y_0) = f({x_0}^{2002} + y_0) = -({x_0}^{2002} + y_0)^{2002} < -{y_0}^{2002} \;\; (do \; y_0 > 0)$

=> Mâu thuẩn. Vậy chỉ có thể f $\in \{f_1; f_2\}$.

Phép thử trực tiếp cho thấy f(x) $\equiv$ 0 là hàm số duy nhất cần tìm.

<u>**VMO 2002:**</u> **- Bảng A:** - Không có Phương Trình Hàm

<u>**VMO 2003:**</u> **- Bảng B:** - THTT tháng 1/2004 tr18

<u>**Bài 5**</u>: Hãy tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực, thỏa mãn hệ thức:

$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)P(x-1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)P(x), \; \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có: $(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)P(x-1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)P(x), \; \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2 + x + 1)P(x-1) = (x-2)(x^2 - x + 1)P(x), \; \forall x \in \mathbb{R}$ (3)

Thay x = -2 vào (3) ta được: 0 = -28.P(-2) => P(-2) = 0

Thay x = 2 vào (3) ta được: 0 = 28.P(1) => P(1) = 0

Từ đó:

+ Thay x = -1 vào (2) ta được: 0 = -9.P(-1) => P(-1) = 0

+ Thay x = 1 vào (2) ta được: 0 = 9.P(0) => P(0) = 0

Từ các kết quả trên, suy ra: P(x) = (x-1)x(x+1)(x+2).Q(x) , $\forall x \in \mathbb{R}$ (4)

Trong đó Q(x) là đa thức với hệ số thực của biến x. Dẫn tới:

P(x - 1) = (x-2)(x-1)(x)(x+1).Q(x-1) , $\forall x \in \mathbb{R}$ (5)

Từ (3), (4), (5) ta được:

$(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2+x+1).Q(x-1) = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2-x+1).Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra: $(x^2+x+1).Q(x-1) = (x^2-x+1).Q(x), \forall x \neq 0; \pm 1; \pm 2$

Do mỗi vế của đẳng thức trên là một đa thức của biến x nên:

$(x^2+x+1).Q(x-1)=(x^2-x+1).Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (6)

Từ đó, do $(x^2+x+1; x^2-x+1)=1$, suy ra $Q(x)=(x^2+x+1).R(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (7)

trong đó R(x) là đa thức với hệ số thực của biến x

Dẫn tới: $Q(x-1)=(x^2-x+1).R(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$ (8)

Từ (6), (7), (8) ta được: $(x^2+x+1).(x^2-x+1).R(x-1)=(x^2-x+1).(x^2+x+1).R(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó, do $(x^2+x+1)(x^2-x+1) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ta được R(x -1)= R(x), $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra R(x) là đa thức hằng. Từ đây và (7), (4) ta được:

$P(x)=c(x-1)x(x+1)(x+2)(x^2+x+1), \forall x \in \mathbb{R}$, trong đó c là hằng số thực tùy ý.

Phép thử trực tiếp cho thấy các đa thức P(x) vừa tìm được ở trên thỏa mãn các hệ thức của đề bài, và do đó chúng là tất cả các đa thức cần tìm.

VMO 2003: **- Bảng A:** - THTT tháng 2/2004 tr4

Cho tập hợp F gồm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $f(3x) \geq f(f(2x)) + x, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Hãy tìm số thực α lớn nhất sao cho với mọi hsố f thuộc tập F, ta đều có: $f(x) \geq \alpha x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Bài này nghiên về dãy số.

VMO 2004: **- Bảng A, B:** - Không có Phương Trình Hàm

VMO 2005: **- Bảng A và B:** - THTT tháng 11/2005 tr11

Bài 4: Hãy xác định tất cả các hàm số $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

$f(f(x-y)) = f(x).f(y) - f(x) + f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Giả sử $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số thỏa mãn hệ thức của đề bài, nghĩa là:

$f(f(x-y)) = f(x).f(y) - f(x) + f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Đặt f(0) = a

Thế x = y = 0 vào (1), ta được f(a) = a^2 (2)

Thế x = y vào (1), với lư ý tới (2), ta được: $(f(x))^2 = x^2 + a^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (3)

Suy $(f(x))^2 = (f(-x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$ *hay* $(f(x) + f(-x))(f(x) - f(-x)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (4)

Giả sử tồn tại $x_o \neq 0$ sao cho $f(x_0) = f(-x_0)$

Thế y = 0 vào (1), được: $f(f(x)) = af(x) - f(x) + a, \forall x \in \mathbb{R}$ (5)

Thế $x = 0; y = -x$ *vào* (1), *ta được*: $f(f(x)) = af(-x) + f(-x) - a, \forall x \in \mathbb{R}$ (6)

Từ (5) *và* (6) *suy ra*: $a.(f(-x) - f(x)) + f(x) - f(x) = 2a, \forall x \in \mathbb{R}$ (7)

Thế x = x_0 vào (7), ta được: $f(x_0) = \mathrm{a}$ (*)

Mặt khác, từ (3) suy ra nếu f(x_1) = f(x_2) thì ${x_1}^2 = {x_2}^2$. Vì thế, từ (*) suy ra x_0 = 0 trái với giả thiết $x_o \neq 0$. Mâu thuẩn chứng tỏ $f(x) \neq f(-x), \forall x \neq 0.$

Do đó từ (4) suy ra $f(x) = -f(-x), \forall x \neq 0$ (8)

Thế (8) vào (7) ta được: $a.(f(x) - 1) = 0, \forall x \neq 0$.

Suy ra a = 0, vì nếu ngược lại $a \neq 0$ thì f(x) = 1, $\forall x \neq 0$, trái với (8)

Do đó từ (3) có: $(f(x))^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (9)

Giả sử tồn tại $\forall x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = x_0$. Khi đó theo (5) ta phải có:

$x_0 = f(x_0) = -f(f(x_0)) = -f(x_0) = -x_0$. Mâu thuẩn chứng tỏ f(x) $\neq x$, $\forall x \neq 0$

Vì vậy, từ (9) ta được f(x) = - x, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ngược lại, kiểm tra trực tiếp, ta thấy hsố tìm được ở trên thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Vậy hàm số f(x) = - x, $\forall x \in \mathbb{R}$ là hàm số duy nhất cần tìm.

VMO 2006: **- Bảng B:** - THTT tháng 11/2006 tr 8

Bài 5: Hãy tìm tất cả các hàm số f(x) xác định, liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện: f(x - y). f(y - z). f(z - x) + 8 = 0, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Cho $x = \dfrac{t}{2}, y = \dfrac{-t}{2}$ *và* $z = 0$, *thu được* $f(t).f(\dfrac{-t}{2})^2 + 8 = 0$, do đó f(t) < 0, với mọi t. Vậy có thể đặt f(x) = $-2^{g(x)}$. Thế vào pt hàm đã cho, nhận được:

$g(x-y)+g(y-z)+g(z-x)=3$. Đặt u = x - y; v = y - z thì z - x = - (u+ v)

Đặt h(x) = g(x) - 1, PT hàm trên trở thành: h(u) + h(v) = - h(-u - v)   (*)

Dể thấy h(0) = 0, (với u = v = 0) và h(x) = -h(-x) (với u = x và v = -x).

PT (*) được viết lại thành $h(u)+h(v)=h(u+v)$.

PT hàm này chính là PT hàm Cauchy. Nghiệm của nó là h(t) = at, với a là hằng số thực tùy ý nào đó. Thế ngược lại, ta thu được nghiệm của PT hàm ban đầu là: $f(x)=-2^{ax+1}, a\in\mathbb{R}$

Thử lại thấy hàm số này nghiệm đúng PT đã cho.

<u>**VMO 2006 - Bảng A:**</u> - THTT tháng 11/2006 tr 10

<u>**Bài 5**</u>: Hãy xác định tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn hệ thức sau:

$P(x^2)+x(3P(x)+P(-x))=(P(x))^2+2x^2$ (1), $\forall x\in\mathbb{R}$ (1)

Giả sử P(x) là đa thức cần tìm, dễ thấy deg P > 0

1/ Xét deg P = 1

$$P(x)=ax+b, a\neq 0, \textit{ thế vào } (1), \textit{ ta được}: (a^2-3a+2)x^2+2b(a-2b)x+b^2-b\equiv 0 \ (2)$$

Từ (2) ta tìm được (a = 1, b = 0), (a = 2, b = 0), (a = 2, b = 1)

Ta được các đa thức: $P(x)=x$; $P(x)=2x$; $P(x)=2x+1$;

2/ Xét deg P = n > 1

$$\textit{Đặt } P(x)=ax^n+S(x),\ a\neq 0 \quad (3), \textit{ với } S(x) \textit{ là đa thức}, \deg S=k<n$$

Thế (3) vào (1), ta được:

$$(a^2-a)x^{2n}+(S(x))^2-S(x^2)+2ax^n.S(x)\equiv(3+(-1)^n)ax^{n+1}+(3S(x)+S(-x))x-2x^2 \ (4)$$

Vì bậc của đa thức nằm ở vế phải của (4) bằng n + 1 và n + 1 < 2n nên từ (4) ta được a^2 - a = 0, hay a = 1. Do đó, từ (4) ta có:

$$2x^nS(x)+(S(x))^2-S(x^2)\equiv(3+(-1)^n)x^{n+1}+(3S(x)+S(-x))x-2x^2 \qquad (5)$$

Vì bậc của đa thức nằm ở vế trái của (5) bằng n + k và bậc của đa thức nằm ở vế trái của (%0 bằng n + 1 nên từ (5) ta suy ra phải có k = 1. Hơn nữa, trong (5) thay x = 0 ta được

$$(S(0))^2-S(0)=0, \textit{ hay } S(0)=0 \textit{ hoặc } S(0)=1. \textit{ Như vậy}, S(x) \textit{ có dạng}: S(x)=px \textit{ hoặc } S(x)=px+1$$

<u>Trường hợp 1</u>: $S(x)=px$. Thế vào (5) ta được:

$$(3+(-1)n-2p)x^{n+1}-(p^2-3p+2).x^2\equiv 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3+(-1)n-2p=0\\ p^2-3p+2=0\end{cases}\Leftrightarrow p=1, n\equiv 1(\bmod 2) \textit{ hoặc } p=2, n\equiv 0(\bmod 2)$$

Từ đó ta được các đa thức: $P(x)=x^{2n+1}+x$ *và* $P(x)=x^{2n}+2x$

Phép thử trực tiếp cho thấy các đa thức này thỏa (1)

<u>Trường hợp 2</u>: $S(x)=px+1$. Thế vào (5) ta được:

$(3+(-1)n-2p)x^n+1-2x^n-(p^2-3p+2).x^2-2(p-2)x\equiv 0$. Suy ra 2 = 0. Vô lý. Chứng tỏ không tồn tại đa thức thỏa (5), do đó không tồn tại đa thức thỏa (1) trong trường hợp này.

Tóm lại, tất cả các đa thức thỏa đề là: $P(x)=x$; $P(x)=x^{2n+1}+x$ *và* $P(x)=x^{2n}+2x$, $n\in\mathbb{N}$ *tùy ý.*

VMO 2007: - THTT tháng 11/2007 tr 14

Câu 5: (3 đ). Cho b là một số thực dương. Hãy xác định tất cả các hàm số f xác định trên tập các số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trong $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình:

$$f(x+y)=f(x).3^{b^y+f(y)-1}+b^x(3^{b^y+f(y)-1}-b^y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Phương trình đã cho tương đương với: $f(x+y)+b^{x+y}=(f(x)+b^x).3^{b^y+f(y)-1},\forall x,y\in\mathbb{R}$ (1)

Đặt g(x) = f(x) + b^x. Khi đó (1) có dạng: $g(x+y)=g(x).3^{g(y)-1},\forall x,y\in\mathbb{R}$ (2)

Thay y = 0 vào pt (2) ta được

$$g(x)=g(x).3^{g(0)-1},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}\\ g(0)=1\end{array}\right.$$

$*$ *Với* $g(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ *thì* $f(x)=-b^x$

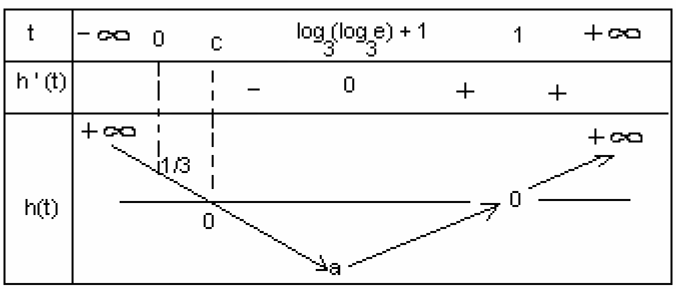
$*$ *Với* $g(0)=1$, *thế* $x=0$ *vào* pt(2) *ta được*

$$g(y)=g(0).3^{g(y)-1}\Leftrightarrow g(y)=3^{g(y)-1}\Leftrightarrow 3^{g(y)-1}-g(y)=0,\forall y\in\mathbb{R}\ (3)$$

Xét hsố $h(t)=3^{t-1}-t$ *có* $h'(t)=3^{t-1}.\ln 3-1$

$h'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_3(\log_3 e)+1<1$

Ta có bảng biến thiên sau, với $a=\log_3 e-\log_3(\log_3 e)-1<0$



Từ bảng biến thiên ta thấy pt h(t) = 0 có 2 nghiệm t_1 = 1 và t_2 = c , với 0<c<1, (vì h(0) = 1/3).

Tức là: $g(y)=3^{g(y)-1}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(y)=1\\ g(y)=c,\ 0<c<1\end{array}\right.\quad\forall y\in\mathbb{R}$ (4)

Giả sử tồn tại $y_0\in\mathbb{R}$ sao cho g(y_0)= c. Khi đó:

$1=g(0)=g(y_0-y_0)\overset{(2)}{=}g(-y_0).3^{g(y_0)-1}\overset{(3)}{=}g(-y_0).g(y_0)=c.g(-y_0)$. Suy ra $g(-y_0)=\frac{1}{c}\neq c$, mâu thuẫn với (4).

=> Loại TH g(y) = c

Vậy g(y) = 1, $\forall y\in\mathbb{R}$, suy ra f(x) = 1 - b^x.

Vậy có 2 hàm số thỏa mãn đề bài là: f(x) = - b^x và f(x) = 1 - b^x.

VMO 2008, 2009, 2010: - Không có Phương Trình Hàm.

VMO 2013 - Bài 5 (7 điểm): HSG QG 2013

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa* $f(0)=0; f(1)=2013$ *và*:

$$(x-y)\Big(f(f^2(x))-f(f^2(y))\Big)=(f(x)-f(y))\Big(f^2(x)-f^2(y)\Big)$$

đúng với mọi $x,y\in\mathbb{R}$, *trong đó* $f^2(x)=(f(x))^2$

$Cho\ x \neq 0; y = 0\ ta\ thu\ được\ pt: x.f(f^2(x)) = f^3(x)$

$\Rightarrow f(f^2(x)) = \dfrac{f^3(x)}{x}, \forall x \neq 0$

Thay vào pt đầu ta được:

$$(x-y).\left[\frac{f^3(x)}{x} - \frac{f^3(y)}{y}\right] = (f(x)-f(y)).\left(f^2(x)-f^2(y)\right), \forall x, y \neq 0 \quad (*)$$

Cho $y = 1, x < 0$ *vào* (*) *ta có:*

$$(x-1)\left[\frac{f^3(x)}{x} - 2013^3\right] = (f(x)-2013).\left(f^2(x)-2013^2\right)$$

$\Leftrightarrow (f(x)-2013x).(f^2(x)-2013^2x) = 0$

Mà: $f^2(x) - 2013^2 x > 0$ *với* $x < 0$

$$\Rightarrow f(x) = 2013x, \forall x < 0 \Rightarrow f(-1) = -2013$$

Cho $x > 0, y = -1$ *vào* (*) *ta lại có:*

$$(x+1)\left[\frac{f^3(x)}{x} + 2013^3\right] = (f(x)+2013).\left(f^2(x)-2013^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-2013x).\left(f^2(x)+2013^2x\right) = 0$$

$\Rightarrow f(x) = 2013x.$ *Thử lại ta thấy đúng.*

Vậy $f(x) = 2013x.$