DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC VMF

CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN PHỔ THÔNG

TẬP 1

Tháng 06/2015

Lời nói đầu

Tài liệu này không phải là tài liệu chính thức của Diễn đàn toán học (VMF) nhưng do cá nhân tôi là thành viên của trang diễn đàn thảo luận toán học này nên tôi xin mạo muội ghi xuất xứ là VMF mong quản trị của trang web bỏ qua yếu tố trên.

Hàng năm mỗi giáo viên trung học phổ thông đều làm một sáng kiến kinh nghiệm về lĩnh vực chuyên môn giảng dạy, tuy nhiên lượng kiến thức mà thầy (cô) dày công bỏ ra nghiên cứu đa phần bị bỏ quên. Hôm nay tôi cố gắng tổng hợp lại các sáng kiến kinh nghiệm để đưa vào chung thành một tài liệu "CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN PHỔ THÔNG". Để tiện cho việc tổng hợp và theo dõi, tôi chia ra thành nhiều tập với độ dày mỗi tập tầm khoảng 50 trang. Chỉ là việc tổng hợp nội dung các sáng kiến để cho các bạn tham khảo nên có điều gì sai sót mong các bạn bỏ qua.

Người tổng hợp
CD13

Tập này gồm các nội dung:

+ Một số sai lầm khi giải toán nguyên hàm – tích phân 1
+ Một số sai lầm khi giải toán nguyên hàm – tích phân 2
+ Phương pháp giải một số bài toán xác suất
+ Sử dụng vectơ trong chứng minh bất đẳng thức
+ Một số bài toán cực trị hình học toạ độ
+ Giải toán bằng phương pháp toạ độ

MỘT SỐ SAI LẦM KHI GIẢI TOÁN NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN 1

Trong quá trình giảng dạy nội dung nguyên hàm – tích phân tôi nhận thấy nhiều học sinh còn mắc những sai lầm không đáng có. Qua bài viết này thông qua những ví dụ tôi muốn các em học sinh có thể tự mình điều chỉnh kỹ năng giải toán phần nguyên hàm – tích phân để có kết quả tốt nhất.

1. Phân tích những sai lầm thông qua một số ví dụ minh họa

1.1. Sai lầm khi vận dụng định nghĩa nguyên hàm

a, Ví dụ 1: chứng minh rằng $F(x) = -(1+x)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = xe^{-x}$ trên R. Từ đó hãy tìm nguyên hàm của hàm $g(x) = (x-1)e^{-x}$.

****Một học sinh đã giải như sau:***

F'(x) = $-e^{-x} + (1+x)e^{-x}$ =f(x) với mọi x =>F(x) là một nguyên hàm của hàm f(x) trên R.

$$\int g(x)dx = \int (x-1)e^{-x}dx = \int xe^{-x}dx - \int e^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x} + c\right] - \left[-e^{-x} + c\right]$$

$$= -(1+x)e^{-x} + e^{-x} = -xe^{-x}.$$

* ***Phân tích:*** học sinh viết chung hằng số c cho mọi phép tính nguyên hàm.

* ***Lời giải đúng:***

$$\int g(x)dx = \int (x-1)e^{-x}dx = \int xe^{-x}dx - \int e^{-x}dx = \left[-(1+x)e^{-x} + c_1\right] - \left[-e^{-x} + c_2\right]$$

$= -xe^{-x} + c$ với c = $c_1 - c_2$.

b, Ví dụ 2: Tính $\int \cot x dx$

* ***Một học sinh đã giải như sau:***

$$I = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx. \qquad \text{Đặt } \begin{cases} u = \dfrac{1}{\sin x} \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sin x}.\sin x + \int \frac{\sin x.\cos x}{\sin^2 x}dx = 1 + I \Rightarrow 0 = 1???$$

* ***Phân tích:*** học sinh viết chung hằng số c cho mọi phép tính nguyên hàm.

* ***Lời giải đúng:***

$$I = \int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + c.$$

1.2.Sai lầm khi vận dụng bảng nguyên hàm cơ bản

Ví dụ 3: tính $I = \int (2x+1)^3 dx$

* ***Một học sinh đã giải như sau:*** $I = \int (2x+1)^3 dx = \dfrac{(2x+1)^4}{4} + c$

* ***Nguyên nhân dẫn đến sai lầm:***

Học sinh vận dụng công thức $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ với $n \neq -1$.

* ***Lời giải đúng:***

Đặt 2x + 1 = t $\Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2} \Rightarrow \int (2x+1)^3 dx = \int t^3 \dfrac{dt}{2} = \dfrac{t^4}{8} + c = \dfrac{(2x+1)^4}{8} + c$

1.3.Sai lầm khi vận dụng định nghĩa tích phân

Ví dụ 4: tính tích phân $I = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2}$

**** Một học sinh đã giải như sau:***

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{-2}^{2} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \left.\frac{-1}{x+1}\right|_{-2}^{2} = \frac{-1}{3} - 1 = \frac{-4}{3}$$

**** Nguyên nhân dẫn đến sai lầm:*** hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2;2]$

**** Lời giải đúng:*** Hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại $x = -1 \in [-2;2]$ suy ra hàm không liên tục trên $[-2;2]$, do đó tích phân trên không tồn tại.

**** Chú ý đối với học sinh:*** khi tính tích phân $\int_{a}^{b} f(x)dx$ cần chú ý kiểm tra xem hàm số y = f(x) có liên tục trên đoạn [a, b] không? Nếu có thì áp dụng các phương pháp được học để tính tích phân đã cho, còn nếu không thì kết luận ngay tích phân đó không tồn tại.

***1.4.** Sai lầm khi biến đổi hàm số*

Ví dụ 5: Tính tích phân $I = \int_{0}^{4} \sqrt{x^2 - 6x + 9}dx$

**** Một học sinh đã giải như sau:***

$$I = \int_{0}^{4} \sqrt{x^2 - 6x + 9}dx = \int_{0}^{4} \sqrt{(x-3)^2}dx = \int_{0}^{4} (x-3)d(x-3) = \left.\frac{(x-3)^2}{2}\right|_{0}^{4} = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -4$$

**** Nguyên nhân dẫn đến sai lầm:***

Phép biến đổi $\sqrt{(x-3)^2} = x - 3; x \in [0,4]$ là không tương đương.

**** Lời giải đúng:***

$$I = \int_{0}^{4} \sqrt{x^2 - 6x + 9}dx = \int_{0}^{4} \sqrt{(x-3)^2}dx$$

$$= \int_{0}^{4} |x-3|d(x-3) = \int_{0}^{3} (3-x)d(x-3) + \int_{3}^{4} (x-3)d(x-3) = \left.\frac{-(x-3)^2}{2}\right|_{0}^{3} + \left.\frac{(x-3)^2}{2}\right|_{3}^{4} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$$

**** Chú ý đối với học sinh:*** $\sqrt[2n]{[f(x)]^{2n}} = |f(x)|$ ($n \geq 1$, n nguyên)

$\Rightarrow \int_{a}^{b} \sqrt[2n]{[f(x)]^{2n}}dx = \int_{a}^{b} |f(x)|dx$, ta phải xét dấu hàm số f(x) trên đoan [a, b] rồi dùng tính chất để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

***1.5.** Sai lầm khi vận dụng phương pháp đổi biến*

Ví dụ 6: Tính tích phân $I = \int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx$

**** Một học sinh đã giải như sau:***

Đặt x = sint suy ra dx = costdt

$$\Rightarrow I=\int_0^1\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t.dt=\int_0^1 \cos^2 t.dt=\int_0^1\frac{1+\cos 2t}{2}.dt=(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4})\Big|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sin 2$$

**** Nguyên nhân dẫn đến sai lầm:*** học sinh đổi biến nhưng không đổi cận.

**** Lời giải đúng:*** Đặt x = sint suy ra dx = cost.dt

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t.dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t.dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}.dt=(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

**** Chú ý đối với học sinh:***

Khi gặp tích phân dạng $I=\int_a^b\sqrt{c^2-x^2}dx$, nếu tích phân tồn tại thì thông thường ta tính tích phân bằng cách đặt x = c.sint(hoặc x = c.cost) đổi cận, chuyển về tính tích phân theo t.

Ví dụ 7: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

**** Một học sinh đã giải như sau:***

Đặt x = sint suy ra dx = costdt . Đổi cân: $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\arcsin\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\arcsin\frac{1}{4}}\frac{\sin^3 t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\cos t.dt=\int_0^{\arcsin\frac{1}{4}}\frac{\sin^3 t}{|\cos t|}\cos t.dt=\int_0^{\arcsin\frac{1}{4}}\sin^3 t.dt$$

Đến đây học sinh thường rất lúng túng vì số lẻ, do đó các em không tìm ra được đáp số.

**** Nguyên nhân dẫn đến sai lầm:*** khi gặp tích phân của hàm số có chứa biểu thức $\sqrt{1-x^2}$ thông thường ta đặt x = sint (hoặc x = cost); nhưng đối với ví dụ 7, nếu làm theo cách này sẽ gặp khó khăn khi đổi cận. Cụ thể khi x = 1/4 ta không tìm chính xác được t.

**** Lời giải đúng:***

Đặt t = $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1-x^2\Rightarrow 2tdt=-2xdx\Rightarrow xdx=-tdt$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\Rightarrow I=\int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}}\frac{(1-t^2)(-tdt)}{t}=-\int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}}(1-t^2)dt=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{15\sqrt{15}}{192}-\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{2}{3}=\frac{-33\sqrt{15}}{192}+\frac{2}{3}$$

**** Chú ý đối với học sinh:*** khi gặp tích phân của hàm số có chứa biểu thức $\sqrt{1-x^2}$, nếu cân của tích phân là giá trị lượng giác của góc đặc biệt thì ta mới tính tích phân bằng cách đặt x =sint(hoặc x = cost) còn nếu không thì ta phải tìm phương pháp khác.

<u>***1.6** Sai lầm vì dùng công thức không có trong sách giáo khoa*</u>

Ví dụ 8: Tính tích phân $I=\int_{-1}^0\frac{1}{x^2+2x+2}dx$

**** Một học sinh đã giải như sau:***

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x+1)^2+1}dx=\arctan(x+1)\Big|_{-1}^{0}=\arctan 0-\arctan(-1)=\frac{\pi}{4}$$

Nguyên nhân dẫn đến sai lầm: SGK hiện hành không cung cấp công thức

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$$

Lời giải đúng:

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2+2x+2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x+1)^2+1}dx$$

Đặt x + 1 = tant $\Rightarrow dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt=(1+\tan^2 t)dt$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{4};x=-1\Rightarrow t=0$

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2 t}.(1+\tan^2 t)dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}dt=t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

Chú ý đối với học sinh: khi gặp tích phân dạng $I=\int_{a}^{b}\frac{1}{c^2+x^2}dx$, thì ta tính tích phân bằng cách đặt x = c.tant (hoặc x = c.cott). Chú ý công thức $1+\tan^2 t=\frac{1}{\cos^2 t};1+\cot^2 t=\frac{1}{\sin^2 t}$.

<u>1.7. Hiểu sai bản chất công thức</u>

Ví dụ 9: Tính tích phân $I=\int_{0}^{2}xe^x dx$

****Một học sinh đã giải như sau:*** Đặt $\begin{cases}u=x\\v'=e^x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=1\\v=e^x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\left(xe^x\right)\Big|_0^2-\int_0^2 e^x dx=2e^2-\left(e^x\right)\Big|_0^2=2e^2-e^2+1=e^2+1$$

Nguyên nhân dẫn đến sai lầm: học sinh hiểu sai bản chất công thức lấy tích phân từng phần.

Lời giải đúng: Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\left(xe^x\right)\Big|_0^2-\int_0^2 e^x dx=2e^2-\left(e^x\right)\Big|_0^2=2e^2-e^2+1=e^2+1$$

<u>1.8.Sử dụng sai công thức</u>

Ví dụ 10.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường y = 9 – x^2; y = 0; x = 1; x = 4.

****Một học sinh đã giải như sau:*** diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_1^4(9-x^2)dx=(9x-\frac{x^3}{3})\Big|_1^4=6$$

Nguyên nhân dẫn đến sai lầm: học sinh vận dụng sai công thức tính diện tích hình phẳng.

Lời giải đúng: diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_1^4\left|9-x^2\right|dx=\int_1^3\left|9-x^2\right|dx+\int_3^4\left|9-x^2\right|dx=\int_1^3(9-x^2)dx+\int_3^4(x^2-9)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3+\left(\frac{x^3}{3}-9x\right)\Bigg|_3^4=\frac{38}{3}$$

2.Một số bài tập tương tự

$1/\int_0^5\frac{dx}{\left(x-4\right)^2}$

$2/\int_0^5 x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}dx$

$3/\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^4 x}$

$3/\int_{-1}^1\frac{-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$

$5/\int_0^5\frac{dx}{x^2-3x+2}$

$6/\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx$

$7/\int_{\frac{1}{2}}^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}.dx$

$8/\int_0^3\sqrt{x^3-2x^2+x}.dx$

$9/\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x-2}.dx$

$10/\int_4^8\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$

$11/\int_0^5\frac{2x^3+2x+3}{x^2+1}dx$

$12/\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$

$13/\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$14/\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

MỘT SỐ SAI LẦM KHI GIẢI TOÁN NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN 2

Một số sai lầm của học sinh khi tính tích phân

Bài 1: Tính tích phân: I = $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x+1)^2}$

* Sai lầm thường gặp: I = $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{(x+1)^2} = \int_{-2}^{2}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$

* Nguyên nhân sai lầm :

Hàm số y = $\frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại x= $-1 \in [-2;2]$ suy ra hàm số không liên tục trên $[-2;2]$ nên không sử dụng được công thức Newtơn – Leibnitz như cách giải trên.

* Lời giải đúng

Hàm số y = $\frac{1}{(x+1)^2}$ không xác định tại x= $-1 \in [-2;2]$ suy ra hàm số không liên tục trên $[-2;2]$ do đó tích phân trên không tồn tại.

* Chú ý đối với học sinh:

Khi tính $\int_a^b f(x)dx$ cần chú ý xem hàm số y=f(x) có liên tục trên $[a;b]$ không? Nếu có thì áp dụng phương pháp đã học để tính tích phân đã cho còn nếu không thì kết luận ngay tích phân này không tồn tại.

* *Một số bài tập tương tự*:

Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^5\frac{dx}{(x-4)^4}$.

2/ $\int_{-2}^{3}x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}dx$.

3/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^4 x}dx$

4/ $\int_{-1}^{1}\frac{-x^3.e^x+x^2}{x^3}dx$

Bài 2 :Tính tích phân: I = $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x}$

* Sai lầm thường gặp: Đặt t = tg$\frac{x}{2}$ thì dx = $\frac{2dt}{1+t^2}$; $\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1+t^2}{(1+t)^2}$

$\Rightarrow \int\frac{dx}{1+\sin x} = \int\frac{2dt}{(1+t)^2} = \int 2(t+1)^{-2}$ d(t+1) = $-\frac{2}{t+1}$ + c

$\Rightarrow$ I = $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x} = \frac{-2}{tg\frac{x}{2}+1}\Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{tg\frac{\pi}{2}+1} - \frac{2}{tg0+1}$

do tg$\frac{\pi}{2}$ không xác định nên tích phân trên không tồn tại.

* Nguyên nhân sai lầm:

Đặt t = tg$\frac{x}{2}$ $x \in [0;\pi]$ tại x = π thì tg$\frac{x}{2}$ không có nghĩa.

* Lời giải đúng:

$$I = \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x} = \int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \int_0^{\pi}\frac{d\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \text{tg}\frac{\pi}{4} - tg\left(\frac{-\pi}{4}\right) = 2.$$

* Chú ý đối với học sinh:

Đối với phương pháp đổi biến số khi đặt t = u(x) thì u(x) phải là một hàm số liên tục và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$.

**Một số bài tập tương tự:*

Tính các tích phân sau:

1/ $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin x}$ 2/ $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$

Bài 3: Tính I = $\int_0^4 \sqrt{x^2-6x+9}$ dx

* Sai lầm thường gặp:

$$I = \int_0^4 \sqrt{x^2-6x+9}\,dx = \int_0^4 \sqrt{(x-3)^2}\,dx = \int_0^4 (x-3)d(x-3) = \frac{(x-3)^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{1}{2}-\frac{9}{2} = -4$$

* Nguyên nhân sai lầm:

Phép biến đổi $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$ với x $\in [0;4]$ là không tương đương.

* Lời giải đúng:

$$I = \int_0^4 \sqrt{x^2-6x+9}\,dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{(x-3)^2}\,dx = \int_0^4 |x-3|d(x-3) = \int_0^3 -(x-3)d(x-3) + \int_3^4 (x-3)d(x-3)$$

$$= -\frac{(x-3)^2}{2}\Big|_0^3 + \frac{(x-3)^2}{2}\Big|_3^4 = \frac{9}{2}+\frac{1}{2} = 5.$$

* Chú ý đối với học sinh:

$$\sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} = |f(x)| \qquad (n \ge 1, n \in N)$$

I = $\int_a^b \sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} = \int_a^b |f(x)|dx$ ta phải xét dấu hàm số f(x) trên $[a;b]$ rồi dùng tính chất tích phân tách I thành tổng các phân không chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Một số bài tập tương tự:

1/ I = $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}$ dx ; 2/ I = $\int_0^3 \sqrt{x^3-2x^2+x}$ dx

3/ I = $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)}$ dx 4/ I = $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{tg^2x+\cot g^2x-2}$ dx

Bài 4: Tính I = $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

* Sai lầm thường gặp:

$$I = \int_{-1}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = arctg(x+1)\Big|_{-1}^{0} = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4}$$

* Nguyên nhân sai lầm :
Học sinh không học khái niệm arctgx trong sách giáo khoa hiện thời.
* Lời giải đúng:
Đặt x+1 = tgt $\Rightarrow dx = \left(1 + tg^2 t\right)dt$
với x=-1 thì t = 0
với x = 0 thì t = $\frac{\pi}{4}$

Khi đó I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 + tg^2 t\right)dt}{tg\ t + 1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

* Chú ý đối với học sinh:

Các khái niệm arcsinx, arctgx không trình bày trong sách giáo khoa hiện thời. Học sinh có thể đọc thấy một số bài tập áp dụng khái niệm này trong một sách tham khảo, vì các sách này viết theo sách giáo khoa cũ (trước năm 2000). Từ năm 2000 đến nay do các khái niệm này không có trong sách giáo khoa nên học sinh không được áp dụng phương pháp này nữa. Vì vậy khi gặp tích phân dạng $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx$ ta dùng phương pháp đổi biến số đặt t = tgx hoặc t = cotgx ;

$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ thì đặt x = sint hoặc x = cost

**<u>Một số bài tập tương tự</u>*:

1/ I = $\int_4^8 \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$ 2/ I = $\int_0^1 \frac{2x^3+2x+3}{x^2+1}dx$

3/ I = $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$

<u>Bài 5:</u>

Tính :I = $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

* Suy luận sai lầm: Đặt x= sint, dx = costdt

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin^3 t}{|\cos t|}dt$

Đổi cận: với x = 0 thì t = 0
với x= $\frac{1}{4}$ thì t = ?
* Nguyên nhân sai lầm:
Khi gặp tích phân của hàm số có chứa $\sqrt{1-x^2}$ thì thường đặt x = sint nhưng đối với tích phân này sẽ gặp khó khăn khi đổi cận cụ thể với x = $\frac{1}{4}$ không tìm được chính xác t = ?

* Lời giải đúng: Đặt t = $\sqrt{1-x^2}$ $\Rightarrow$dt = $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \Rightarrow tdt = xdx$

Đổi cận: với x = 0 thì t = 1; với x = $\frac{1}{4}$ thì t = $\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$I=\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}}\frac{(1-t^2)tdt}{t}=\int_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}}(1-t^2)dt=\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\left(\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{15\sqrt{15}}{192}\right)-\frac{2}{3}=\frac{33\sqrt{15}}{192}-\frac{2}{3}$$

* Chú ý đối với học sinh: Khi gặp tích phân của hàm số có chứa $\sqrt{1-x^2}$ thì thường đặt x = sint hoặc gặp tích phân của hàm số có chứa $1+x^2$ thì đặt x = tgt nhưng cần chú ý đến cận của tích phân đó nếu cận là giá trị lượng giác của góc đặc biệt thì mới làm được theo phương pháp này còn nếu không thì phải nghĩ đếnphương pháp khác.

*<u>*Một số bài tập tương tự:*</u>*

1/ tính I = $\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 2/tính I = $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

<u>Bài 6:</u> tính I = $\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{1+x^4}dx$

* Sai lầm thường mắc: I = $\int_{-1}^{1}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}=\int_{-1}^{1}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}dx$

Đặt t = x+$\frac{1}{x}\Rightarrow dt=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

Đổi cận với x = -1 thì t = -2 ; với x=1 thì t=2;

$$I=\int_{-2}^{2}\frac{dt}{t^2-2}=\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{t+\sqrt{2}}-\frac{1}{t-\sqrt{2}}\right)dt=(\ln\left|t+\sqrt{2}\right|-\ln\left|t-\sqrt{2}\right|)\Big|_{-2}^{2}=\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|\Big|_{-2}^{2}$$

$$=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}-\ln\left|\frac{-2+\sqrt{2}}{-2-\sqrt{2}}\right|=2\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

* Nguyên nhân sai lầm: $\frac{x^2-1}{1+x^4}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+x^2}$ là sai vì trong $[-1;1]$ chứa x = 0 nên không thể chia cả tử cả mẫu cho x = 0 được

* Lời giải đúng:

xét hàm số F(x) = $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$

$$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)'=\frac{x^2-1}{x^4+1}$$

Do đó I = $\int_{-1}^{1}\frac{x^2-1}{1+x^4}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

* Chú ý đối với học sinh: Khi tính tích phân cần chia cả tử cả mẫu của hàm số cho x cần để ý rằng trong đoạn lấy tích phân phải không chứa điểm x = 0.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN XÁC SUẤT

Dạng 1: Các bài toán tính xác suất đơn giản

Các bài toán tính xác suất đơn giản không có nghĩa là bài toán dễ. Ở đây tôi muốn đề cập đến các bài toán chỉ sử dụng công thức định nghĩa xác suất cổ điển mà không cần dùng đến quy tắc cộng, quy tắc nhân xác suất

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Bài toán 1.

Cho một lục giác đều ABCDEF. Viết các chữ cái A, B, C, D, E, F vao 6 thẻ. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ. Tìm xác suất sao cho đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên 2 thẻ đó là:

a) Cạnh của lục giác.

b) Đường chéo của lục giác.

c) Đường chéo nối 2 đỉnh đối diện của lục giác.

(Bài 8 – trang 77 sách Đại số và giải tích 11)

Phân tích

Đây có thể coi là một bài toán đếm: đếm tổng số cạnh và đường chéo của một lục giác đều. Chúng ta đã biết từ 6 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng có thể tạo ra được $C_6^2 = 15$ đoạn thẳng.

Do đó nếu gọi:

A: là biến cố "Đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ là cạnh của lục giác"

B: là biến cố "Đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ là đường chéo của lục giác"

C: là biến cố "Đoạn thẳng mà các đầu mút là các điểm được ghi trên hai thẻ là đường chéo nối hai đỉnh đối diện của lục giác"

Và ta có $n(\Omega) = 15$

$$n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$B = \overline{A} \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$n(C) = 6 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Bài toán 2.

Xếp ngẫu nhiên ba bạn nam và ba bạn nữ ngồi vào sáu ghế kê theo hàng ngang. Tìm xác suất sao cho:

a) Nam nữ ngồi xen kẽ nhau.

b) Ba bạn nam ngồi cạnh nhau.

(Bài 6 – trang 76 sách Đại số và giải tích 11)

Phân tích:

Đây tuy là một bài toán xác suất nhưng thực chất nó lại là một bài toán đếm trong tổ hợp. Đó là tập hợp của các bài toán tổ hợp nhỏ quen thuộc như sau:

(1) Có bao nhiêu cách xếp 3 bạn nam và 3 bạn nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang

(Đáp số: $6! = 720$ cách).

(2) Có bao nhiêu cách xếp 3 bạn nam và 3 bạn nữ và 6 ghế kê theo hàng ngang, biết rằng nam nữ ngồi cạnh nhau,

(Đáp số: $3!.3! + 3!.3! = 72$ cách).

(3) Có bao nhiêu cách xếp 3 bạn nam và 3 bạn nữ và 6 ghế kê theo hàng ngang, biết rằng ba bạn nam ngồi cạnh nhau.

(Đáp số: $4.3!.3! = 144$ cách)

Như vậy bài toán trên được giải như sau

Lời giải:

Gọi A là biến cố "Xếp 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang mà nam và nữ xen kẽ nhau"

Và B là biến cố "Xếp 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ vào 6 ghế kê theo hàng ngang mà 3 bạn nam ngồi cạnh nhau"

Ta có $n(\Omega) = 720, n(A) = 72, n(B) = 144$

Suy ra

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$$

Như vậy phần lớn các bài toán dạng 1 là các bài toán sử dụng công thức và kĩ thuật của toán tổ hợp. Đối với các bài toán như vậy thì học sinh chỉ cần phải nắm vững công thức về tổ hợp và định nghĩa xác suất.

Bên cạnh đó, có những bài toán chỉ cần dùng phương pháp liệt kê.

Bài toán 3.

Gieo một con súc xắc, cân đối và đồng nhất. Giả sử con súc xắc suất hiện mặt b chấm. Xét phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$

Tính xác suất sao cho phương trình có nghiệm.

(Bài 4 trang 74 *sách Đại số và giải tích 11*)

Lời giải:

Ký hiệu "con súc xắc suất hiện mặt b chấm" là b:

Không gian mẫu:$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$

Gọi A l à biến cố: "Phương trình có nghiệm"
Ta đã biết phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm khi $\Delta = b^2 - 8 \geq 0$

Do đó $A = \{b \in \Omega | b^2 - 8 \geq 0\} = \{3,4,5,6\} \Rightarrow n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Tuy nhiên, phương pháp liệt kê chỉ có hiệu quả khi số phần tử của biến cố là nhỏ. Nếu số phần tử lớn thì việc liệt kê trở nên khó khăn và dễ xét thiếu phần tử

Bài toán 4.

Trên một cái vòng hình tròn dùng để quay sổ số có gắn 36 con số từ 01 đến 36. Xác suất để bánh xe sau khi quay dừng ở mỗi số đều như nhau. Tính xác suất để khi quay hai lần liên tiếp bánh xe dừng lại ở giữa số 1 và số 6 (kể cả 1 và 6) trong lần quay đầu và dừng lại ở giữa số 13 và 36 (kể cả 13 và 36) trong lần quay thứ 2.

Phân tích: Rõ ràng là trong bài toán này ta không thể sử dụng phương pháp liệt kê vì số phần tử của biến cố là tương đối lớn. Ở đây ta sẽ biểu diễn tập hợp dưới dạng tính chất đặc trưng để tính toán.

Gọi A là biến cố cần tính xác suất
$\Omega = \{(i,j) | i,j \in \{1,2,...,36\}\} \Rightarrow n(\Omega) = 36.36 = 1296$

$A = \{(i,j) | i \in \{1,2,...,6\}, j \in \{13,14,...,36\}\}$

Có 6 cách chọn i, ứng với mỗi cách chọn i có 25 cách chọn j (từ13 đến36 có 25 số) do đó theo quy tắc nhân $n(A) = 6.24 = 144$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{144}{1296} = \frac{1}{9}$$

Ta cùng xét một bài toán khá thú vị sau:

Bài toán 5

Gieo một đồng tiền cân đối đồng chất liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt ngửa hoặc cả 6 lần xuất hiện mặt sấp thì dừng lại.

a) Mô tả không gian mẫu.
b) Tính xác suất:

   A: "Số lần gieo không vượt quá ba"

   B: "Số lần gieo là năm"

   C: "Số lần gieo là sáu"

Phân tích: Đối với bài toán này rất nhiều học sinh lúng túng không biết cách xác định không gian mẫu vì học sinh vốn quen với các bài toán cho trước số lần gieo. Bài toán này trước hết phải xác định được số lần gieo. Giáo viên có thể gợi ý cho học sinh bằng các câu hỏi như:

- Nếu không có giả thiết “cả 6 lần xuất hiện mặt sấp thì dừng lại” thì ta phải gieo đồng tiền bao nhiêu lần?
- Nếu kết hợp với giả thiết “cả 6 lần xuất hiện mặt sấp thì dừng lại” thì ta phải gieo đồng tiền tối đa bao nhiêu lần?

Tất nhiên với câu hỏi đầu tiên học sinh không thể đưa ra một con số cụ thể vì nếu gieo 100 lần vẫn có thể là cả 100 lần đều xuất hiện mặt sấp do đó vẫn chưa thể dừng lại nhưng học sinh đã hình dung ra dạng các phần tử đầu tiên. Với câu hỏi thứ hai học sinh có thể trả lời được số lần gieo tối đa là 6. Từ đó học sinh có thể xác định được không gian mẫu.

Lời giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{N, SN, SSN, SSSN, SSSSN, SSSSN, SSSSS\}$

b) Ta có:

$$A = \{N, SN, SSN\}, n(A) = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{7}$$

$$B = \{SSSSN\}, n(B) = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{7}$$

$$C = \{SSSSSN, SSSSSS\}, n(C) = 2 \Rightarrow P(C) = \frac{2}{7}$$

Sau đây tôi xin trình bày phương pháp giải một số bài toán bằng cách sử dụng các quy tắc tính xác suất đã học.

Dạng 2: Biến cố đối

Trong toán học, có những bài toán khi tính toán trực tiếp rất dài dòng và phức tạp. Khi đó phương pháp gián tiếp lại rất hiệu quả và cho ta cách làm ngắn gọn. Phương pháp sử dụng biến cố đối là một phương pháp như vậy

Bài toán 6

Gieo đồng tiền xu cân đối đồng chất 3 lần. Tính xác suất của các biến cố:

a) Biến cố A: “Trong 3 lần gieo có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa”.

b) Biến cố B: “Trong 3 lần gieo có cả hai mặt sấp, ngửa”.

Phân tích:

Học sinh có thể giải quyết bài toán theo định hướng là: ít nhất 1 lần xuất hiện mặt ngửa thì có 3 khả năng có thể xảy ra là: 1 lần xuất hiện mặt ngửa, hai lần xuất hiện mặt ngửa, ba lần xuất hiện mặt ngửa.

Do vậy học sinh sẽ giải bài toán như sau:

$$\Omega = \{NNN, NNS, NSS, SSS, SNN, SNS, SSN, SNS\}$$

$$A = \{NSS, SNS, SSN, SNN, NNS, NSN, NNN\}$$

Suy ra

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{8}$$

Tuy nhiên làm như vậy dài và rất dễ bỏ quên trường hợp. Tuy nhiên nếu để ý rằng biến cố đối của biến cố A là biến cố $\overline{A}$: "Không có lần nào xuất hiện mặt ngửa". Do đó bài toán này sẽ được giải như sau:

Lời giải

Không gian mẫu $n(\Omega) = 2.2.2 = 8$

a) Ta có biến cố đối của biến cố A là biến cố:

$\overline{A}$: "Không cố lần nào xuất hiện mặt ngửa"

Và ta có $\overline{A} = \{SSS\} \Rightarrow n(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

b) Tương tự ta có:

$$\overline{B} = \{SSS, NNN\} \Rightarrow n(\overline{B}) = 2 \Rightarrow P(\overline{B}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

Bài toán 7.

Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) Biến cố A: "Trong hai lần gieo ít nhất một lần xuất hiện mặt một chấm"

b) Biến cố B: "Trong hai lần gieo tổng số chấm trong hai lần gieo là một số nhỏ hơn 11"

Phân tích: Đối với bài toán này dùng phương pháp sử dụng biến cố đối là phương pháp tối ưu bởi lẽ nếu tính trực tiếp ta phải xét rất nhiều trường hợp

- Đối với biến cố A
  - Mặt một chấm xuất hiện lần thứ nhất
  - Mặt một chấm xuất hiện lần thứ hai
  - Hai lần gieo đều xuất hiện mặt một chấm (khả năng này lại nằm trong cả hai khả năng trên)
- Đối với biến cố B. Tổng số trong hai lần gieo là một số nhỏ hơn 11 tức là có 10 khả năng xảy ra: 1,2,…,10

Lời giải:

Không gian mẫu $\Omega = \{(i,j)|i,j \in \{1,2,\ldots,6\}\} \Rightarrow n(\Omega) = 6.6 = 36$

a) Ta có biến cố đối $\overline{A} = \{\{(i,j)|i,j \in \{2,\ldots,6\}\} \Rightarrow n(\bar{A}) = 25$

$$P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{25}{36} \Rightarrow p(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{11}{36}$$

b) Ta có:

$$\bar{B} = \{(i,j)|i,j \in \{1,2,\dots,6\}, i+j \geq 11\} \Rightarrow \bar{B} = \{(5,6);(6,5),(6,6)\}$$

$$\Rightarrow n(\bar{B}) = 3 \Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{n(\bar{B})}{n(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Phương pháp sử dụng biến cố đối là một phương pháp hay, tuy nhiên để vận dụng được phương pháp này học sinh cần nắm được hai yếu tố:

- Nhận dạng loại toán: Các bài toán có cụm từ "có ít nhất", "tối thiểu", "tất cả"…hoặc tính chẵn, lẻ, vô nghiệm, có nghiệm,…nếu tính kiểu bù gọn hơn thì ta dùng biến cố đối
- Xác định tốt mệnh đề phủ định và phép toán lấy phần bù của một tập hợp để tránh xác định sai biến cố đối.

Dạng 3: **Các bài toán sử sụng quy tắc cộng, quy tắc nhân**

Bài toán 8.

Gieo đồng thời hai con súc sắc. Tính xác suất sao cho:

a) Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn.

b) Tích số chấm trên 2 con súc sắc là số chẵn.

Phân tích:

a) Đối với bài toán này phần lớn học sinh đều giải bằng cách đếm số phần tử của biến cố. học sinh trung bình thường liệt kê phần tử và đếm trực tiếp. Tất nhiên là cách giải này rất dài và có thể làm sót phần tử dẫn tới giải sai. Học sinh khá hơn thì sử dụng tính toán để đếm số phần tử như sau:

Ta có $n(\Omega) = 36$

Chọn A là biến cố "Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn"

Do đó $A = \{(i,j)|i,j \in \{2,4,6\}\}$

Có 3 cách chọn $i \in \{2,4,6\}$, với mỗi cách chọn i ta có 3 cách chọn j. Do đó có 9 cách chọn $(i,j) \in A \Rightarrow n(A) = 9$

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n}(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Tôi thấy rằng đây là một lời giải hợp lý, tuy nhiên bài toán này có thể được giải quyết một cách đơn giản hơn khi ta sử dụng quy tắc xác suất. Cho nên giáo viên có thể gợi mở, dẫn dắt học sinh để đi tới giải bài toán theo định hướng này như sau:

Gọi A là biến cố "Con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt chẵn"

B là biến cố "Con súc sắc thứ hai xuất hiện mặt chẵn"
X là biến cố "Hai con súc sắc đều xuất hiện mặt chẵn"

Thấy rằng A và B là hai biến cố độc lập và $P(A) = P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(Trong 6 mặt thì có 3 mặt chẵn)

Do vậy ta có:

$$P(X) = P(AB) = P(A).P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

b) Gọi Y là biến cố "Tích số chấm trên 2 con súc sắc là số chẵn"

Có 3 khả năng xảy ra để tích số chấm trên con súc sắc là số chẵn:

- Con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt chẵn, con súc sắc thứ hai xuất hiện mặt lẻ.
- Con súc sắc thứ nhất xuất hiện mặt lẻ, con súc sắc thứ hai xuất hiện mặt chẵn.
- Cả hai con súc sắc cùng xuất hiện mặt chẵn.

Và ta có $\overline{Y}$: "Tích số chấm trên 2 con súc sắc là số lẻ" chỉ có 1 khả năng là cả hai con súc sắc đều xuất hiện mặt lẻ.

Như vậy một lần nữa ta lại thấy ưu thế của biến cố đối.

Ta có $\overline{Y} = \overline{A}\overline{B}$ và $\overline{A}$, $\overline{B}$ độc lập nên ta có:

$$P(\overline{Y}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Và do đó

$$P(Y) = 1 - P(\overline{Y}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Bài toán trên ta đã sử dụng quy tắc nhân xác suất. Muốn sử dụng được quy tắc nhân phải khẳng định được hai biến cố là độc lập. Vậy hai biến cố thường độc lập trong các phép thử nào? Tất nhiên ở đây tôi không thể nêu tất cả mà chỉ đưa ra một số trường hợp quen thuộc

- Gieo hai đồng tiền hoặc gieo đồng tiền hai lần thì biến cố xảy ra trong lần gieo này độc lập với biến cố xảy ra trong lần gieo kia. Tương tự đối với con súc sắc.
- Hai xạ thủ bắn sung thì sự bắn trúng hay trượt của người này không ảnh hưởng tới người kia. Do đó các biến cố liên quan đến người này độc lập với biến cố liên quan đến người kia. Tương tự đối với một người bắn hai phát sung
- Có hai cái hòm đựng bóng. Lấy từ mỗi hòm ra một quả bóng thì biến cố lấy ra bóng của hòm này sẽ độc lập với biến cố lấy ra bóng ở hòm kia. Tương tự đối với bài toán lấy bi, lấy cầu...

Chú ý rằng: Nếu A và B độc lập thì $\overline{A}$ và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$ cũng độc lập

Cũng giống như quy tắc cộng và quy tắc nhân trong toán tổ hợp, đối với biến cố xảy ra khả năng này hoặc khả năng kia thì ta sử dụng quy tắc cộng xác suất. Còn với biến cố thực hiện liên tiếp hai hành động thì ta dùng quy tắc nhân

Bài toán 9.

Trong hòm có 10 chi tiết, trong đó có 2 chi tiết hỏng. Tìm xác suất để khi lấy ngẫu nhiên 6 chi tiết thì có không quá 1 chi tiết hỏng.

Phân tích: Trong 6 chi tiết thì có không quá 1 chi tiết hỏng nghĩa là không có chi tiết nào hỏng hoặc có một chi tiết hỏng. Bài toán này không thể giải theo dạng 1 mà phải sử dụng phép tính xác suất. Đây là bài toán dùng quy tắc cộng xác suất

Lời giải

Gọi A_1 là biến cố "Trong 6 chi tiết lấy ra không có chi tiết nào hỏng"

A_2 là biến cố "trong 6 chi tiết lấy ra có 1 chi tiết hỏng"

A là biến cố "Trong 6 chi tiết lấy ra có không quá 1 chi tiết hỏng"

Khi đó $A = A_1 \cup A_2$. Do A_1 và A_2 xung khắc nhau nên

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2)$$

Số cách lấy ra 6 chi tiết từ 10 chi tiết là C_{10}^{6}

$$\Rightarrow n(\Omega) = C_{10}^{6} = 210$$

Có 8 chi tiết không bị hỏng nên

$$n(A_1) = C_8^6 = 28$$

Số cách lấy 5 chi tiết từ 8 chi tiết bị hỏng là C_8^5

Số cách lấy 1 chi tiết từ 2 chi tiết hỏng là C_2^1

Theo quy tắc nhân ta có

$$n(A_2) = C_8^5.C_2^1 = 112$$

Do vậy ta có:

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(\Omega)} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$$

$$P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(\Omega)} = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{2}{3}$$

Bài toán 10

Có hai hộp cùng chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất có 7 quả cầu đỏ, 5 quả cầu xanh. Hộp thứ hai có 6 quả cầu đỏ, 4 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ra ngẫu nhiên 1 quả cầu.

a) Tính xác suất để 2 quả cầu lấy ra cùng màu đỏ.

b) Tính xác suất để 2 quả cầu lấy ra cùng màu.

Phân tích: Bài toán này vẫn có thể giải theo dạng 1, tuy nhiên việc giải rất dài dòng và phức tạp. Nếu sử dụng phối hợp quy tắc cộng và quy tắc nhân thì việc giải quyết bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều.

Lời giải

a) Gọi:

A là biến cố "Quả cầu lấy ra từ hộp thứ nhất màu đỏ"
B là biến cố "Quả cầu lấy ra từ hộp thứ hai màu đỏ"
X là biến cố "Hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ"

Ta có $X = AB, P(A) = \frac{7}{12}, P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Mặt khác A và B độc lập nên

$$P(X) = P(A)(B) = \frac{7}{12}.\frac{3}{5} = \frac{7}{20}$$

b) Gọi:

Y là biến cố "Hai quả cầu lấy ra cùng màu xanh"
Z là biến cố "Hai quả cầu lấy ra cùng màu"

Ta có $Y = \bar{A}\bar{B}$

Mặt khác $\bar{A}$ và $\bar{B}$ độc lập nên

$$P(Y) = P(\bar{A}).P(\bar{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = \left(1 - \frac{7}{12}\right)\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{6}$$

Thấy rằng $Z = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$ nên

$$P(Z) = P(X) + P(Y) = \frac{7}{20} + \frac{1}{6} = \frac{31}{60}$$

Những bài toán sử dụng quy tắc cộng xác suất và quy tắc nhân xác suất là các bài toán luôn tính được xác suất của biến cố cơ sở (các biến cố cần tính xác suất biểu diễn qua các biến cố này). Chúng ta để ý các xác suất sau:

- Khi gieo một đồng tiền xu cân đối, đồng chất thì
  - Xác suất xuất hiện mặt sấp là $\frac{1}{2}$
  - Xác suất xuất hiện mặt ngửa là $\frac{1}{2}$
- Khi gieo một con súc sắc cân đối đồng chất thì
  - Xác suất xuất hiện từng mặt là $\frac{1}{6}$
  - Xác suất xuất hiện mặt có số chấm là chẵn: $\frac{1}{2}$

- Xác suất xuất hiện mặt số chấm là lẻ: $\frac{1}{2}$

- Xác suất xuất hiện mặt số chấm là số chia hết cho 3: $\frac{1}{2}$

Đối với các phép thử khác thì tuỳ theo từng bài toán ta sẽ tính được xác suất này. Và cũng có nhiều bài toán cho trực tiếp xác suât. Bài toán sau là một ví dụ

Bài toán 11

Có 2 lô hàng. Người ta lấy ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng một sản phẩm. Xác suất để được sản phẩm chất lượng tốt ở từng lô hàng lần lượt là $0,7; 0,8$. Hãy tính xác suất để:

a) Trong 2 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt.

b) Trong 2 sản phẩm lấy ra có đúng 1 sản phẩm có chất lượng tốt.

Phân tích: Đây là bài toán cho trước xác suất nên chắc chắn ta phải sử dụng phép toán tính xác suất để giải quyết. Biến cố cơ sở sẽ là "Lấy được sản phẩm tốt từ lô hàng thứ nhất" và "Lấy được sản phẩm tốt từ lô hàng thứ hai"

Lời giải:

Gọi A: "Lấy được sản phẩm tốt từ lô hàng thứ nhất"

B: "Lấy được sản phẩm tốt từ lô hàng thứ hai"

Khi đó ta có:

$P(A) = 0,7 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - 0,7 = 0,3$

$P(B) = 0,8 \Rightarrow P(\overline{B}) = 1 - 0,7 = 0,2$

a) Gọi X là biến cố "Trong 2 sản phẩm lấy ra có ít nhất một sản phẩm có chất lượng tốt".

Suy ra $\overline{X} = \overline{A}\overline{B}$

Do ba biến cố $\overline{A}, \overline{B}$ là độc lập nên ta có

$$P(\overline{X}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,06$$

$$\Rightarrow P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 0,94$$

b) Gọi Y là biến cố "Trong 2 sản phẩm lấy ra có đúng một sản phẩm có chất lượng tốt".

Suy ra $\overline{Y} = \overline{A}B \cup A\overline{B}$

Do $\overline{A}B, A\overline{B}$ xung khắc và biến cố $\overline{A}$ và B; A và $\overline{B}$ độc lập nên ta có

$$P(Y) = P(\overline{A}B \cup A\overline{B}) = P(\overline{A}B) + P(A\overline{B})$$

$$= P(\overline{A})P(B) + P(A)P(\overline{B}) = 0,7.0,2 + 0,8.0,3 = 0,38$$

Bài toán 12

Một phòng được lắp hai hệ thống chuông báo động phòng cháy, một hệ thống báo khi thấy khói và một hệ thống báo khi thấy lửa xuất hiện. Qua thực nghiệm thấy rằng xác suất chuông báo khói là $0,95$, chuông báo lửa là $0,91$ và cả 2 chuông báo là $0,88$. Tính xác suất để khi có hỏa hoạn ít nhất một trong 2 chuông sẽ báo.

Phân tích: Biến cố cần tính xác suất là chuông báo khói báo hoả hoạn hoặc chuông báo lửa báo lửa sẽ báo hoả hoạn. Do đó bài toán này chắc chắn là dùng quy tắc cộng. Tuy nhiên hai biến cố cơ sở lại không xung khắc. Trong trường hợp này ta phải sử dụng quy tắc cộng mở rộng

Lời giải

Gọi A là biến cố "Chuông báo khi thấy khói"

B là biến cố "Chuông báo khi thấy lửa"

C là biến cố "Ít nhất một trong hai chông báo khi hỏa hoạn"

Theo giả thiết bài toán ta có $P(A) = 0,95, P(B) = 0,91, P(AB) = 0,88$

Do đó ta có:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,95 + 0,91 - 0,88 = 0,98$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1/ Từ cỗ bài 52 con, rút ngẫu nhiên 3 con. Tính xác suất để

a/ Có ít nhất một con át

b/ Có đúng một con K

c/ Cả 3 con có số khác nhau đều thuộc tập hợp {2,3,…10}

2/ Trong một chiếc hộp có 5 bóng trắng, 6 bóng xanh, 7 bóng đỏ lấy ngẫu nhiên 4 quả bóng. Tìm xác suất để có 4 quả bóng có đủ 3 mầu.

3/Gieo ngầu nhiên con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần: Tính xác suất của các biến cố:

a/ A: " Có ít nhất một mặt lẻ"

b/ B: " Có một mặt chẵn và một mặt lẻ"

c/ C: " Tổng số chấm hai mặt là một số chẵn"

4/ Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất 3 lần, tính xác suất để:

a/ Có ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm

b/ Tổng các số chấm trên 3 mặt là số lẻ

5/ Trong một hộp có 10 chiếc thẻ được đánh số 0,1,2,….9. Lấy ngầu nhiên liên tiếp 4 thẻ và xếp cạnh nhau theo thứ tự từ trái sang phải tìm xác suất để 4 thẻ xếp thành 1 số tự nhiên sao cho trong đó chỉ một chữ số 1

6/ Một máy bay có 5 động cơ, trong đó có 3 động cơ ở cánh phải và 2 động cơ ở cánh trái. Mỗi động cơ ở cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,1, còn mỗi động cơ ở cánh trái có xác suất hỏng là 0,05. Các động cơ hoạt động độc lập với nhau. Tính xác suất để máy bay thực hiện chuyến bau an toàn trong các trường hợp sau:

a/ Máy bay bay được nếu có ít nhất hai động cơ làm việc

b/ Máy bay bay được nếu có ít nhất mỗi động cơ trên mỗi cánh làm việc

7/ Một bài thi trắc nghiệm gồm 12 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 5 câu trả lời, trong đó chỉ có một câu đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm, mỗi câu trả lời sai bị trừ 1 điểm .Một học sinh kém làm bài bằng cách chọn hú hoạ một câu trả lời. Tính xác suất để:

a/ Học sinh đó được 13 điểm

b/ Học sinh đó được điểm âm

8/ Trong một lớp học có 6 bóng đèn, mỗi bong xác suất bị cháy là 0,25. Lớp học có đủ ánh sáng nếu có ít nhất 5 bóng đèn. Tính xác suất để lớp học không đủ ánh sáng

9/ Một đoàn tầu có 4 toa đỗ ở một sân ga. Có 4 hành khách từ sân ga lên tầu, mỗi người độc lập với nhau và chọn ngẫu nhiên 1 toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, 1 toa có một người và2 toa còn lại không có ai.

10/ Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30 chọn ngầu nhiên ra 10 tấm thẻ tính xác suất để:

a/ Tất cả 10 tấm thẻ đều mang số chẵn

b/ Có đúng 5 số chia hết cho 3

c/ Có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ một tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

11/ Từ một hộp có 7 quả cầu xanh, 6 quả cầu đỏ. Lấy ngẫu nhiên 5 quả. Tính xác suất của các biến cố:

a) A: “Trong 5 quả lấy ra có cả hai mầu”

b) B: “Trong 5 quả lấy ra có ít nhất 2 quả màu đỏ”

12/ Xác suất để một xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 là $0,1$; trúng điểm 9 là $0,2$; trúng điểm 8 là $0,25$ và ít hơn điểm 8 là $0,45$. Xạ thủ ấy bắn một viên đạn. Tìm xác suất để xạ thủ được ít nhất 9 điểm.

SỬ DỤNG VECTƠ TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I. Nhắc lại các tính chất của vectơ.

1. <u>Tính chất 1</u>: $(\vec{a})^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a} = \vec{0}$.

2. <u>Tính chất 2:</u> $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \ge \left|\vec{a} + \vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng chiều.

3. Tính chất 3: $\left|\vec{a}.\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

II. Sử dụng các tính chất của vectơ để chứng minh bất đẳng thức.

1. Sử dụng tính chất 1.

<u>Ví dụ 1.</u>

Cho tam giác ABC, chứng minh rằng: cos2A + cos2B + cos2C $\ge -\frac{3}{2}$.

* **<u>Hướng giải quyết của bài toán</u>**: Để sử dụng được các tính chất của véctơ vào bài toán này thì công thức nào có chứa vectơ và có chứa cả côsin. Vậy đó sẻ là tích vô hướng của hai vectơ, đó là:

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{OB}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OC}\right|\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$ và khi đó nếu ta gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì $R = \left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right|$. Từ đó, ta nghĩ tới việc dùng tính chất 1 để chứng minh. Cụ thể như sau:

**** Giải:***

Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có:

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \ge 0 \Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -\frac{3R^2}{2R^2} = -\frac{3}{2}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 2.</u>

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$6\cos A.\cos B.\cos C \le \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ (1).$$

* **<u>Hướng giải quyết bài toán</u>**. Ta thấy trong biểu thức cần chứng minh xuất hện tổng các bình phương. Vì thế có thể sử dụng được tính chất 1. Nhưng ở bài toán trên chúng ta cần lưu ý, phải xét các trường hợp của tam giác ABC. Vì ở bài toán trên không nói đó là tam giác như thế nào. Cụ thể, ta làm bài toán này như sau:

*** <u>Giải:</u>**

Nếu tam giác ABC là tam giác tù (có một góc tù) thì (1) hiển nhiên đúng vì khi đó vế trái âm, còn vế phải dương.

Nếu tam giác ABC không phải là tam giác tù thì trên mặt phẳng ta đặt các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ sao cho:

$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \cos A; \left|\overrightarrow{ON}\right| = \cos B; \left|\overrightarrow{OP}\right| = \cos C$ và

$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}) = \pi - \hat{C}; (\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}) = \pi - \hat{A}; (\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OM}) = \pi - \hat{B}$

Áp dụng tính chất (1), ta có:

$(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP})^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{ON}^2+\overrightarrow{OP}^2+2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}+2\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM} \geq 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-2(\cos A.\cos B.\cos C+\cos A.\cos B.\cos C+\cos A.\cos B.\cos C) \geq 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C \geq 6\cos A\cos B\cos C$. Điều phải chứng minh.

2. Sử dụng tính chất 2.

* $\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right| \geq \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng chiều

Ta thường sử dụng phương pháp này khi gặp các bài toán chứng minh bất đẳng thức có chứa tổng của các căn bậc hai mà biểu thức trong dấu căn bậc hai có thể đưa về tổng của các bình phương.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng:

$\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{a^2-a+1} \geq 2$ (1) với mọi a thuộc R.

* **Hướng giải quyết bài toán:**

Bài toán này nếu đơn thuần chỉ sử dụng việc chứng minh BĐT thông thường thì sẻ rất khó đối với hs, vì bài toán có hai căn bậc hai nên việc biến đổi sẻ rất khó. Nhưng nếu chú ý các đối tượng trong bài toán và biết khai thác tính chất 2 nêu trên thì bài toán trở nên dể dàng hơn. Cụ thể, gv chỉ cho hs hướng suy nghĩ sau:

Hai biểu thức trong căn bậc hai có thể biến đổi thành tổng các bình phương. $a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ và $a^2-a+1=\left(\frac{1}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Từ đó, ta có thể đặt: $\vec{u}=\left(a+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\vec{v}=\left(\frac{1}{2}-a;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, đến đây sử dụng tính chất 2 ta được diều phải chứng minh. Cụ thể như sau:

* ***Giải***: BĐT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(a+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\sqrt{(\frac{1}{2}-a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \geq 2$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy đặt:

$\vec{u}=(a+\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$; $\vec{v}=(\frac{1}{2}-a;\frac{\sqrt{3}}{2})$

Áp dụng tính chất 2, ta có: $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \geq \left|\vec{u}+\vec{v}\right|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{a^2-a+1} \geq 2$. Điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng :

$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z)$ với x,y,z > 0.

* **Hướng giải quyết bài toán:** Bài toán này về cơ bản không khác gì nhiều so với bài toán trước. Nên ta làm như sau:

Giải: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy ta đặt:

$\vec{u}=(x+\frac{y}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}y)$; $\vec{v}=(y+\frac{z}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}z)$; $\vec{w}=(z+\frac{x}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}x)$;

Từ tính chất $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{w}\right| \geq \left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right|$ ta có:

$\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\overrightarrow{w}\right|=\sqrt{(x+\frac{y}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2}+\sqrt{(y+\frac{z}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}z)^2}+\sqrt{(z+\frac{x}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2} \geq$

$\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}(x+y+z)^2 + \frac{3}{4}(x+y+z)^2} = \sqrt{3}(x+y+z) \Rightarrow$ điều phải chứng minh

Theo cách này ta có thể chứng minh rất nhanh được các bài toán sau đây:

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi x ta có:

$$\sqrt{2\sin^2 x + 4} + \sqrt{2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 5} \geq \sqrt{17}$$

Ví dụ 4: Cho a, b, c > 0 và ab + bc + ca = abc. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca} \geq 3 .$$

3. Sử dụng tính chất 3.

Ví dụ 1. CMR với mọi a, b, c, d ta có bất đẳng thức:

$$|ab+cd| \leq \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)} \qquad (3)$$

Giải: Đặt $\vec{u} = (a, c)$; $\vec{v} = (b, d)$.

Áp dụng tính chất 3, ta có:

$\left|\vec{u}.\vec{v}\right| = |ab+cd| \leq \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| = \sqrt{a^2+c^2}.\sqrt{b^2+d^2} = \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)} \Rightarrow$ điều phải chứng minh

Ví dụ 2. Giả sử $\begin{cases} x^2+xy+y^2 = 3 \\ y^2+yz+z^2 = 16 \end{cases}$ có nghiệm. CMR: xy + yz + zx ≤ 8

Giải:

Đặt $\vec{u} = (y + \frac{x}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}x)$, $\vec{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}z; y + \frac{z}{2})$

Áp dụng tính chất (3), ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Điểm M thuộc mp(ABC). Chứng minh:

$$m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Giải: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $GA.MA \geq \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG} + GA^2$

Tương tự $GB.MB \geq \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{MG} + GB^2$

$GC.MC \geq \overrightarrow{GC}\overrightarrow{MG} + GC^2$

$$\Rightarrow GA.MA + GB.MB + GC.MC \geq \overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$\Leftrightarrow m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$(Đpcm)

4. Sử dụng tính chất của vectơ đơn vị

Ví dụ 1: Xét ví dụ 1 ở phần 1, ta có thể chứng minh bất đẳng thức bằng cách khác như sau.:

Trên mặt phẳng ta dựng các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OM}\right| = 1 \\ \left|\overrightarrow{ON}\right| = 1 \\ \left|\overrightarrow{OP}\right| = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 2\hat{C} \\ (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) = 2\hat{A} \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OM}) = 2\hat{B} \end{cases}$$

Áp dụng tính chất (1), ta có:

$$(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP})^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1+1+1+2\cos(2\hat{C})+2\cos(2\hat{A})+2\cos(2\hat{B}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \geq -\frac{3}{2} \text{ (đpcm).}$$

<u>Ví dụ 2.</u> Cho tam giác ABC và các số thực x, y, z. Chứng minh rằng:

$$yz\cos 2A + xz\cos 2B + xy\cos 2C \geq -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

***<u>Giải</u>*:** Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm O, bán kính bằng 1.

Ta có:

$$(x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC})^2 = (x^2+y^2+z^2)+2(xy\cos 2C+xz\cos 2B+yz\cos 2A) \geq 0$$

Suy ra điều phải chứng minh.

<u>Ví dụ 3</u>.Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C \leq 4$$

<u>Giải</u>: Gọi $\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3$ theo thứ tự là vectơ đơn vị của các cạnh BC, CA, AB.

Ta có:

$$(2\vec{e}_1+\sqrt{3}\vec{e}_2+\vec{e}_3)^2 = 4+3+1-2(\sqrt{3}\cos A+2\cos B+2\sqrt{3}\cos C) \geq 0$$

=> $\sqrt{3}\cos A+2\cos B+2\sqrt{3}\cos C \leq 4$ (Đpcm).

Theo cách này ta có thể chứng minh các bài toán sau:

<u>Ví dụ 4</u>. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\cos A+\cos B+\cos C \leq \frac{3}{2}$$

<u>Ví dụ 5.</u> Cho tam giác ABC và số thực x. Chứng minh rằng:

$$\cos A + x(\cos B+\cos C) \leq \frac{x^2}{2}+1.$$

MỘT SÔ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TOẠ ĐỘ

1 Bài toán 1:

Cho hai điểm A(1;2), B(0;-1) và đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$

Tìm M $\in$ (d) sao cho:

a) (MA+MB) nhỏ nhất.

b) | MA-MB| lớn nhất.

Trong hình học phẳng ta biết:

+/ Nếu A, B nằm về hai phía đối với (d) thì:

(MA + MB)min $\Leftrightarrow$ M= (AB) $\cap$ (d).

+/ Nếu A, B nằm về một phía đối với (d) và B' là điểm đối xứng của B qua (d) thì:

(MA + MB)min $\Leftrightarrow$ M= (AB') $\cap$ (d).

+/ Nếu A, B nằm về một phía đối với (d) mà (AB) cắt (d) thì:

$|\text{MA - MB}|$ max $\Leftrightarrow$ M= (AB) $\cap$ (d).

+/ Nếu A, B nằm về hai phía đối với (d) và B" là điểm đối xứng của B qua (d) mà (AB") cắt (d) thì: $|\text{MA - MB}|$ max $\Leftrightarrow$ M= (AB") $\cap$ (d).

Dựa vào kết quả dã biết trong hình học phẳng ta có thể giải được bài toán 1. Tuy nhiên việc tính toán khá phức tạp. Cụ thể là:

+ Nếu phương trình của (d) được cho dưới dạng tham số thì ta buộc phải chuyển về dạng tổng quát để có thể kiểm tra được A và B nằm một phía hay hai phía đối với (d).

+ Nếu phải tìm tọa độ điểm B' (trong câu a) hoặc B"(trong câu b) thì việc tính toán còn khó khăn hơn nữa. Để khắc phục tình trạng trên, xin đưa ra một lời giải khác như sau:

a) Vì M $\in$ (d) nên M(t ; 2t + 1). Khi đó ta có :

$$MA + MB = \sqrt{(t-1)^2 + (2t-1)^2} + \sqrt{t^2 + (2t+2)^2} = \sqrt{5t^2 - 6t + 2} + \sqrt{5t^2 + 8t + 4}$$

$$= \sqrt{5}\left(\sqrt{(t - \frac{3}{5})^2 + \frac{1}{25}} + \sqrt{(t + \frac{4}{5})^2 + \frac{4}{25}} \right)$$

$$Xét\ A'(\frac{3}{5} : -\frac{1}{5}) \ ,\ B'(\frac{-4}{5} : \frac{2}{5}), M'(t : 0)$$

Khi đó MA + MB = $\sqrt{5}$ (M'A'+M'B').

Vì M' chạy trên trục hoành và A',B' nằm về hai phía đối với trục Ox nên (MA+MB)min $\Leftrightarrow$(M'A'+M'B')min $\Leftrightarrow$ M'= (A'B') $\cap$ Ox.

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \dfrac{\frac{-1}{5}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow M'$ chia đoạn $\left[\frac{-4}{5}; \frac{3}{5}\right]$ theo tỉ số $\frac{-1}{2}$ nên M' $(\frac{2}{15};0)$ => M $(\frac{2}{15};\frac{19}{15})$.

b/ Tương tự như câu a) ta có:

$$|MA - MB| = \sqrt{5}\left| \sqrt{(t - \frac{3}{5})^2 + \frac{1}{25}} - \sqrt{(t + \frac{4}{5})^2 + \frac{4}{25}} \right|$$

Xét A" $\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$; $B''\left(\frac{-4}{5};\frac{2}{5}\right)$; $M''(t;0)$

Khi đó $|\text{MA - MB}|$ = $\sqrt{5}$ (M"A"-M"B").

Vì M" chạy trên trục Ox và A";B" nằm về một phía đối với trục Ox nên :

$$|\text{MA-MB}|\max \Leftrightarrow |\text{M"A"} - \text{M"B"}|\max$$

$$\Leftrightarrow \text{M"} = (\text{A"B"}) \cap \text{Ox} \Leftrightarrow \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} \Rightarrow M"(2;0) \Rightarrow M(2;5)$$

Ý tưởng của lời giải trên vẫn dựa vào kết quả đã biết trong hình học phẳng. Tuy nhiên khi thay đường thẳng (d) bằng trục Ox khi xét vị trí tương đối của các điểm đã làm cho độ phức tạp trong tính toán giảm đi rất nhiều.

<u>2 Bài toán 2</u>:

Trong không gian cho điểm A(1;0;1), $B\left(\frac{4}{3};\frac{-2}{3};\frac{-1}{3}\right)$ và đường thẳng (d) có phương trình tham số:

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in R$$

Tìm M$\in$(d) sao cho: a) (MA+MB) nhỏ nhất.

b) $|\text{MA-MB}|$ lớn nhất.

***Cách giải trong hình học không gian*:**

+ Để giải câu(a) ta tìm điểm biểu diễn B' là ảnh của B qua phép quay quanh trục (d) với góc quay thích hợp sao cho A;B';(d) đồng phẳng và A, B' nằm về hai phía với (d) khi đó: (MA+MB)min ⇔ M= (AB') $\cap$(d).

+Để giải câu (b) ta tìm điểm B" là ảnh của B qua phép quay quanh trục (d) với góc quay thích hợp sao cho A;B";d đồng phẳng và A;B" nằm về một phía đối với (d). Khi đó nếu (AB") cắt (d) thì : $|\text{MA-MB}|$max ⇔ M= (AB") $\cap$(d).

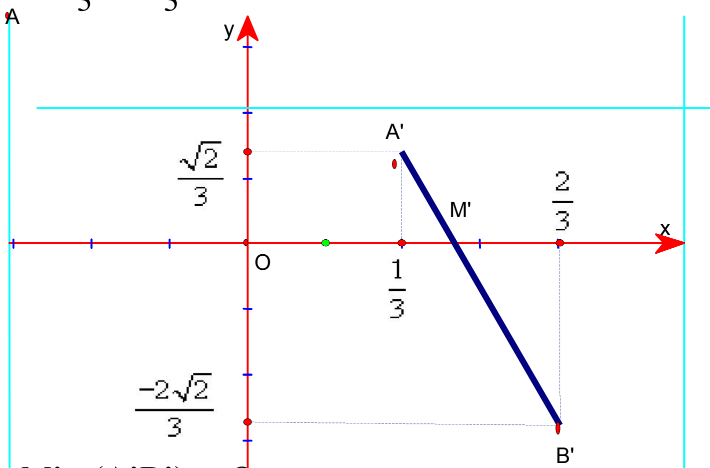
Dựa vào kết quả đã biết trong hình học không gian, ta cũng có thể giải được bài toán2. Tuy nhiên việc tìm tọa độ điểm B'(trong câu a) hoặc B"(trong câu b) buộc ta phải thực hiện nhưng phép tính phức tạp.

Để khắc phục tình trạng này, ta lại tiếp tục ý tưởng đã có trong lời giải của bài tập 1.

a) Vì M$\in$(d) Nên M có tọa độ (t;t;1-t) khi đó:

$$\text{MA} + \text{MB} = \sqrt{(t-1)^2+t^2+(-t)^2} + \sqrt{(t-\frac{4}{3})^2+(t+\frac{2}{3})^2+(\frac{4}{3}-t)^2} = \sqrt{3t^2-2t+1^2} + \sqrt{3t^2-4t+4}$$

$$= \sqrt{3}\left(\sqrt{(t-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{9}} + \sqrt{(t-\frac{2}{3})^2+\frac{8}{9}}\right)$$



Xét: $A'(\frac{1}{3};\frac{\sqrt{2}}{3})$, $B'(\frac{2}{3};\frac{-2\sqrt{2}}{3})$, $M'(t;0)$

Khi đó MA + MB = $\sqrt{3}$ (M'A'+M'B').

Vì M' chạy trên trục Ox và A'; B' nằm về hai phía đối với trục Ox nên:

(MA+MB)min ⇔ (M'A'+M'B')min ⇔ M'= (A'B') $\cap$ Ox

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{A'M'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{-2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow M'(\frac{4}{9};0) \Leftrightarrow M(\frac{4}{9};\frac{4}{9};\frac{5}{9})$$

b) Tương tự câu (a) có : $\left|MA-MB\right|=\sqrt{3}\left(\sqrt{(t-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{9}}-\sqrt{(t-\frac{2}{3})^2+\frac{8}{9}}\right)$

Đặt $A''(\frac{1}{3};\frac{\sqrt{2}}{3})$ $B''(\frac{2}{3};\frac{2\sqrt{2}}{3})$ $M''(t;\,0)$ Khi đó : $\left|MA-MB\right|=\sqrt{3}\ \left|M''A''-M''B''\right|$.

Vì M” chạy trên Ox và A”;B” nằm về một phía với trục Ox nên:

$\left|MA\text{-}MB\right|\max \Leftrightarrow \left|M''A''-M''B''\right|\max \Leftrightarrow M''=(A''B'')\cap 0x$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{M''A''}}{\overline{M''B''}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow M''(0;\,0)\Leftrightarrow M(0;0;1)$$

Trong lời giải trên ta không những thay đường thẳng (d) bằng trục Ox khi biết vị trí tương đối của các điểm mà còn chuyển hệ thống không đồng phẳng gồm hai điểm A;B và đường thẳng (d) thành hệ thống đồng phẳng gồm hai điểm A’ và B’ và trục Ox (trong câu a) hoặc hệ thống đồng phẳng gồm hai điểm A” và B” và trục Ox (trong câu b) đó là những nguyên nhân cơ bản giúp ta có một lời giải đơn giản.

<u>3 Bài toán 3</u> :

Trong không gian cho hai điểm A,B và đường thẳng (d). Tìm điểm M trên (d) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Phương pháp giải :

- Với M thuộc (d) kẻ MH vuông góc với AB .Cạnh AB không đổi .Khi đó diện tích tam giác ABM có giá trị nhỏ nhất khi độ dài đoạn MH nhỏ nhất.
- Trong trường hợp nếu (AB) vuông góc với (d) => M là giao của (d) và mặt phẳng chứa (AB) và vuông góc với (d).
- Nếu (AB) và (d) chéo nhau => MH là đoạn vuông góc chung của (AB) và (d) . Bài toán quy về tìm điểm M là chân đường vuông góc chung của (AB) và (d).

Vậy bài toán phải thực hiện theo các bước sau:

- Điểm M chính là chân đường vuông góc chung của đường thẳng (d) và (AB), trong đó M là điểm thuộc (d).
- Tìm véc tơ chỉ phương của (Δ) là đường vuông góc chung của (AB) và (d).
- Lập phương trình mp(P) đi qua (AB) và chứa đường vuông góc chung đó.
- Tìm giao điểm M của (P) và (d).

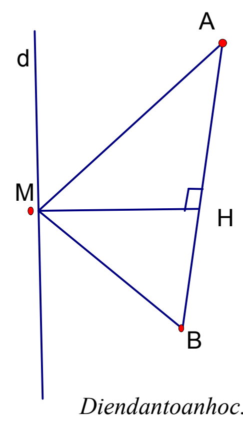
<u>Ví dụ 1</u> : Trong không gian cho hai điểm A(1;-1;0), B(1;0;1) và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d)\qquad \begin{cases} x=-1+t \\ y=1+t \\ z=-2 \end{cases}$$

Tìm điểm M trên (d) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có : $M\in(d)$. Giả sử N(-1;1;-2)∈(d). kẻ $MH\perp AB$



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.MH$$

$\vec{u}_d=(1;1;0)$; $\overrightarrow{AB}=(0;1;1)$ $\Rightarrow \vec{u}_d.\overrightarrow{AB}=1\neq 0$

$\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right].\overrightarrow{AN}=-6\neq 0\Rightarrow \overrightarrow{AB},\vec{u}_d,\overrightarrow{AN}$ không đồng phẳng

=> (AB) và (d) chéo nhau .

Gọi (Δ) là đường vuông góc chung của (AB) và (d)

$$\Rightarrow \vec{u}_\Delta = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_d\right] = (-1;1;-1) \ \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (1;-1;1)$$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (AB) và (Δ) $\Rightarrow \vec{n}_P = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_\Delta\right] = (2;1;-1)$.

Do $A \in (P)$ nên mp(P) có phương trình (P) : 2x+y-z=1.

Lại có $M = (P) \cap (d) \Rightarrow M \in (d) \Rightarrow M(-1+t;1+t;-2)$.

Do M $\in$(P) nên thay toạ độ của M vào phương trình của (P) ta có t = 0 => M(-1;1;-2).

Vậy M (-1;1;-2) thảo mãn yêu cầu của bài toán .

4 Bài toán 4:

Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và hai điểm A,B có toạ độ cho trước. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho : MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương pháp giải :

Để tìm điểm M thoả mãn tính chất trên ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1 : Xét vị trí tương đối của A,B đối với mặt phẳng (P) bằng cách tính :

$t_A = ax_A + by_A + cz_A + d$; $t_B = ax_B + by_B + cz_B + d$

* Nếu $t_A.t_B > 0 \Leftrightarrow$ A,B cùng phía đối với (P). Thực hiện bước 2.

* Nếu $t_A.t_B < 0 \Leftrightarrow$ A,B không cùng phía đối với (P). Thực hiện bước 3.

Bước 2 : Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (P) .

- Viết phương trình tham số của đường thẳng (A_1B).
- Tìm toạ độ giao điểm N của (A_1B) và (P).Thực hiện bước 4.

Bước 3: Viết phương trình tham số của đường thẳng (AB).

Tìm toạ độ giao điểm N của (AB) và (P).Thực hiện bước 5.

Bước 4: Ta đi chứng minh MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi M$\equiv$N :

Thật vậy: Lấy điểm M bất kỳ thuộc (P) ta có :

$MA + MB = MA_1 + MB \geq A_1B = NA_1 + NB$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M$\equiv$N.

Bước 5: Ta đi chứng minh MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi M$\equiv$N.

Thật vậy : Lấy điểm M bất kỳ thuộc (P) ta có :

$MA + MB \geq AB = NA + NB$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M$\equiv$N.

* ***<u>Chú ý</u>***: Phương pháp trên cũng được sử dụng để tìm $M \in (P)$ sao cho: |MA-MB| lớn nhất.

<u>Ví dụ 2</u>: Cho hai điểm A(-7;4;4),B(-6;2;2) và mặt phẳng (P):3x-y-2z+19=0. Tìm M$\in$(P) sao cho:

a) MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất.

b) | MA-MB| đạt giá trị lớn nhất.

Lời Giải

a) MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất.

- Xác định vị trí tương đối của hai điểm của A,B đối với mặt phẳng (P), ta có :

$t_A.t_B$ = (3.(-7)-4-2.4+19).(3.(-6)-2-2.3+19) =98 > 0=> A,B cùng phía đối với (P).

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P) .

Mặt phẳng (P) có : $\vec{n}(3;-1;-2)$. Đường thẳng (AA_1) được xác định bởi :

$$(AA_1) : \begin{cases} \text{Qua } A(-7;4;4) \\ \text{Vtcp } \vec{n}(3;-1;-2) \end{cases} \Leftrightarrow (AA_1) : \begin{cases} x = -7+3t \\ y = 4-t \\ z = 4-2t \end{cases} \quad (t \in R)$$

* Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Ta có $H = (AA_1) \cap (P)$. Thay x,y,z từ phương trình tham số của (AA_1) vào (P), ta được :t = 1 $\Leftrightarrow$ H(-4;3;2).

Vì H là trung điểm của AA_1 nên ta có : A_1(-1;2;0).

* Phương trình tham số của đường thẳng (A_1B):

$$(A_1B): \begin{cases} \text{Qua } A_1(-1;2;0) \\ \text{Vtcp } \overrightarrow{A_1B}(-5;0;3) \end{cases} \Leftrightarrow (A_1B): \begin{cases} x = -1-5t \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in R)$$

* Gọi N là giao điểm của (A_1B) và (P). Để tìm toạ độ của N ta thay x,y,z từ phương trình tham số của (A_1B) vào pt của (P) ta được : $t = \frac{2}{3} \Rightarrow N\left(-\frac{13}{3};2;2\right)$.

Ta đi chứng minh MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv N$.
Thật vậy : Lấy điểm M bất kỳ thuộc (P) ta có:
$MA + MB = MA_1 + MB \geq A_1B = NA_1 + NB$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv N$.

Vậy điểm $M\left(-\frac{13}{3};2;2\right)$ thoả mãn điều kiện bài ra.

b) | MA-MB| đạt giá trị lớn nhất .
Ta có: A,B cùng phía đối với (P).
* Phương trình tham số của đường thẳng (AB):

$$(AB): \begin{cases} \text{Qua } B(-6;2;3) \\ \text{Vtcp } \overrightarrow{AB}(1;-2;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): \begin{cases} x = -6+t \\ y = 2-2t \\ z = 3-t \end{cases} \quad (t \in R)$$

* Gọi N là giao điểm của (AB) và (P). Để tìm toạ độ của N ta thay x,y,z từ phương trình tham số của (AB) vào pt của (P) ta được : $t = 1 \Rightarrow N(-5;0;2)$.
* Ta đi chứng minh |MA-MB| lớn nhất khi và chỉ khi $M \equiv N$.
Thật vậy : Lấy điểm M bất kỳ thuộc (P) ta có : $|MA - MB| \leq AB = |NA - NB|$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv N$.
Vậy điểm $M(-5;0;2)$ thoả mãn điều kiện bài ra.

<u>Ví dụ 3</u>:
Cho hai điểm A(1;1;2), B(2;1;-3) và mặt phẳng (P) có phương trình :2x+y-3z-5=0. Tìm M trên mặt phẳng (P) sao cho :

a) MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất.
b) |MA-MB| đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

a) MA+MB đạt giá trị nhỏ nhất
- Xác định vị trí tương đối của hai điểm của A,B đối với mặt phẳng (P), ta có : $t_A.t_B = (2.1+1-3.2-5).(2.2+1-3.(-3)-5) = -72 < 0$ => A,B không cùng phía đối với (P) .
Đường thẳng (AB) được xác định bởi :

$$(AB): \begin{cases} \text{Qua } A(1;1;2) \\ \text{Vtcp } \overrightarrow{AB}(1;0;-5) \end{cases} \Leftrightarrow (AA_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2-5t \end{cases} \quad (t \in R)$$

Gọi N là giao điểm của (AB) và (P). Để tìm toạ độ của N ta thay x,y,z từ phương trình tham số của (AB) vào pt của (P) ta được : $t = \frac{8}{17} \Rightarrow N\left(\frac{25}{17};1;\frac{-6}{17}\right)$.

* Ta đi chứng minh MA+MB nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv N$.
Thật vậy : Lấy điểm M bất kỳ thuộc (P) ta có : $MA + MB \geq AB = NA + NB$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv N$.

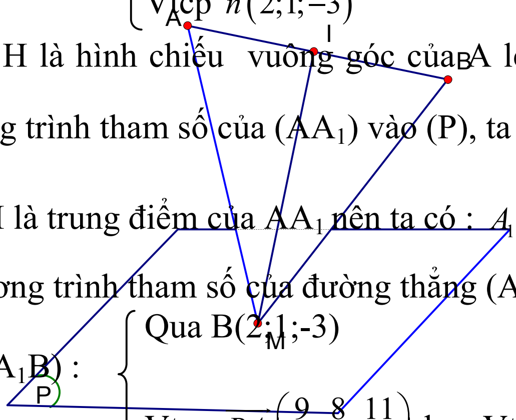
Vậy điểm $M\left(\frac{25}{17};1;\frac{-6}{17}\right)$ thoả mãn điều kiện bài ra.

b) |MA-MB| đạt giá trị lớn nhất

Ta có : A,B khác phía đối với (P). Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P) .

Mặt phẳng (P) có : $\vec{n}(2;1;-3)$. Đường thẳng (AA_1) được xác định bởi :

$$(AA_1):\begin{cases}\text{Qua } A(1;1;2)\\ \text{Vtcp } \vec{n}(2;1;-3)\end{cases} \Leftrightarrow (AA_1):\begin{cases}x = 1+2t\\ y = 1+t\\ z = 2-3t\end{cases} \quad (t \in R)$$



* Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (P). Ta có $H = (AA_1) \cap (P)$. Thay x,y,z từ phương trình tham số của (AA_1) vào (P), ta được :t = $\frac{4}{7} \Leftrightarrow H\left(\frac{15}{7};\frac{11}{7};\frac{2}{7}\right)$.

Vì H là trung điểm của AA_1 nên ta có : $A_1\left(\frac{23}{7};\frac{15}{7};\frac{-10}{7}\right)$.

* Phương trình tham số của đường thẳng (A_1B):

$$(A_1B):\begin{cases}\text{Qua } B(2;1;-3)\\ \text{Vtcp } \overrightarrow{BA_1}\left(\frac{9}{7};\frac{8}{7};\frac{11}{7}\right) \text{ hay Vtcp } \vec{u}(9;8;11)\end{cases} \Leftrightarrow (A_1B):\begin{cases}x = 2+9t\\ y = 1+8t\\ z = -3+11t\end{cases} \quad (t \in R)$$

* Gọi N là giao điểm của (A_1B) và (P). Để tìm toạ độ của N ta thay x,y,z từ phương trình tham số của (A_1B) vào pt của (P) ta được : $t = \frac{9}{7} \Rightarrow N\left(\frac{95}{7};\frac{79}{7};\frac{78}{7}\right)$.

Ta đi chứng minh |MA-MB| lớn nhất khi và chỉ khi M$\equiv$N.

Thật vậy : Lấy điểm M bất kỳ thuộc (P) ta có :

$$|MA - MB| = |MA_1 - MB| \le A_1B = |NA - NB|$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M$\equiv$N.

Vậy điểm $M\left(\frac{95}{7};\frac{79}{7};\frac{78}{7}\right)$ thoả mãn điều kiện bài ra.

<u>5 Bài toán 5</u>:

Trong không gian cho mặt phẳng (P) và hai điểm A,B có toạ độ cho trước .Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho hệ thức : $P.MA^2 + Q.MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất (Với tổng các hệ số P+Q là một số dương).

Phương pháp giải :

- Tìm I thoả mãn hệ thức : $P.\overrightarrow{IA} + Q.\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- Biểu thức : $P.MA^2 + Q.MB^2 = (P+Q)IM^2 + C$ (C là hằng số, P+Q là một số dương).

Khi đó tổng $P.MA^2 + Q.MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi độ dài MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI \perp (p)$.

Bài toán quy về : - Tìm toạ độ điểm I thoả mãn hệ thức véctơ .

- Tìm toạ độ điểm M là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

<u>Ví dụ 4</u> :

Cho hai điểm A(1;7;1), B$(5;5;-3)$ và mặt phẳng (P) : x+2y-2z+1=0. Tìm M nằm trên (P) sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Giả sử I thoả mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ =>I là trung điểm của AB => I(3;6;-1).

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$ $\Rightarrow (MA^2 + MB^2)_{\min} \Leftrightarrow M\,I_{\min}$ (do AB cố định) $\Leftrightarrow M\,I \perp (p)$.

$\Rightarrow \vec{n}_P = (1;2;-2) = \vec{u}_{IM}$.

Khi đó IM có phương trình tham số là : (MI) $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 6+2t \\ z = -1-2t \end{cases}$

Mà M nằm trên mặt phẳng (P) : x+2y-2z+1=0 nên M là giao điểm của (P) và đường thẳng IM. Khi đó toạ độ của M là nghiệm của hệ phương trình sau:

$\begin{cases} x = 3+t \\ y = 6+2t \\ z = -1-2t \\ x+2y-2z+1=0 \end{cases}$ => t = -2 => M(1;2;3).

Vậy M(1;2;3) là điểm thoả mãn yêu cầu bài ra .

<u>2.6 Bài tập - Đáp án</u>

Bài 1 : (Đề 97-Va)

Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P đến hai điểm A(1;2) và B(3;4) là nhỏ nhất.

Bài 2 : Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đề các vuông góc Oxy,cho đường thẳng (d) có phương trình 2x – 3y + 18 = 0 và các điểm A(2;3) ,B(-6;0). Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho MA+MB nhỏ nhất .

Bài 3 : Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đề các vuông góc Oxy ,cho đường thẳng (d) có phương trình : x–2y+2=0 và hai điểm A(0;6),B(2;5). Tìm trên đường thẳng (d) điểm M sao cho:

a) (MA+MB) nhỏ nhất.
b) | MA-MB| lớn nhất.

Bài 4. (CĐ NÔNG LÂM - 2000)

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đề các vuông góc Oxy, cho hai điểm A(1;0) ,B(2;1) và đường thẳng (d) có phương trình 2x – y + 3 = 0. Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho MA+MB là nhỏ nhất so với mọi điểm còn lại trên (d). Viết toạ độ điểm M.

Bài 5. Cho hai điểm A(1;2;-1), B($2-\sqrt{2}$; 2 ;-3) và đường thẳng (d) có phương trình :

(d) $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$

Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho MA+MB nhỏ nhất .hoctoancapba.com

Bài 6. (ĐHQY-96)

Cho hai điểm A(1;1;0) ;B(3;-1;4) và đường thẳng (d) : $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{2}$. Tìm điểm M trên đường thẳng (d) sao cho tổng các độ dài MA+MB nhỏ nhất .

Bài 7. (CĐ SP KONTUM (KA- 2003))

Cho đường thẳng (d) : $\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$ và 2 điểm A(1,2,-1) ; B(7;-2;3)

Trên (d), tìm điểm I sao cho độ dài đường gấp khúc IAB ngắn nhất.

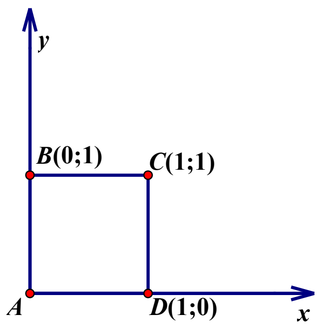
GIẢI TOÁN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ

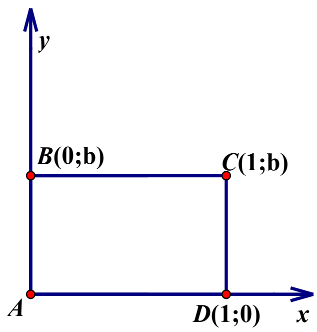
1. Xây dựng hệ tọa độ.

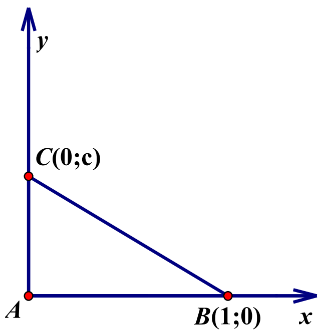
Xây dựng hệ tọa độ hợp lý là điều rất cần thiết cho việc ứng dụng của phương pháp tọa độ trong việc giải toán. Đây là bước đầu tiên của bài giải. Người giáo viên cần hướng dẫn khéo léo giúp học sinh nhận ra các tính chất đặc biệt của bài toán, ở đây chủ yếu là sử dụng tính vuông góc, để xây dựng một hệ tọa độ mà trên đó các tham số được giảm một cách tối ưu nhất.

Ở đây, ta xem xét một số trường hợp áp dụng tốt phương pháp này.

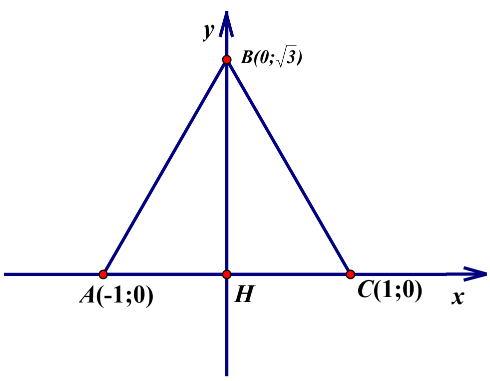
Đối với các bài toán có một trong các tứ giác như: hình vuông, hình chữ nhật, tam giác vuông. Đối với các hình như vậy ta có thể chọn hệ trục tọa độ có gốc nằm tại một đỉnh vuông, có hai trục *Ox* và *Oy* chứa 2 cạnh tương ứng của góc vuông đó. Và chọn đơn vị trên các trục bằng độ dài của một trong hai cạnh góc vuông. Bằng cách chọn như vậy, các tham số được giảm tối đa có thể. Và dạng hình này cũng là dạng áp dụng thuận lợi nhất phương pháp tọa độ trong mặt phẳng này.

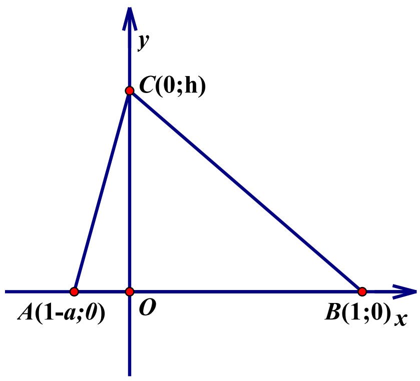






Đối với các bài toán có chứa tam giác đều, tam giác cân, tam giác thường. Ta có thể xây dựng một hệ trục bằng cách dựa vào đường cao. Cụ thể, ta dựng đường cao từ một đỉnh bất kỳ (đối với tam giác cân ta nên dựng đường cao từ đỉnh cân). Chân đường cao khi đó chính là góc tọa độ, cạnh đáy và đường cao vừa dựng nằm trên hai trục tọa độ.





Đối với các bài toán có chứa các đường tròn thì ta có thể chọn góc tọa độ nằm tại tâm của đường tròn và đơn vị của hệ tọa độ bằng bán kính đường tròn, một hoặc hai trục chứa bán kính, đường kính của đường tròn.

Tuy nhiên, khi áp dụng thì không cứng nhắc trong việc chọn hệ trục tọa độ. Nên để học sinh linh hoạt và tìm ra cách chọn tối ưu cho bài toán.

Một số bài toán có thể có nhiều đối tượng hình học trên đó, thì tùy vào giả thuyết ta chọn hệ trục tọa độ cho phù hợp.

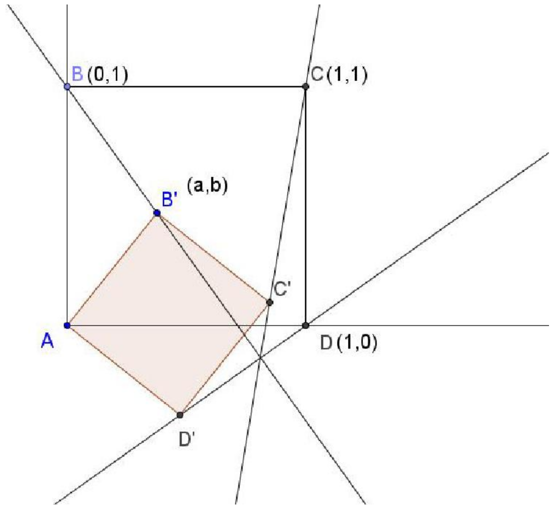
2. Một số bài toán áp dụng phương pháp tọa độ trong mặt phẳng.

a. Chứng minh các tính chất hình học.

Phương pháp tọa độ được áp dụng tốt nhất cho các bài toán mà trên đó có quan hệ vuông góc xuất hiện. Nếu bài toán có các đối tượng như là: hình vuông, hình chữ nhật, tam giác vuông.

Bài toán 1: *Cho hai hình vuông $ABCD$ và $AB'C'D'$ cùng chiều. Chứng minh rằng các đường thẳng BB', CC', DD' đồng quy.*

Bài toán này nếu sử dụng phương pháp tổng hợp thì khá rắc rối. Tuy nhiên, nếu sử dụng phương pháp tọa độ thì khá đơn giản.



Để áp dụng phương pháp tọa độ, đầu tiên ta giúp học sinh xây dựng một hệ tạo độ *Oxy* cho bài toán. Ở bài toán này, việc xây dựng hệ tọa độ khá đơn giản. Ta có thể chọn hệ trục *Oxy* sao cho hình vuông $ABCD$ có 2 cạnh nằm trên 2 trục này.

Lời giải:

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A(0;0)$, $B(0;1)$, $D(1;0)$. Suy ra $C(1;1)$.

Gọi *B(a;b)* vì hai hình vuông cùng chiều nên ta suy ra *D'(b;-a), C'(a+b;b-a).*

Khi đó:

Đường thẳng *BB'* có phương trình:

$(1-b)x+a(y-1)=0 \ \ hay \ \ (1-b)x+ay=a$ (1)

Đường thẳng *CC'* có phương trình:

$(1+a-b)(x-1)+(a+b-1)(y-1)=0 \ \ hay \ \ (a+1-b)x+(a+b-1)y=2a$ (2)

Đường thẳng *DD'* có phương trình:

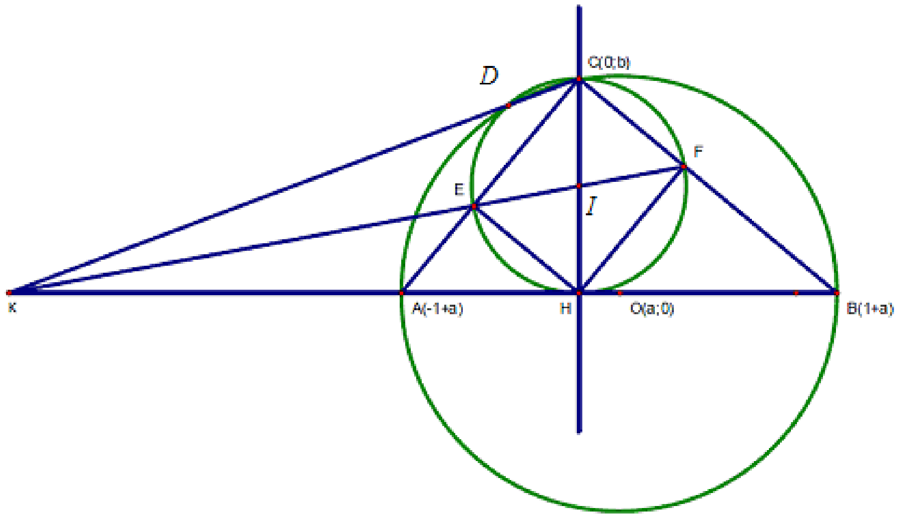
$a(x-1)+(b-1)y=0 \ \ hay \ \ ax+(b-1)y=a$ (3)

Ta có (1) + (3) được phương trình (2). Do đó *BB'* và *DD'* cắt nhau tại $(x_o;y_o)$ thì $(x_o;y_o)$ cũng thỏa phương trình của đường thẳng *CC'*.

Vậy 3 đường thẳng *BB'*, *CC'* và *DD'* đồng quy.

Cách chọn độ dài hình vuông bằng 1 giúp giảm thiểu các tham số không cần thiết, rất có lợi cho việc tính toán.

Bài toán 2: *Cho đường tròn (O) tâm O, đường kính AB. C là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC không cân tại C. Gọi H là chân đường cao của tam giác ABC hạ từ C. Hạ HE, HF vuông góc với AC, BC tương ứng. Các đường thẳng EF và AB cắt nhau tại K . Gọi D là giao điểm của (O) và đường tròn đường kính CH, D ≠ C. Chứng minh rằng K, D, C thẳng hàng.*



Bài này hình vẽ khá rắc rối và có thể ít khi nào các bạn nghĩ tới phương pháp tọa độ mà nghĩ tới các phương pháp khác. Tuy nhiên, nếu biết cách chọn trục một cách khéo léo thì dùng phương pháp tọa độ ta giải bài toán này mà không phải tính toán quá nhiều.

Ở đây ta chọn gốc tọa độ tại chân đường cao của tam giác *ABC* (lợi dụng được tính vuông góc) và đặt *AB=2*, khoảng cách từ chân đường cao H đến tâm O thay đổi tùy theo vị trí của C và ta đặt *HO=a*. Gọi *HC=b*. Từ đó chúng ta xây dựng được một hệ trục khá thuận lợi cho bài toán.

Lời giải cụ thể cho bài toán như sau:

Dựng hệ trục *Oxy* sao cho: *H(0;0), O(0;a), A(-1+a), B(0;1+a)* và *C(0;b).*

Khi đó $b^2 = \left|(-1+a)(1+a)\right| = 1-a^2$

Phương trình đường tròn *(I;IC)*: $x^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$

Phương trình đường tròn *(O;1)*: $(x-a)^2 + y^2 = 1$

Đường thẳng *CD* là trục đẳng phương của hai đường tròn *(I;IC)* và *(O;1)* nên có phương trình là:

$$-2ax + a^2 + \mathrm{b}y - \frac{\mathrm{b}^2}{4} = 1 - \frac{\mathrm{b}^2}{4} \Leftrightarrow 2ax - \mathrm{b}y + \mathrm{b}^2 = 0$$

Phương trình đường thẳng *AC*: $\frac{x}{a-1} + \frac{y}{b} = 1 \Leftrightarrow bx + (a-1)y = b(a-1)$

Phương trình đường thẳng *HE*: $(a-1)x - by = 0$

Suy ra tọa độ điểm $E\left(\frac{-b^2}{2}; \frac{b(1-a)}{2}\right)$

Suy ra phương trình đường thẳng *EF*: $\frac{x}{\frac{-b^2}{2}} = \frac{y - \frac{b}{2}}{\frac{b(1-a)}{2} - \frac{b}{2}}$

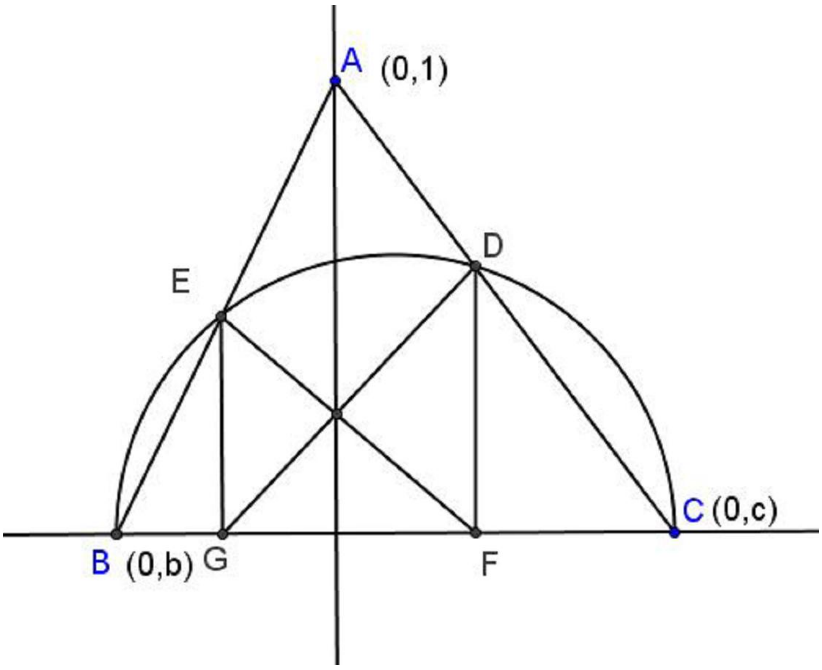
Suy ra tọa độ giao điểm K của EF và AB là $K\left(\frac{-b^2}{2a};0\right)$

Dễ thấy tọa độ điểm K thỏa phương trình đường thẳng CD, suy ra K thuộc CD.

Vậy 3 điểm K, C, D thẳng hàng.

Nhận xét: *Bài toán trên là bài toán khá hay và có nhiều cách giải. Trong cách giải bằng phương pháp tọa độ như trên, nhận xét CD là trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (I) là khá quan trọng, giúp ta giảm nhiều trong việc tính toán. Ý tưởng này cũng thường hay được sử dụng để viết phương trình đường thẳng qua giao điểm của hai đường tròn hay là đường thẳng đi qua hai tiếp điểm.*

Bài toán 3: Cho tam giác ABC, đường tròn đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D. Gọi F, H là hình chiếu của D và E trên BC. Gọi M là giao điểm của EF và DG. Chứng minh rằng $AM \perp BC$.



Nhìn vào đề bài có nhiều yếu tố vuông góc và hình vẽ thì thấy bài toán này rất thuận lợi trong việc áp dụng phương pháp tọa độ.

Lời giải

Ta chọn hệ trục như sau: chân đường cao hạ từ A là H làm gốc tọa độ, *A(0;1)*, *B(0;b)* và *C(0;c)*

Khi đó phương trình đường thẳng $AC: x + cy - c = 0$

Phương trình đường thẳng AB: $x - by - b = 0$

Phương trình đường cao BD: $cx - y - bc = 0$

Phương trình đường cao CE: $bx - y - bc = 0$

Tọa độ điểm $D\left(\frac{bc^2+c}{c^2+1},\frac{c^2-bc}{c^2+1}\right)$ và $E\left(\frac{cb^2+b}{b^2+1};\frac{b^2-bc}{b^2+1}\right)$

Suy ra tọa độ điểm $F\left(\frac{bc^2+c}{c^2+1};0\right), G\left(\frac{cb^2+b}{b^2+1};0\right)$

Phương trình đường thẳng DG: $\dfrac{x-\dfrac{cb^2+b}{b^2+1}}{\dfrac{bc^2+c}{c^2+1}-\dfrac{cb^2+b}{b^2+1}}=\dfrac{y}{\dfrac{c^2-bc}{c^2+1}}$

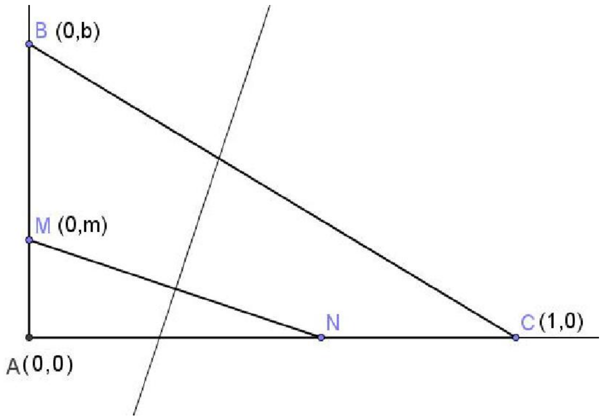
Suy ra giao điểm của DG với trục tung là M có tung độ là:

$$y_M=\frac{-bc(bc+1)(c-b)}{(bc+1)(cb^2+c-bc^2-b)}=\frac{bc}{bc-1}$$

Ta thấy biểu thức trên đối xứng với *b, c* nếu gọi *M'* là giao điểm của *EF* với trục tung thì *M'* cũng có tung độ như trên. Do đó *EF*, *DG* cắt nhau tại một điểm trên trục tung, hay $AM\perp BC$.

b. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định.

Bài toán 4: *Cho tam giác ABC vuông tại A không phải vuông cân, trên cạnh AB và AC lấy M, N sao cho BM=CN. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxy* sao cho: *A(0;0)*, *B(0;b)* và *C(1;0)*.
Gọi *M(0;m)* là điểm thay đổi trên cạnh *AB* với $0<m<b\neq 1$.
Ta có *BM=CN*, suy ra: *N(1+m–b;0)*

Suy ra trung điểm *P* của *MN* có tọa độ: $P\left(\dfrac{1+m-b}{2};\dfrac{m}{2}\right)$

Và: $\overrightarrow{MN}=(1+m-b;-m)$

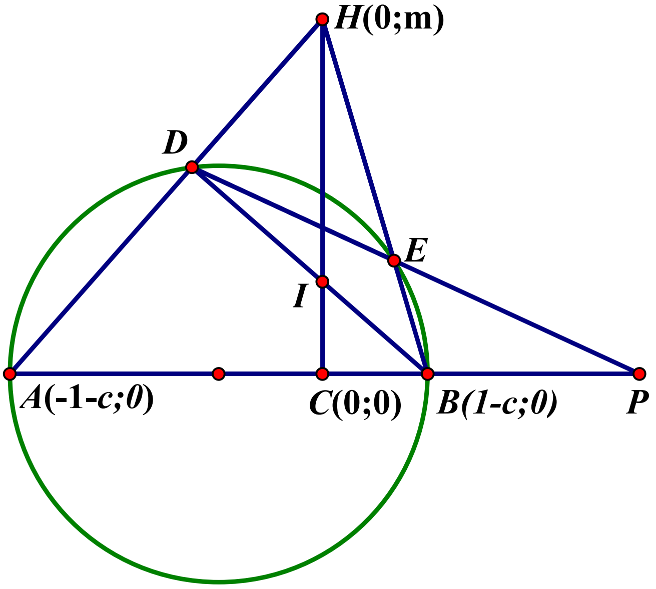
Suy ra phương trình đường trung trực của *MN* là:

$$(1+m-b)\left(x-\frac{1+m-b}{2}\right)-m\left(y-\frac{m}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow m(x-y-1+b)+(1-b)x-\frac{1}{2}(1-b)^2=0$$

Từ đây ta thấy đường thẳng này luôn đi qua điểm cố định $I\left(\dfrac{1-b}{2};\dfrac{b-1}{2}\right)$

Bài toán 5. *Cho đường trình đường kính AB, đường thẳng d vuông góc với AB tại C cố định. H là điểm thay đổi trên d. AH bà BH cắt đường tròn tại D và E. Chứng minh rằng DE luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho C trùng với gốc tọa độ, *B(1–c;0)* và *A(1-c;0)*, d trùng với Oy.

Đường tròn đường kính AB có phương trình: $(x+c)^2+y^2=1$

Giả sử *H(0;m)* (m thay đổi).

Gọi I là giao của BD và *(d)*.

Phương trình đường thẳng AH: $\dfrac{x}{-1-c}+\dfrac{y}{m}=1 \Leftrightarrow mx-(1+c)y+m(1+c)=0$

Phương trình đường thẳng BD (qua B và vuông góc AH):

$(1+c)(x-1+c)+my=0$

Suy ra tọa độ điểm $I\left(0;\dfrac{1-c^2}{m}\right)$

Phương trình đường tròn đường kính HI có phương trình:

$$x^2+\left(y-\frac{1-c^2+m^2}{2m}\right)^2=\left(\frac{1-c^2-m^2}{2m}\right)^2$$

Khi đó phương trình đường thẳng DE là trục đẳng phương của đường tròn đường kính IH và đường tròn đường kính AB nên có phương trình:

$$2cx+\frac{1-c^2+m^2}{m}y=1-c^2-\left(\frac{1-c^2-m^2}{2m}\right)^2+\left(\frac{1-c^2+m^2}{2m}\right)^2$$

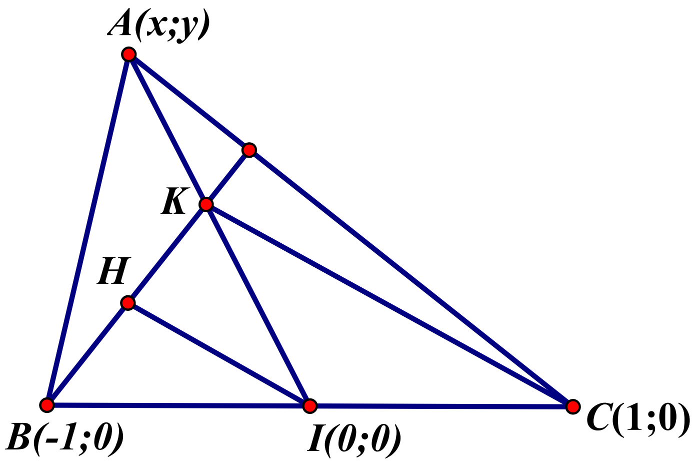
$$\Leftrightarrow 2cx+\frac{1-c^2+m^2}{m}y=2-2c^2$$

Phương trình trên luôn đúng với mọi giá trị của m khi: $x=\dfrac{1-c^2}{c};y=0$

Vậy DE đi qua điểm cố định $P\left(\dfrac{1-c^2}{c};0\right)$

c. Bài toán quỹ tích.

Bài toán 6: *Cho tam giác ABC không cân có hai đỉnh B và C cố định và đỉnh A di động. Qua B dựng đường thẳng d vuông góc với BC, d cắt trung tuyến AI của tam giác ABC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu IH song song với KC thì điểm A di động trên một đường cố định.*



Chọn hệ trục tọa *Oxy* có sao cho *C(1;0)* và *B(-1;0)*. *I* trùng *O*.

Giả sử *A(x; y)* với $x \neq 0; y \neq 0$

Tọa độ trực tâm $H(x_o; y_o)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = x \\ (x-1)(x+1) + y_o y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(x; \frac{1-x^2}{y}\right)$$

Gọi $K(x_o; y_o)$ là giao điểm của *d* và *AI*, khi đó tọa độ *K* là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = \frac{y}{x} x_o \end{cases} \Leftrightarrow K\left(-1; -\frac{y}{x}\right)$$

Theo giả thiết thì IH//KC suy ra $\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{KC}$ cùng phương, do đó:

$$\frac{y}{x}x - 2\frac{1-x^2}{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$$

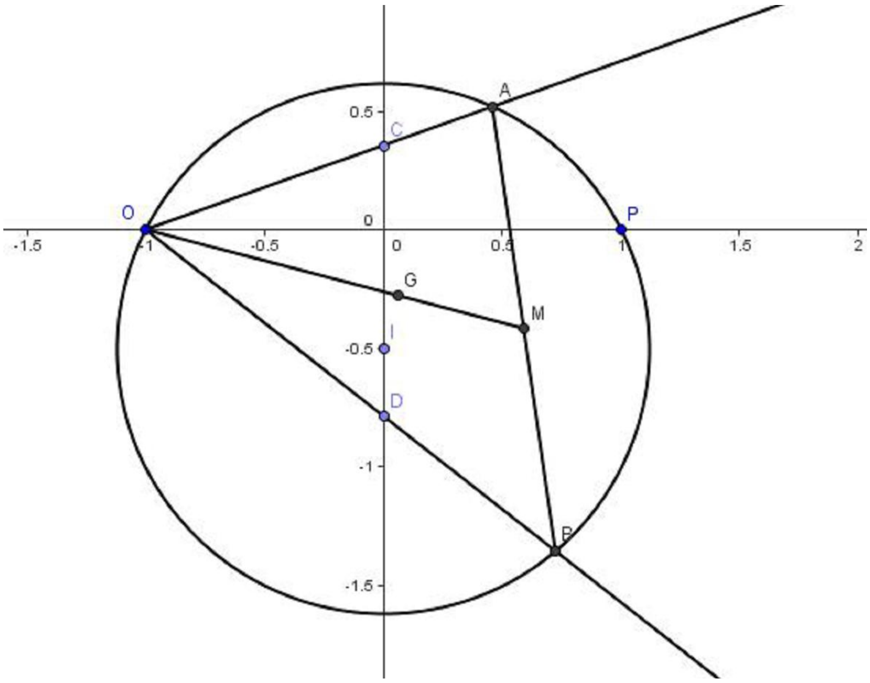
Vậy *A* di động trên $(E): \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$ cố định.

Sau đây chúng ta xét một bài toán mà rất ít bạn có thể nghĩ tới phương pháp tọa độ khi bắt đầu giải bài toán này.

Bài toán 7: *Cho góc Ixy và điểm P nằm bên trong góc. Đường tròn thay đổi qua I và P cắt hai tia Ix, Iy lần lượt tại A, B. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác IAB.*

Với bài toán này, không khó để dự đoán quỹ tích là một đường thẳng, mà nếu là quỹ tích là một đường thẳng thì hoàn toàn có thể tự tin để giải bằng phương pháp tọa độ. Việc còn lại là dám làm và làm tới cùng.

Lời giải



Ta dựng hệ trục tọa *Oxy* với *Oy* là đường trung trực của *IP* và *I(-1; 0)*, *P(1;0)*.

C(0;a) và *D(0;b)* (b < 0) là giao điểm của đường trung trực *IP* và hai tia *Ix*, *Iy*.

Gọi *K(0;m)* là tâm đường tròn thay đổi qua *I* và *P*.

Phương trình đường *(IC)*: $\frac{x}{-1}+\frac{y}{a}=1 \Leftrightarrow y=ax+a$

Phương trình đường thẳng *(ID)*: $y=bx+b$

Phương trình đường tròn *(K,KI)*:

$x^2+(y-m)^2=m^2+1 \Leftrightarrow x^2+y^2-2my-1=0$

Tọa độ giao điểm *A* của *IC* và *(K,KI)* là nghiệm của hệ

$\begin{cases} y=ax+a \\ x^2+y^2-2my-1=0 \end{cases}$ và $x \neq -1$

Suy ra tọa độ điểm $A\left(\frac{2ma+1-a^2}{1+a^2};\frac{a(2ma+2)}{1+a^2}\right)$

Tương tự ta có tọa độ điểm $B\left(\frac{2mb+1-b^2}{1+b^2};\frac{b(2ma+2)}{1+b^2}\right)$

Từ đó ta có tọa điểm *G* trọng tâm của tam giác *IAB* là

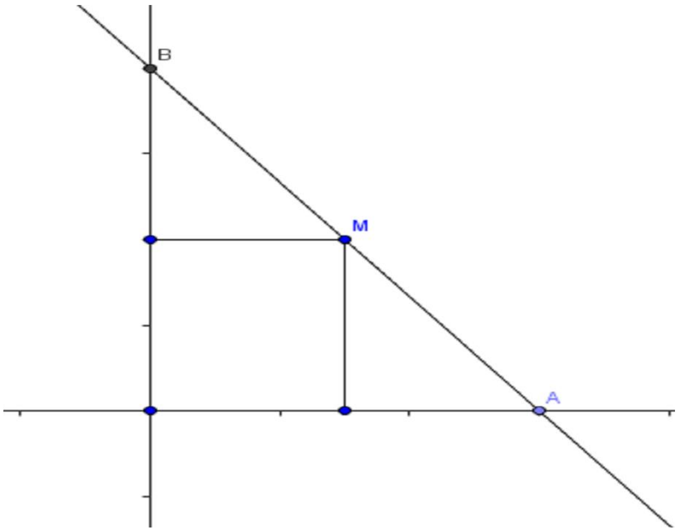
$$\begin{cases} x_G=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}\right)m \\ y_G=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\right)+\frac{2ab}{3}\left(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}\right) \end{cases} \quad (*)$$

Từ đó ta thấy *G* luôn chạy trên đường thẳng có phương trình tham số là phương trình (*).

Mà: $\begin{cases} x_A \geq -1 \\ x_B \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq -\dfrac{1}{a} \\ m \leq -\dfrac{1}{b} \end{cases}$

Do đó quỹ tích G là đoạn thẳng thuộc đường thẳng có phương trình (*) với $m \in \left[-\dfrac{1}{a};-\dfrac{1}{b}\right]$

Bài toán 8: *Cho góc Oxy vuông tại O. M là điểm bên trong góc sao cho khoảng cách từ M đến Ox, Oy lần lượt là 3 và 4. Tìm điểm A trên Ox, B trên Oy sao cho AB qua M và OA + OB là nhỏ nhất.*



Lời giải

Xét hệ trục tọa độ *Oxy* với *O* là gốc tọa độ; *Ox, Oy* là trục hoành và trục tung. Khi đó: *M(3,4)*.

Giả sử: *A(a;0)* và *B(0;b)*.

Khi đó phương trình đường thẳng AB: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

AB qua *M(3;4)* nên ta có: $\dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}=1$

Ta có: $\mathrm{O}A+OB=a+b=(a+b)\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}\right)\geq\left(\sqrt{3}+2\right)^2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a=\dfrac{b\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3+4\sqrt{3} \\ b=2\sqrt{3}+4 \end{cases}$$

Vậy *A, B* là hai điểm thuộc *Ox, Oy* sao cho $OA=3+4\sqrt{3}$ và $OB=2\sqrt{3}+4$.