

CẢM HỨNG TỪ MỘT BÀI TOÁN TUYỂN SINH THPT

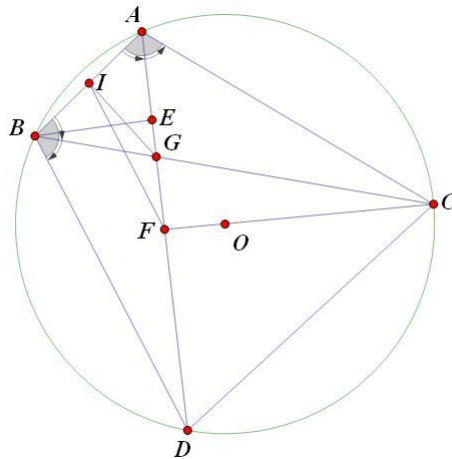
Bùi Bá Anh 11CT, Nguyễn Du

. Trong kì thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên Nguyễn Du Đaklak năm 2015 vừa rồi có một bài toán hình học hay, gây khó khăn cho đa số các thí sinh dự thi, cảm hứng của mình lấy từ bài toán này:

Đề bài: Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$, chứng minh rằng: $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$

. Bài toán này có vẻ đã xuất hiện ở đâu đó, nếu vào phòng thi thí sinh hoàn toàn có thể tự được, xin trình bày lời giải của mình:

Lời giải:



Hình 1: hình

Đặt $\widehat{A} = 4a, \widehat{B} = 2a, \widehat{C} = a$ với $a = \frac{\pi}{7}$

Kẻ phân giác AD của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tâm O tại D , dễ thấy $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{BAD} = 2a$, suy ra tứ giác $ABDC$ là hình thang nội tiếp nên là hình thang cân Từ B, C hạ các đường vuông góc BE, CF xuống AD , gọi I là trung điểm của AB

Ta có: $\triangle ADC$ cân tại C nên CF là đường cao đồng thời là trung tuyến, nên F là trung điểm AD , suy ra: $\widehat{EFI} = \widehat{ADB} = a$ (1)

Mặt khác EI là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông ABE nên $\widehat{EIF} = \widehat{AIF} = \widehat{AIE} = 4a - (7a - 2a - 2a) = a$ (2)

Từ (1), (2) suy ra tam giác EIF cân và $EF = EI = \frac{c}{2}$

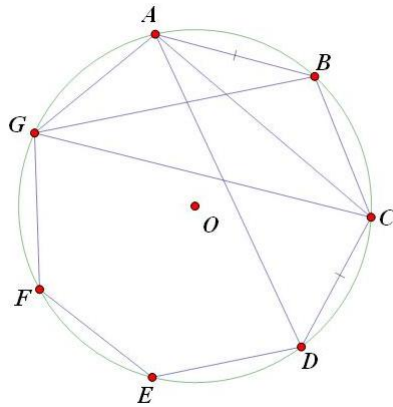
Ta có: $\triangle ABE$ đồng dạng $\triangle ACF$ nên:

$$\begin{aligned} \frac{AE}{AF} &= \frac{AB}{AC} \\ \Leftrightarrow \frac{a-c}{a} &= \frac{c}{b} \\ \Leftrightarrow ab &= ac + bc \end{aligned}$$

Cuối cùng thu được $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (đpcm)

Bây giờ ta sẽ đến với những mở rộng của bài toán trên

Bài toán 1: Cho thất giác đều $ABCDEFGG$. Khi đó ta có: $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$



Hình 2: hình

Rõ ràng bài toán này là hệ quả trực tiếp của bài toán trên

Nếu thấy rằng: $AB = CD$, $\widehat{ACD} = 4a$, $\widehat{ACD} = a$, $\widehat{ADC} = 2a$, áp dụng cho tam giác ACD , ta có đpcm.

Bây giờ, ta sẽ tiếp cận cách giải bài toán trên theo một hướng khác.

Bổ đề: Cho $\triangle ABC$, khi đó $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin \widehat{ACB}}{\sin \widehat{ABC}}$

Chứng minh:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác, ta có: $\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = 2R$, ta có đpcm

Trở lại bài toán gốc, yêu cầu ta phải chứng minh: $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow c(a+b) = ab \Leftrightarrow$

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{b}{c} \quad (3)$$

Áp dụng liên tiếp kết quả trên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{\sin 2a}{\sin 4a} = \frac{1}{2\cos 2a} \\ \frac{b}{c} &= \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{\sin 2a}{\sin a} = 2\cos a \end{aligned}$$

Do đó (3) tương đương với phương trình lượng giác:

$$4.\cos 2a.\cos a - 2.\cos 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos a - \cos 2a + \cos 3a = \frac{1}{2} \text{ với } a = \frac{\pi}{7}$$

Và như thế ta thu được một bài toán mới dạng lượng giác, có vẻ không liên quan lắm đến bài toán đầu, nhưng giải được nó thì bài toán đầu coi như xong

Bài toán 2: (IMO 1963): Chứng minh rằng: $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$

Chứng minh: Dùng thức tương đương với:

$$K = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } K \sin \frac{\pi}{7} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{\sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{\sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7}}{2} = \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} \text{ (đpcm)}$$

Như vậy, ta thấy sự thú vị trong bài toán trên, đặc biệt là những bài toán dạng $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 1 : 2 : 4$

Kết thúc phần này với bài toán:

Bài toán 3: Cho tam giác ABC có $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 1 : 2 : 4$, các đường phân giác AD, BE, CF . CMR: $FD = FE$