

Решения задач
республиканской студенческой олимпиады по математике
 2004 - Группа А

1. Непрерывная функция $f: [0, +\infty) \rightarrow [0; 1]$ удовлетворяет при всех неотрицательных x и y неравенству $f(x+y) \leq f(x)f(y)$. Докажите, что при всех неотрицательных x справедливо неравенство $\int_0^x f(t)dt \geq x\sqrt{f(2x)}$.

Заметим, что функция f убывает. Поэтому

$$\left(\int_0^x f(t)dt \right)^2 = \int_0^x \int_0^x f(t)f(s)dt ds \geq \int_0^x ds \int_0^x f(t+s)dt = \int_0^x ds \int_s^{s+x} f(u)du \geq f(2x) \int_0^x ds \int_s^{s+x} du = f(2x)x^2.$$

2. Можно ли представить число $\sqrt{3}$ как предел последовательности (a_{nm}) , члены которой принадлежат множеству $\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Ответ: можно.

$$A = \left\{ \sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m} \right\} \left. \begin{array}{l} a_{nm} \in A \Rightarrow ka_{nm} \in A, \forall k \in \mathbb{N} \\ a_{n+1n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{A} = \mathbb{R} \Rightarrow \exists (a_{nm}) \rightarrow \sqrt{3}.$$

3. Пусть (x_n) случайная последовательность, состоящая из 0 и 1 (появление 0 и 1 равновероятно). Определить вероятность какого события больше:

А: в последовательности (x_n) первой появится тройка 110;

Б: в последовательности (x_n) первой появится тройка 010.

Ответ: вероятность события А больше.

Рассмотрим четыре равновероятные возможности:

1) $(x_1, x_2) = (1, 1)$; 2) $(x_1, x_2) = (0, 1)$; 3) $(x_1, x_2) = (1, 0)$; 4) $(x_1, x_2) = (0, 0)$;

В первом случае, очевидно, что первой в последовательности появится тройка 110.

Во втором случае, если $x_3 = 0$, то первой появится тройка 010, если $x_3 = 1$, то первой появится (см. предыдущий случай) тройка 110. Следовательно, в этом случае оба события А и Б равновероятны.

В третьем случае, пусть $x_3 = x_4 = \dots = x_k = 0$, $x_{k+1} = 1$ ($k \geq 2$).

Тогда $(x_k, x_{k+1}) = (0, 1)$ и мы имеем второй случай.

В четвертом случае, опять пусть $x_3 = x_4 = \dots = x_k = 0$, $x_{k+1} = 1$ ($k \geq 2$) и мы опять имеем $(x_k, x_{k+1}) = (0, 1)$, т.е. второй случай.

Следовательно, событие А более вероятно, чем событие Б.

4. Пусть А и В – конечные множества действительных чисел. Отображения f и g таковы, что $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$, причем $g(B) \neq A$.

а) Докажите, что существует такое подмножество $S \subset A$, что $A \setminus S = g(B \setminus f(S))$.

б) Верно ли это утверждение, если множества A и B бесконечны?

Ответ: б) неверно.

а) Обозначим $T_1 = A \setminus g(B)$, $R_1 = f(T_1)$. Так как $g(B) \neq A$, то $T_1 \neq \emptyset$. Положим $T_{n+1} = A \setminus g(B \setminus R_n)$, $R_{n+1} = f(T_{n+1})$. Очевидно, что $T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n \subset \dots$ и $R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_n \subset \dots$. Поскольку множества конечны, то $\exists k$ такое, что $T_k = T_{k+1}$. Имеем $T_{k+1} = A \setminus g(B \setminus R_k) \Rightarrow A \setminus T_{k+1} = g(B \setminus R_k) = g(B \setminus f(T_k)) = g(B \setminus f(T_{k+1}))$, т.е. $S = T_k$ удовлетворяет требуемому условию.

б) Пусть $A = B = N$, $f(n) = n$, $g(n) = n + 1$, $n \in N$. Предположим, что требуемое S существует. Пусть $n_0 = \min(A \setminus S)$, тогда $f(n_0) = n_0$ и $g(f(n_0)) = g(n_0) = n_0 + 1$. Т.к. $f(S) = S$, то условие $A \setminus S = g(B \setminus f(S))$ равносильно $N \setminus S = g(N \setminus S)$. Однако $\forall a \in N \setminus S$, $a \geq n_0$, поэтому $g(a) = a + 1 > n_0 \in N \setminus S$, противоречие.

5. A, B, C, D – $(n \times n)$ матрицы такие, что $AD^T - BC^T = E$, где E – единичная матрица, а матрицы AB^T и CD^T – симметрические. Докажите, что $A^T D - C^T B = E$.

$$AB^T = (AB^T)^T = BA^T \Rightarrow AB^T - BA^T = 0; \quad CD^T = (CD^T)^T = DC^T \Rightarrow CD^T - DC^T = 0;$$

$$AD^T - BC^T = E \Rightarrow DA^T - CB^T = E;$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD^T - BC^T & -AB^T + BA^T \\ CD^T - DB^T & -CB^T + DA^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \Rightarrow A^T D - C^T B = E.$$

6. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11} + a_{12}x^{12} + a_{13}x^{13}$, $a_{13} \neq 0$, и $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_{11}x^{11} + b_{12}x^{12} + b_{13}x^{13}$, $b_3 \neq 0$ – два полинома над некоторым полем. Докажите, что степень их наибольшего общего делителя не превосходит 6.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2, & f_2(x) &= a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + a_{13}x^3, & f(x) &= f_1(x) + x^{10}f_2(x); \\ g_1(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3, & g_2(x) &= b_{10} + b_{11}x + b_{12}x^2 + b_{13}x^3, & g(x) &= g_1(x) + x^{10}g_2(x); \\ f(x)g_2(x) - g(x)f_2(x) &= f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x). \end{aligned}$$