**DIỄN ĐÀN TOÁN HỌC VMF**

# CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN PHỔ THÔNG

## TẬP 3

Tháng 07/2015

# Lời nói đầu

Tài liệu này không phải là tài liệu chính thức của Diễn đàn toán học (VMF) nhưng do cá nhân tôi là thành viên của trang diễn đàn thảo luận toán học này nên tôi xin mạo muội ghi xuất xứ là VMF mong quản trị của trang web bỏ qua yếu tố trên.

Hàng năm mỗi giáo viên trung học phổ thông đều làm một sáng kiến kinh nghiệm về lĩnh vực chuyên môn giảng dạy, tuy nhiên lượng kiến thức mà thầy (cô) dày công bỏ ra nghiên cứu đa phần bị bỏ quên. Hôm nay tôi cố gắng tổng hợp lại các sáng kiến kinh nghiệm để đưa vào chung thành một tài liệu "CÁC CHUYÊN ĐỀ TOÁN PHỔ THÔNG". Để tiện cho việc tổng hợp và theo dõi, tôi chia ra thành nhiều tập với độ dày mỗi tập tầm khoảng 50 trang. Chỉ là việc tổng hợp nội dung các sáng kiến để cho các bạn tham khảo nên có điều gì sai sót mong các bạn bỏ qua.

Người tổng hợp
CD13

Tập 3 này gồm các nội dung:

+ Thêm một cách tiếp cận nữa để tính tích phân
+ Khai thác một BĐT (1)
+ Khai thác một BĐT (2)
+ Sử dụng tiếp tuyến để chứng minh bất đẳng thức
+ Một số định hướng cơ bản giải phương trình hàm
+ Kĩ thuật giảm biến trong bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

# THÊM MỘT CÁC TIẾP CẬN NỮA ĐỂ TÍNH TÍCH PHÂN

Trong các kỳ thi tuyển sinh vào các trường đại học – cao đẳng thường có bài toán về tính tích phân. Bài viết này xin trao đổi với các bạn về một hướng tiếp cận ( cách "tư duy") để tính tích phân trong phạm vi phương pháp " đặt ẩn phụ" . Tác giả gọi tên là **" đặt ẩn phụ không làm thay đổi cận của tích phân".**

+ Định nghĩa: Cho hàm số y = f(x) liên tục trên $[a;b]$ nếu F (x) là một nguyên hàm của f(x) thì $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

+ Định nghĩa trên không phụ thuộc vào kí hiệu biến số dưới dấu tích phân.

+ Một số tính chất cần chú ý:

$+ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$+ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \forall c \in [a;b]$

**Bài toán 1:** Tính tích phân $I = \int_{-3}^{5} \left(x^3 - 3x^2 + 2\right)^3 dx$

Khi gặp bài toán này, chắc chắn rằng tất cả các bạn đều nghĩ cách khai triển biểu thức dưới dấu tích phân để đưa về các tích phân cơ bản để tính. Đó là một cách suy nghĩ thường hay gặp phải. Nhưng bạn hãy thử làm xem sao, và hãy thử thay $(x^3-3x^2+2)^3$ bằng $(x^3-3x^2+3)^7$ , $(x^3-3x^2+3)^9$ .... rồi tính nhé!. Sau đó mời các bạn nghiên cứu lời giải sau:

Lời giải: Đặt x=2-t $\Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = -3 : t = 5 \\ x = 5 : t = -3 \end{cases}$

$$\Rightarrow I = -\int_5^{-3} \left((2-t)^3 - 3(2-t)^2 + 2\right)^3 dt = \int_{-3}^{5} \left(-t^3 + 3t^2 - 2\right)^3 dt = -\int_{-3}^{5} \left(t^3 - 3t^2 + 2\right)^3 dt$$

$$= -\int_{-3}^{5} \left(x^3 - 3x^2 + 2\right)^3 dx = -I \Rightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

Khi đọc xong lời giải trên chắc chắn các bạn sẽ đặt câu hỏi : Tại sao lại đặt ẩn phụ như vậy?. Để tìm câu trả lời xin mời các bạn nghiên cứu tiếp bài toán sau:

**Bài toán 2:** Cho f(x) là hàm lẻ, liên tục trên [-a; a]. Chứng minh rằng $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Đây là một bài tập khá quen thuộc với các bạn khi học tích phân và nhiều bạn đã biết cách giải. Xong các bạn hãy xem kỹ lời giải sau để " phát hiện" ra vấn đề nhé!

Lời giải: Đặt x=-t $\Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = -a : t = a \\ x = a : t = -a \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{-a} f(-t)dt = \int_{-a}^{a} f(-t)dt$. Do f(x) là hàm lẻ nên f(-x)=-f(x) do đó

$$\Rightarrow I = \int_{-a}^{a} f(-t)dt = -\int_{-a}^{a} f(t)dt = -\int_{-a}^{a} f(x)dx = -I \Rightarrow 2I = 0 \Rightarrow I = 0$$

Qua 2 bài toán trên, điểm chung của cách đặt ẩn phụ là gì?

Câu trả lời là : **Đặt ẩn phụ nhưng không làm thay đổi cận của tích phân.**

Vậy sử dụng suy nghĩ này vào bài toán thực tế như thế nào ? Các bạn hãy chú ý một số điểm sau:

- *Bài toán 1, 2 có thể tổng quát thành :* ***Chứng minh rằng nếu hàm f (x) liên tục và thoả mãn: f(a+b-x) =-f(x) thì*** $\int_a^b f(x)dx = 0$ **.** *Việc chứng minh bài toán này xin dành cho độc giả (bằng cách đặt x=a+b-t là cách đặt mà cận không hề thay đổi!)*
- *Từ đó ta có cách đặt tổng quát khi gặp tích phân* $\int_a^b f(x)dx$ ***mà không thay đổi cận là*** *đặt x=a+b-t.*
- *Bài toán 1 còn có cách giải khác khá hay để dẫn tới một " suy nghĩ" mới như sau:*

Đặt x=1-t $\Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = -3 : t = 4 \\ x = 5 : t = -4 \end{cases} \Rightarrow I = -\int_4^{-4} \left((1-t)^3 - 3(1-t)^2 + 2\right)^3 dt = \int_{-4}^{4} \left(-t^3 + 3t\right)^3 dt$ .

*Sử dụng kết quả chứng minh của bài toán 2 ta được I=0 ( do f(t)=-t*$^3$*+3t là hàm số lẻ).*

Vậy " suy nghĩ" mới ở đây là gì? Việc đặt ẩn phụ như vậy ta đã dẫn đến tích phân có cận "đối xứng" . Trong trường hợp tổng quát để dẫn đến cận " đối xứng" khi gặp tích phân $\int_a^b f(x)dx$ các bạn hãy đặt $x = \frac{a+b}{2} - t$ *nhé!*

Bây giờ chúng ta cùng vận dụng suy nghĩ đó để giải một số bài toán sau:

**Bài toán 3:** Tính tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx$ (Đề thi đại học năm 2000).

Lời giải: Đặt x=-t $\Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = -\frac{\pi}{4} : t = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} : t = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$ (cách đặt này đã không làm thay đổi cận của tích phân) .

Khi đó $I = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6(-t) + \cos^6(-t)}{6^{-t} + 1} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 6^t . \frac{\sin^6 t + \cos^6 t}{6^t + 1} dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 6^x . \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx$

$\Rightarrow 2I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 6^x . \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{6^x + 1} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x\right) dx$

$= \left(\frac{5x}{8} + \frac{3}{32}\sin 4x\right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{16}$.

**Chú ý:** Bài toán 3 có dạng tổng quát sau: Nếu f(x) là hàm số liên tục, chẵn thì $I = \int_{-b}^{b} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-b}^{b} a^x \frac{f(x)}{a^x + 1} dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-b}^{b} f(x)dx$ **.**

**Bài toán 4:** Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\cos^2 x - 4} dx$

Thông thường khi gặp tích phân trên, hầu hết các bạn đều nghĩ đến phương pháp tính tích phân từng phần. Xong các bạn hãy thử làm như thế và so sánh với lời giải sau:

Lời giải : Đặt $x = \pi - t \Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = 0 : t = \pi \\ x = \pi : t = 0 \end{cases}$

Khi đó $I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{\cos^2(\pi - t) - 4} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{\cos^2 t - 4} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\cos^2 t - 4} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{\cos^2 t - 4} dt$

$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{\cos^2 x - 4} dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx - I$

$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4} dx$

Đặt $cosx = t \Rightarrow \begin{cases} sinxdx = -dt \\ x = 0 : t = 1 \\ x = \pi : t = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dt}{(t-2)(t+2)} = \frac{\pi}{8} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi \ln 3}{4}$

**Chú ý:** Bài toán 4 có thể tổng quát như sau:

Cho hàm số f(x) liên tục và thoả mãn: f(a+b-x) = f(x) . Khi đó $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$ ( để chứng minh kết quả trên các bạn hãy đặt x= a+b-t ).

**Bài toán 5:** Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{xdx}{1 + \sqrt{x-1}}$ ( Đề thi khối A năm 2004)

Với bài toán trên, cách đặt như thế nào để không thay đổi cận của tích phân.

Lời giải: Đặt $t = 1 + \sqrt{x-1}$. Khi đó $x - 1 = (t-1)^2$ hay $x = (t-1)^2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2(t-1)dt \\ x = 1 : t = 1 \\ x = 2 : t = 2 \end{cases}$ (cách đặt này đảm bảo cận không đổi !)

$\Rightarrow 2\int_1^2 \frac{(t-1)\left[(t-1)^2 + 1\right]}{t} .dt = 2\int_1^2 \frac{t^3 - 3t^2 + 4t - 1}{t} .dt = 2\int_1^2 \left( t^2 - 3t + 4 - \frac{1}{t} \right) .dt$

$= 2\left( \frac{t^3}{3} - 3\frac{t^2}{2} + 4t - \ln|t| \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{3} - 2\ln 2 .$

**Chú ý:** Bài toán 5 có thể tổng quát dạng $\int_a^b \frac{p(x)}{\sqrt{mx+n} + c} dx$ với p(x) là đa thức chứa biến x; m,n,c là các hằng số . Ta có thể đặt $t = \sqrt{mx+n} + c$ hoặc $t = \sqrt{mx+n}$ đều giải được.

**Bài toán 6:** Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x + \cos x} dx$

Lời giải: Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow\begin{cases}dx=-dt\\x=0:t=\frac{\pi}{2}\\x=\frac{\pi}{2}:t=0\end{cases}$

$$\mathrm{I}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=J$$

$$\Rightarrow \mathrm{I+J}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x.\cos x)dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{2}\sin 2x)dx=\left(x+\frac{1}{4}\cos 2x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}.\ \text{Vậy}\ \begin{cases}I=J\\I+J=\frac{\pi-1}{2}\end{cases}\Rightarrow I=\frac{\pi-1}{4}$$

**Chú ý:** Bài toán 6 có thể tổng quát thành các dạng sau:

$$\int_{a}^{b}\frac{\sin^k mx}{\sin mx+\cos mx}dx \quad ; \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin^m ax}}{\sqrt[n]{\sin^m ax}+\sqrt[n]{\cos^m ax}}$$

Cuối cùng mời các bạn vận dụng vào một số bài tập sau:

Tính các tích phân:

$$I_1=\int_{0}^{1}\frac{4x-3}{\sqrt{3x+1}+2}dx \qquad I_2=\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}dx$$

$$\mathrm{I}_3=\int_{-1}^{1}\left[\lg\left(\sqrt{\mathrm{x}^2+1000}+x\right)-\frac{3}{2}\right]dx \qquad I_4=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$I_5=\int_{-2000}^{2004}\left(x^3-6x^2+16\right)^5dx \qquad \mathrm{I}_6=\int_{-1}^{5}\mathrm{e}^{x^2-4x+7}\left(x^3-6x+16\right)^{2n+1}dx$$

$$I_7\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x.\sin 2x.\cos 3x}{2^x+1}dx \qquad I_8=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} \qquad I_9=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x.\sin 2x.\cos 5x}{e^x+1}dx$$

$$I_{10}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}x(tgx+\cot gx)dx \qquad I_{11}=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^2 x+1}dx \qquad I_{12}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$$

# KHAI THÁC MỘT BẤT ĐẲNG THỨC 1

Trong chương trình toán T.H.C.S có một bất đẳng thức quen thuộc mà việc ứng dụng của nó trong khi giải các bài tập đại số và hình học rất có hiệu quả. Ta thường gọi đó là "bất đẳng thức kép". Đó là bất đẳng thức sau :

Với mọi a, b ta luôn có : $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \geq 2ab$ **(*)**

Nhận thấy **(*)** $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 .....(1) \\ (a+b)^2 \geq 4ab .....(2) \\ a^2+b^2 \geq 2ab .....(3) \end{cases}$

Cả ba bất đẳng thức trên đều tương đương với hằng bất đẳng thức $(a-b)^2 \geq 0$ và do đó chúng xảy ra đẳng thức khi a = b.

Ý nghĩa của bất đẳng thức **(*)** là nêu nên quan hệ giữa tổng hai số với tích hai số và với tổng các bình phương của hai số đó.

Sau đây là một số ví dụ minh hoạ việc vận dụngvà khai thác bất đẳng thức **(*)**.

**Bài toán 1:**

Cho a + b = 1 . Chứng minh rằng:

$a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ ; $a^4+b^4 \geq \frac{1}{8}$ ; $a^8+b^8 \geq \frac{1}{128}$

**** Giải*** : Áp dụng bất đẳng thức (1) và giả thiết a + b = 1 ta có:

$a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{1}{2}$ ; $a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \geq \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} = \frac{1}{8}$

$a^8+b^8 \geq \frac{(a^4+b^4)^2}{2} \geq \frac{(\frac{1}{8})^2}{2} = \frac{1}{128}$ .Đẳng thức xảy ra khi a = b = 1/2.

**** Khai thác bài toán***

*Nhận xét 1:* Nếu tiếp tục áp dụng bđt (1) và tăng số mũ của biến ta thu được các kết quả như:

$a^{16}+b^{16} \geq \frac{(a^8+b^8)^2}{2} \geq \frac{(\frac{1}{128})^2}{2} = \frac{1}{2^{15}}$.....

Tổng quát ta có bài toán sau:

**Bài toán 1.1:**

Cho a + b = 1 . Chứng minh rằng: $a^{2^n}+b^{2^n} \geq \frac{1}{2^{2^n-1}}$

Cách giải bài toán 1.1 ta áp dụng phương pháp quy nạp toán học và làm tương tự bài toán 1.

*Nhận xét 2:* Tiếp tục khái quát bài toán 1.1 khi thay giả thiết a + b = 1 bởi giả thiết a + b = k, làm tương tự như trên ta có $a^{2^n}+b^{2^n} \geq \frac{k^n}{2^{2^n-1}}$

Vậy có bài toán 1.2 như sau:

**Bài toán 1.2:**

Cho a + b = k . Chứng minh: $a^{2^n}+b^{2^n} \geq \frac{k^n}{2^{2^n-1}}$

*Nhận xét 3:* Từ bài toán 1.2 nếu ta thay giả thiết a + b = k bởi b = k - a ta được

**Bài toán 1.3:**

Chứng minh : $a^{2n}+(k-a)^{2n}\geq\frac{k^n}{2^{2n-1}}$ với mọi k .

**** Khai thác sâu bài toán***

*Nhận xét 1:* Nếu áp dụng bất đẳng thức (1) liên tiếp 2 lần ta có kết quả:

$$a^4+b^4\geq\frac{(a^2+b^2)^2}{2}\geq\frac{\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2}{2}=\frac{(a+b)^4}{2^3}$$

Tổng quát ta có bài toán sau:

**Bài toán1.4:**

Chứng minh :

a) $a^4+b^4\geq\frac{(a+b)^4}{2^3}$ b) $a^{2n}+b^{2n}\geq\frac{(a+b)^{2n}}{2^{2n-1}}$

*Nhận xét 2:*

Nếu áp dụng bất đẳng thức (1) liên tiếp nhiều lần và tăng số biến ta có:

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geq\frac{(a^2+b^2)^2+(c^2+d^2)^2}{2}\geq\frac{\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2+\left[\frac{(c+d)^2}{2}\right]^2}{2}=$$

$$=\frac{(a+b)^4+(c+d)^4}{8}\geq\frac{(a+b+c+d)^4}{8.2^3}$$

$$\Rightarrow\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4}\geq\frac{(a+b+c+d)^4}{4.8.2^3}=\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4.$$

**Vậy có bài toán 1.5:**

Chứng minh: $\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{4}\geq\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

Cứ tiếp tục suy luận sâu hơn nữa ta thu được nhiều bài toán tổng quát hơn.

**<u>Bài toán 2:</u>**

Cho a, b, c > 0.Chứng minh rằng: $(a+b).(b+c).(c+a)\geq 8abc.$

**** Giải:*** áp dụng bất đẳng thức (2) ta có : $\begin{cases}(a+b)^2\geq 4ab\\(c+b)^2\geq 4cb\\(a+c)^2\geq 4ac\end{cases}$

$\Rightarrow\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2\geq 64a^2b^2c^2$ (vì a, b, c > 0)

$\Rightarrow(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$ ( vì (a+b)(b+c)(c+a) > 0 và 8abc > 0).

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c .

**** Khai thác bài toán***

*Nhận xét 1:* Nếu cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Khi đó ta có 1 - a, 1- b, 1 - c > 0 và có 1 + c = 1 + 1 - a - b = (1 - a) + (1 - b). Áp dụng bài toán 2 ta được : $(1+a)(1+b)(1+c)\geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$

**Vậy có bài toán 2.1:**

Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1.

Chứng minh: $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$

*Nhận xét 2:* Ta tiếp tục khai thác sâu hơn bài toán bằng cách cho a + b + c = n > 0 . Khi đó tương tự như bài toán 2.1 ta có

**Bài toán 2.2:**

Cho a, b, c > 0 và a + b + c = n > 0.

Chứng minh : $(n+a)(n+b)(n+c) \geq 8(n-a)(n-b)(n-c)$

**Bài toán 3:**

Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta có : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

**** Giải :***

áp dụng bất đẳng thức (3) ta có : $\begin{cases} a^2+b^2 \geq 2ab \\ c^2+b^2 \geq 2cb \\ a^2+c^2 \geq 2ac \end{cases}$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca) \Rightarrow$ đ.p.c.m

Có đẳng thức khi a = b = c.

**** Khai thác bài toán***

*Nhận xét 1 :* Nếu áp dụng bài toán 3 và tăng số mũ lên, giữ nguyên số biến ta có $a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ (*) lại áp dụng bài toán 3 lần nữa ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$ (**) . Từ (*) và (**) ta thu được kết quả là $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$ .

**Vậy có bài toán 3.1:**

Chứng minh rằng với mọi a, b, c ta có : $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$ .

*Nhận xét 2:* Nếu tăng số biến và giữ nguyên số mũ của biến với cách làm như bài toán 3 ta có

**Bài toán 3.2:**

Chứng minh rằng: $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2} \geq a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n+a_na_1$

Với mọi $a_1;a_2;...;a_n$

**Bài toán 4 :**

Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d ta có : $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4abcd$

**** Giải :***

Áp dụng bất đẳng thức (3) ta có :

$a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 2a^2b^2+2c^2d^2 = 2(a^2b^2+c^2d^2) \geq 4abcd$ đ.p.c.m

Có đẳng thức khi a = b = c = d

**** Khai thác bài toán***

*Nhận xét 1:* Nếu thay b = c = d = 1 ta có bđt $a^4+3 \geq 4a \Rightarrow a^4-4a \geq -3$

**Vậy có bài toán 4.1:**

Tìm giá trị nhỏ nhất của A = $a^4-4a$

*Nhận xét 2:* Nếu khai thác bài toán 4 theo hướng tăng số biến, số mũ lên, ta Có bài toán tổng quát sau:

**Bài toán 4.2:**

Chứng minh rằng với mọi số $a_1;a_2;a_3;...;a_{2n}$ với $n \in N^*$ ta có:

$a_1^{\,2^n}+a_2^{\,2^n}+a_3^{\,2^n}+...+a_{2^n}^{\,2^n} \geq 2^n a_1a_2a_3...a_{2^n}$ .

**Bài toán 5 :**

Cho a + b + c + d = 2 . Chứng minh : $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 1$

**** Khai thác bài toán***

*Nhận xét 1:* Nếu thay hằng số 2 ở giả thiết bởi số k ta được kết quả $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq \frac{k^2}{4}$ .

Vậy có bài toán tổng quát hơn như sau:

**Bài toán 5.1:**

Cho a + b + c + d = k . Chứng minh : $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq \frac{k^2}{4}$

*Nhận xét 2:* Ta còn có thể tổng quát bài toán 5.1 ở mức độ cao hơn bằng cách tăng số biến của bài toán . Khi đó bài toán 5.1 chỉ là trường hợp riêng của bài toán sau:

**Bài toán 5.2:**

Cho $a_1+a_2+...+a_n = k$ . Chứng minh: $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2} \geq \frac{k^2}{n}$ với $n \in N^*$

Để giải bài toán này thì cả hai cách làm của bài toán 5 ở trên đưa vào áp dụng không hợp lý, ta sẽ làm như sau:

Áp dụng bđt (3) ta có: $a_1^{\,2}+\frac{k^2}{n^2} \geq 2a_1.\frac{k}{n}$ ; $a_2^{\,2}+\frac{k^2}{n^2} \geq 2a_2.\frac{k}{n}$ ; … ; $a_n^{\,2}+\frac{k^2}{n^2} \geq 2a_n.\frac{k}{n}$

$\Rightarrow a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2}+n\frac{k^2}{n^2} \geq 2\frac{k}{n}(a_1+a_2+...+a_n)$ (vì $a_1+a_2+...+a_n=k$ )

$\Rightarrow a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2}+\frac{k^2}{n} \geq 2\frac{k^2}{n} \Rightarrow a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2} \geq \frac{k^2}{n}$ (đ.p.c.m).

Từ đó suy ra :

$$\boxed{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2} \geq \frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{n} \text{ với } n \in N^* \quad \textbf{(1.1)}}$$

**Vậy có bài toán 5.3:**

Chứng minh: $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+...+a_n)^2}{n}$ với $n \in N^*$ .

Đặc biệt hoá với n = 5, n = 7, ta được những bài toán như : Chứng minh : $a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_5^{\,2} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+...+a_5)^2}{5}$

$a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_7^{\,2} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+...+a_7)^2}{7}$ .

Rõ ràng những bđt này nếu sử dụng phương pháp dùng định nghĩa hoặc biến đổi tương đương thì rất khó giải quyết . hoctoancap ba.com

**** Khai thác sâu bài toán***

Nếu tiếp tục nâng số mũ lên cao hơn theo cách khai thác của bài toán 1.4 ta thu được kết quả tổng quát hơn nữa chẳng hạn:

**Bài toán 5.4:**

Chứng minh:

a) $a_1^{\,4}+a_2^{\,4}+...+a_n^{\,4} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+...+a_n)^4}{n^3}$ với $n \in N^*$

b) $a_1^{\,8}+a_2^{\,8}+...+a_n^{\,8} \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+...+a_n)^8}{n^7}$ với $n \in N^*$

c) $$a_1^{2^n} + a_2^{2^n} + ... + a_{2^n}^{2^n} \geq \frac{\left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2^n}\right)^{2^n}}{\left(2^n\right)^{2^n - 1}} \text{ với } n \in N^* \quad \textbf{(1.2)}$$

Rõ ràng các bất đẳng thức này còn chặt hơn cả bđt Cô Si và cũng không cần điều kiện gì của biến.

***Tiểu kết 1:***

Trên đây ta đã khai thác và phát triển từ những bài toán đơn giản để thu được những bài toán mới, những kết quả mới tổng quát hơn.

Bất đẳng thức **(1.1)** là trường hợp tổng quát của bất đẳng thức **(1)** khi ta khai thác theo hướng tăng số biến của bài toán.

Bất đẳng thức **(1.2)** là trường hợp tổng quát của bất đẳng thức **(1)** khi ta khai thác theo hướng tăng cả số mũ và số biến.

***Tiểu kết 2:***

Để khai thác, phát triển một bài toán về bất đẳng thức ta có thể đi theo một số hướng như sau:

***Hướng thứ nhất*** *:* Tổng quát hoá các hằng số có trong bài toán, ví dụ như các bài toán 1.2; 2.2; 5.1; 6.1; 8.1; 9.1; 10.2; 12.1

***Hướng thứ hai*** *:* Giữ nguyên số biến và tăng số mũ của các biến dẫn đến tổng quát hoá số mũ, ví dụ các bài toán 1.1; 1.4

***Hướng thứ ba*** *:* Giữ nguyên số mũ và tăng số biến của các biến dẫn đến tổng quát hoá số biến, ví dụ các bài toán 1.5; 3.1; 6.3; 9.2; 10.3

***Hướng thứ tư*** : Tổng quát hoá cả về số mũ và số biến, ví dụ như các bài toán 4.2; 5.2; 5.4

***Hướng thứ năm*** *:* Đổi biến, đặc biệt hoá từ bài toán tổng quát, ví dụ như các bài toán 2.1; 4.1; 5.3; 6.2

Trên đây là các ví dụ vận dụng bđt **(*)** vào việc giải các bài toán đại số và một số phương hướng để khai thác một bài toán.

**Kết quả thu được sau khi khai thác bđt (1) là bđt :**

$$a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq \frac{\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2}{n} \text{ với } n \in N^* \quad \textbf{(1.1)}$$

Và bđt:

$$a_1^{2^n} + a_2^{2^n} + ... + a_{2^n}^{2^n} \geq \frac{\left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2^n}\right)^{2^n}}{\left(2^n\right)^{2^n - 1}} \text{ với } n \in N^* \quad \textbf{(1.2)}$$

Hoàn toàn tương tự như trên ( Chứng minh bằng quy nạp toán học )
ta cũng có kết quả khi khai thác bđt (2) như sau:

$$\frac{\left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2^n}\right)^{2^n}}{\left(2^n\right)^{2^n - 1}} \geq 2^n a_1 a_2 .. a_{2^n} \text{ với } n \in N^* \quad \textbf{(2.1)}$$

Từ bđt **(1.2)** và bđt **(2.1)** ta có bđt tổng quát của bđt **(*)** như sau:

$$a_1^{2^n} + a_2^{2^n} + \ldots + a_{2^n}^{2^n} \geq \frac{\left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2^n}\right)^{2^n}}{\left(2^n\right)^{2^n - 1}} \geq 2^n a_1 a_2 .. a_{2^n} \text{ với } n \in N^* \text{ (*.1)}$$

Như vậy khi làm xong một bài toán dù là bài toán dễ , người làm toán không nên thoả mãn ngay với lời giải của mình mà cần tiếp tục suy xét những vấn đề xung quanh bài toán, tìm ra các bài toán mới hay hơn, tổng quát hơn, sau đó đặc biệt hoá bài toán tổng quát để có được những bài toán độc đáo hơn, thú vị hơn. Điều đó làm cho người học toán ngày càng say mê bộ môn, đồng thời cũng là cách rèn luyện tư duy, nghiên cứu để chiếm lĩnh kho tàng tri thức của nhân loại.

# KHAI THÁC MỘT BẤT ĐẲNG THỨC 2

## 1. Lí thuyết:

1.1 Một vài BĐT thông dụng:

+ $A^2 \ge 0$.

+ Cho a, b không âm $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ .

+ Cho a, b dương $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$.

+ Với mọi a, b, c ta có $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$ .

1.2 Bất đẳng thức CBS: (*)

Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z ta luôn có

$$(x+y+z)\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right) \ge (a+b+c)^2 \qquad (I)$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này, thật vậy:

$$(x+y+z)\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right) = a^2+b^2+c^2+\frac{xb^2}{y}+\frac{xc^2}{z}+\frac{ya^2}{x}+\frac{yc^2}{z}+\frac{za^2}{x}+\frac{zb^2}{y}$$

$$= a^2+b^2+c^2+\left(\frac{xb^2}{y}+\frac{ya^2}{x}\right)+\left(\frac{yc^2}{z}+\frac{zb^2}{y}\right)+\left(\frac{xc^2}{z}+\frac{za^2}{x}\right) \ge a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$= (a+b+c)^2$$

Tuy nhiên cá nhân tôi vẫn thường hay sử dụng BĐT ( I ) dưới hình thức

$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \qquad (II)$$

Xét riêng các trường hợp:

+ Nếu $x = y = z = 1$ thì ( $I$ ) trở thành $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$. $(III)$

+ Nếu $a = b = c = 1$ thì ( $II$ ) trở thành $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z}$. $(IV)$

---

(*): Thực ra BĐT ($I$), ($II$) chỉ là hệ quả của BĐT: Cho $2n$ số thực $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$ khi đó $(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \ge (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$. Bất đẳng thức này được nhà toán học người Pháp ***Cauchy*** đề cập vào năm 1821, nhà toán học người Nga ***Buniakowski*** đề cập năm 1895, còn nhà toán học người Đức ***Schwartz*** đề cập năm 1884. Do cả ba nhà toán học độc lập nghiên cứu nên bất đẳng thức trên được mang tên ba nhà toán học ***Cauchy – Buniakowski – Schwartz.*** Trong sáng kiến kinh nghiệm này tôi tạm gọi là CBS (đôi khi một số sách gọi ***Cauchy – Schwart*** hoặc ta thường lầm gọi là ***Buniakowski***).

Sau đây là một vài bài toán minh học ứng dụng của CBS

**Ví dụ 1:** [BĐT Nesbit] Với a, b, c là các số dương ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

*Lời giải*

Đối với BĐT kinh điển này thì ta chỉ cần sử dụng trực tiếp ( $II$ ) và với để ý BĐT đơn giản $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

Khi đó ta có: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ab}+\frac{c^2}{ac+bc}$

$$\ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{2}.$$

Như vậy ta có được điều phải chứng minh.

**Ví dụ 2:** [Hungary 1996] Cho a, b > 0 thỏa mãn a + b = 1. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\ge\frac{1}{3}$$

*Lời giải*

Áp dụng ( *II* ), dễ dàng ta có: $\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1}\ge\frac{(a+b)^2}{a+b+1+1}=\frac{1}{3}.$

**Ví dụ 3:** [Romania 1997] Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1\ge\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}$$

*Lời giải*

Sử dụng ( *II* ) ta có:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+2bc+b^2+2ca+c^2+2ab}=1.$$

Mặt khác ta sử dụng hằng đẳng thức

$$\frac{bc}{a^2+2bc}+\frac{ca}{b^2+2ca}+\frac{ab}{c^2+2ab}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\right)$$

Như vậy bài toán đã được chứng minh xong.

**Ví dụ 4:** [Dự tuyển Olympic 30.04] Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Gọi $x,y,z$ lần lượt là khoảng cách từ M đến BC, AC, AB. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\le\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)2S}{abc}}.$$

*Lời giải:*

Với giả thiết bài toán thì $ax+by+cz=2S.$

Ta có:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\le(ax+by+cz)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{(ax+by+cz)(ab+bc+ca)}{abc}\le\frac{2S(a^2+b^2+c^2)}{abc}.$$

**Ví dụ 5:** [Vietnam 1996] Cho a, b, c > 0 thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=9$ .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}.$$

*Lời giải:*

Theo Cauchy, ta có: $\frac{a^5}{b^2}+\frac{a^5}{b^2}+\sqrt{3}b^2+\sqrt{3}b^2+3\sqrt{3}\ge 5\sqrt{3}a^2$. Xây dựng các BĐT tương tự ta nhận được $2P+2\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)+9\sqrt{3}\ge 5\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2)$

$\to P\ge 9\sqrt{3}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{3}$ .

Cách khác:

Theo ( *II* ) ta có: $\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2}\ge\frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{ab^2+bc^2+ca^2}.$

Lại có: $ab^2+bc^2+ca^2\le\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}\le\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{3}}=9\sqrt{3}.$

$\to P\ge\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)^2}{9\sqrt{3}}\ge\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{27\sqrt{3}}=9\sqrt{3}$

**Ví dụ 6:** [TSĐH KA 2005] Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$ .

*Lời giải*

Ta có $\frac{1}{2x+y+z}=\frac{1}{\left(x+y\right)+\left(x+z\right)}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)\le\frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Xây dựng hai bất đẳng thức tương tự ta được:

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}\right)=1.$$

**Ví dụ 7:** [THTT 2009] Cho a, b > 0 thỏa mãn $3a+b\le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

*Lời giải:*

Ta có: $S\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{a\left(1-3a\right)}}\ge\frac{1}{a}+\frac{2}{1-2a}\ge\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2}{a+1-2a}=8.$

Nên giá trị nhỏ nhất của S bằng 8 khi $a=b=\frac{1}{4}$.

**Ví dụ 8:** [THTT 2009] Cho a, b, c là các số thực không âm và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}}\ge 1.$$

*Lời giải:*

Ta có $\sqrt[3]{1.1\left(2b+a\right)}\le\frac{a+2b+2}{3}$, nên

$$VT\ge\sum\frac{3a}{a+2b+2}=3\sum\frac{a^2}{a^2+2ab+2a}\ge 3\frac{\left(a+b+c\right)^2}{\sum a^2+2\left(\sum ab\right)+2\left(\sum a\right)}=1$$

**Ví dụ 9:** [USAMO 2000] Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\le\frac{3}{4}.$$

*Lời giải:*

Không mất tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{c^2+a^2+2}\ge\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+2}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{\left(a+b\right)^2}{2\left(a^2+b^2+2\right)}+\sum\frac{\left(a-b\right)^2}{2\left(a^2+b^2+2\right)}\ge\frac{3}{2}$$

Áp dụng ( *II* ) ta có:

$$\sum \frac{(a+b)^2}{2(a^2+b^2+2)} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{4(a^2+b^2+c^2)+12} = \frac{2(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6}$$

$$\sum \frac{(a-b)^2}{2(a^2+b^2+2)} \geq \frac{\left[(a-b)+(b-c)+(a-c)\right]^2}{4(a^2+b^2+c^2)+12} = \frac{2(a-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6}$$

Từ đó ta nhận được: $VT \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)+2(a-c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+6}$. Bây giờ chỉ cần chứng minh:

$$2(a^2+b^2+c^2)+2(a-c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)+9 = 3(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2$$

Bằng cách khai triển, BĐT này tương đương với $2(a-b)(b-c) \geq 0$. Điều này hiển nhiên đúng, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1.$

**Ví dụ 10:** [Mathlink] Cho a, b, c dương. Chứng minh: $\sum \frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2} \leq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}.$

*Lời giải:*

Ta có: $\sum \frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2} = 6 - \sum \frac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}$. Do đó bài toán đưa về việc chứng minh:

$$\sum \frac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \geq 6$$

Áp dụng ( *II* ) ta có: $\sum \frac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)}$, nên ta cần chứng minh:

$$\frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)} + \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \geq 6.$$

Đặt $x = a^2+b^2+c^2,\ y = ab+bc+ca \Rightarrow x \geq y.$ Khi đó BĐT tương đương với:

$$\frac{4(x+2y)}{2x+y} + \frac{6x}{x+2y} \geq 6 \Leftrightarrow \frac{4(x+2y)}{2x+y} + \frac{4(2x+y)}{x+2y} \geq 8$$

Khẳng định cuối cùng hiển nhiên đúng theo AM – GM.

**Ví dụ 11:** [Balkan 2005] Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$ Chứng minh rằng:

$$a+b+c \geq \frac{3}{a+b+c} + \frac{2}{abc}.$$

*Lời giải:*

Ta có $a+b+c \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \geq 3.$

Từ đó: $(a+b+c)^2 = \frac{(a+b+c)^2}{3} + \frac{2(a+b+c)^2}{3} \geq 3 + \frac{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{3} \geq 3 + 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$

Từ đây ta có điều phải chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1.$

**Ví dụ 12:** Cho a, b, c dương thỏa mãn: $a+b+c=3.$ Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{3}{a^4+b^4+c^4}.$$

*Lời giải:*

Ta có: $\sum \frac{a^2}{a^2+ab+b^2} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca} = \frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}$.

Vì vậy BĐT cần chứng minh tương đương với: $3(a^4+b^4+c^4) \ge 2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca$.

Do $ab+bc+ca \le a^2+b^2+c^2$, nên ta chứng minh: $a^4+b^4+c^4 \ge a^2+b^2+c^2$

Lại vì $3(a^4+b^4+c^4) \ge (a^2+b^2+c^2)^2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{3}.(a^2+b^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$, nên dẫn đến phép hoàn thành phép chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

**Ví dụ 13:** Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+c)^2} \le \frac{1}{3}.$$

*Lời giải:*

Ta có: $\sum \frac{9a^2}{5a^2+(b+c)^2} = \sum \frac{(a+a+a)^2}{(a^2+b^2+c^2)+(2a^2+bc)+(2a^2+bc)}$

$$\le \sum \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+2\sum \frac{a^2}{2a^2+bc} = 1+2\left(\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ac}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\right) \quad (1)$$

Cũng lại theo ( *II* ):

$$\sum \frac{bc}{2a^2+bc} = \sum \frac{b^2c^2}{b^2c^2+2a^2bc} \ge \frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \sum\left(1-\frac{bc}{2a^2+bc}\right) \le 2 \Leftrightarrow \sum \frac{a^2}{2a^2+bc} \le 1 \quad (2)$$

Từ $(1)$, $(2)$ ta suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

**2. Bài tập áp dụng:**

Bài 1: Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{ab+1}+\frac{b+1}{bc+1}+\frac{c+1}{ac+1} \ge 3.$$

Bài 2: Cho a, b, c là các số thực không âm và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \ge 1.$$

Bài 3: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=\sqrt[3]{2}$. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{4a+1}+\frac{b^2}{4b+1}+\frac{c^2}{4c+1} \le \frac{1}{32(ab+bc+ca)}+\frac{7-2\sqrt[3]{2}}{16\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}}.$$

Bài 4: Cho $\begin{cases} \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \\ y \ge 1 \end{cases}$. Tìm GTNN của $P = x^2+y^2+\frac{x^2y^2}{\left[(4x-1)y-x\right]^2}$.

Bài 5: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng ;

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2} \le \frac{3}{4}.$$

Bài 6: Cho a, b, c dương thỏa mãn $ab+bc+ca \le abc$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+3 \le \sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right)$$

Bài 7: Cho a, b, c dương. Chứng minh: $\sum \frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2} \le \frac{6\left(a^2+b^2+c^2\right)}{\left(a+b+c\right)^2}$.

Bài 8: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a^5\left(b^2+c^2\right)^2}+\frac{1}{b^5\left(c^2+a^2\right)^2}+\frac{1}{c^5\left(a^2+b^2\right)^2} \ge \frac{81}{4}.$$

Bài 9: Cho a, b, c dương thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{2}$. Tìm GTLN của:

$$P=\sum \sqrt{\frac{\left(a+b\right)\left(b+c\right)}{b^2+ab+ac+bc+a+c}}$$

# SỬ DỤNG TIẾP TUYẾN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

## I. Cơ sở lí thuyết

### 1. Khái niệm về tính lồi, lõm của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.

a) Đồ thị của hàm số được gọi là lồi trên khoảng $(a;b)$ nếu tại mọi điểm $M(c;f(c)), c \in (a;b)$ tiếp tuyến của đồ thị hàm số nằm phía trên của đồ thị hàm số.

b) Đồ thị của hàm số được gọi là lõm trên khoảng $(a;b)$ nếu tại mọi điểm $M(c;f(c)), c \in (a;b)$ tiếp tuyến của đồ thị hàm số nằm phía dưới của đồ thị hàm số.

### 2. Dấu hiệu lồi, lõm của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên khoảng $(a;b)$.

a) Nếu $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì đồ thị của hàm số lồi trên khoảng $(a;b)$.

b) Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì đồ thị của hàm số lõm trên khoảng $(a;b)$.

### 3. Nhận xét

a) Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và có đồ thị lần lượt là (C) và (G). Khi đó

(C) nằm trên (G) $\Leftrightarrow f(x) \ge g(x), \forall x \in (a;b)$

b) Nếu đồ thị hàm số $y = f(x)$ lồi trên khoảng $(a;b)$ và $y = f'(c)(x-c) + f(c)$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(c;f(c)), c \in (a;b)$ thì

$f(x) \le f'(c)(x-c) + f(c), \forall x \in (a;b)$ (1)

c) Đối với đồ thị hàm số lõm ta có bất đẳng thức ngược lại.

Bất đẳng thức (1) cho phép ta đánh giá biểu thức $f(x)$ thông qua biểu thức bậc nhất. Hơn nữa, ta có thể chọn *c* sao cho dấu đẳng thức xảy ra theo đúng yêu cầu của bài toán.

## II. Bài tập áp dụng

**Bài 1 (BĐT Cô - si).** Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

**Chứng minh**. Nếu có một số $a_i = 0$ ($i$ = 1, 2, …, n) thì bđt là hiển nhiên. Bây giờ ta xét trường hợp $a_i > 0, \forall i \in \{1, 2, …, n\}$. Chia hai vế cho $a_1 + a_2 + ... + a_n$ ta được

$$\frac{1}{n} \ge \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} ... \frac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n}}$$

Đặt $x_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, i \in \{1, 2, ..., n\}$ thì $x_i > 0$ thoả mãn $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ và bđt trở thành $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \le \frac{1}{n}$ hay $\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n \le n \ln \frac{1}{n}$

Xét hàm số $y=f(x)=\ln x,\ x>0$. Ta có $f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0,\forall x>0$ suy ra đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(0;+\infty)$.

Tiếp tuyến của đths tại điểm $\left(\frac{1}{n};\ln\frac{1}{n}\right)$ có phương trình là $y=nx-1+\ln\frac{1}{n}$ suy ra

$$\ln x\le nx-1+\ln\frac{1}{n},\ \forall x\in(0;+\infty)\quad(1)$$

Áp dụng bđt (1) cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ và cộng vế lại ta được

$$\ln x_1+\ln x_2+\ldots+\ln x_n\le n(x_1+x_2+\ldots+x_n)-n+n\ln\frac{1}{n}$$

Kết hợp với $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$ ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1}{n}$ hay $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

**Bài 2 (BĐT Jenxen)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên khoảng $(a;b)$.

a) Nếu $f''(x)>0,\forall x\in(a;b)$ thì $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a;b)$ và $\forall\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in[0;1]$ thoả mãn $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ ta có
$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)\le\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n)\quad(1)$$

b) Nếu $f''(x)<0,\forall x\in(a;b)$ thì ta có bất đẳng thức ngược lại.

**Chứng minh**.

a) Đặt $\bar{x}=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$ thì $\bar{x}\in(a;b)$. Tiếp tuyến của đths $y=f(x)$ tại điểm $(\bar{x};f(\bar{x}))$ có phương trình là $y=f'(\bar{x})(x-\bar{x})+f(\bar{x})$.
Do $f''(x)>0,\forall x\in(a;b)$ nên đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(a;b)$. Bởi vậy tại điểm $(\bar{x};f(\bar{x}))$ tiếp tuyến nằm dưới đồ thị. Từ đó suy ra
$$f(x)\ge f'(\bar{x})(x-\bar{x})+f(\bar{x}),\forall x\in(a;b)$$

Thay $x=x_i$ ta được $f(x_i)\ge f'(\bar{x})(x_i-\bar{x})+f(\bar{x})$. Nhân hai vế với $\alpha_i\ge0$ ta được $\alpha_if(x_i)\ge\alpha_if'(\bar{x}).x_i-\alpha_if'(\bar{x}).\bar{x}+\alpha_if(\bar{x}),\forall i=1,2,\ldots,n$. Cộng vế $n$ BĐT ta được

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_if(x_i)\ge f'(\bar{x})\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i-f'(\bar{x}).\bar{x}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i+f(\bar{x})\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

Bởi $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i$ và $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ nên ta được $\sum_{i=1}^{n}\alpha_if(x_i)\ge f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i)$ đó là đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\cdots=x_n$

b) Chứng minh tương tự.

**Trường hợp đặc biệt**: Nếu $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=\frac{1}{n}$ thì BĐT (1) trở thành

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\ge f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

**Nhận xét**. Đây là cách chứng minh ngắn gọn và dễ hiểu nhất so với các cách chứng minh đã biết trong các tài liệu. Ngoài ra, dùng tiếp tuyến ta còn có thể giải được các bài toán mà BĐT Jenxen không giải quyết được.

**Bài 3 (BĐT Bécnuli).** Cho $x > -1$ và số thực $\alpha$. Chứng minh rằng

a) $(1+x)^\alpha \geq 1+\alpha x,\ \forall \alpha \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

b) $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x,\ \forall \alpha \in (0;1)$

**Chứng minh**. Xét hàm số $y = f(x) = (1+x)^\alpha$.

Ta có $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm (0 ; 1) có pt là $y = \alpha x + 1$.

Nếu $\alpha \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$ thì $f''(x) > 0, \forall x > -1$, do đó đths lõm trên khoảng $(-1;+\infty)$

Suy ra $(1+x)^\alpha \geq \alpha x + 1,\ \forall x > -1$.

Nếu $0 < \alpha < 1$ thì $f''(x) < 0, \forall x > -1$, do đó đths lồi trên khoảng $(-1;+\infty)$

Suy ra $(1+x)^\alpha \leq \alpha x + 1,\ \forall x > -1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ hoặc $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$

**Bài 4** (***ĐH 2003***) Cho các số dương *x*, *y* và *z* thoả mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$$

**Giải**. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}},\ x \in (0;1)$. Vì rằng đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ nên chúng ta xét đồ thị của hàm số $f(x)$ và tiếp tuyến của nó tại điểm $x = \frac{1}{3}$. Ta có $f'(x) = \frac{x^4-1}{x^3\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} \Rightarrow f'(\frac{1}{3}) = -\frac{80}{\sqrt{82}}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(\frac{1}{3};\frac{\sqrt{82}}{3}\right)$ là $y = -\frac{80}{\sqrt{82}}x + \frac{162}{3\sqrt{82}}$.

$f''(x) = \frac{\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^6}}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} > 0,\ \forall x > 0$ suy ra đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó tại điểm $\left(\frac{1}{3};\frac{\sqrt{82}}{3}\right)$ tiếp tuyến nằm phía dưới đồ thị, bởi vậy ta có

$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} \ge -\frac{80}{\sqrt{82}}x+\frac{162}{3\sqrt{82}}$, $\forall x>0$. Tương tự đối với $y$, $z$ và cộng lại ta được

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}} \ge -\frac{80}{\sqrt{82}}(x+y+z)+\frac{162}{\sqrt{82}} \ge \sqrt{82} \quad (\text{do} \quad x+y+z \le 1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

**Nhận xét**. Cái hay của kĩ thuật này ở chỗ:

- Thứ nhất, ta có thể đánh giá một biểu thức thông qua biểu thức bậc nhất.
- Thứ hai, ta có thể chọn vị trí của tiếp tuyến sao cho bất đẳng thức xảy ra dấu bằng

**Bài 5** (***India, 1995***) Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là $n$ số dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \ge \sqrt{\frac{n}{n-1}},\ n\in\mathbb{N}, n\ge 2$$

**Giải**. Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$, $x\in(0;1)$. Vì rằng đẳng thức xảy ra khi $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$ nên chúng ta xét đồ thị của hàm số $f(x)$ và tiếp tuyến của nó tại điểm $\left(\frac{1}{n};\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$. Ta có

$$f'(x)=\frac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{(2n-1)\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}.$$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(\frac{1}{n};\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$ có phương trình là

$$y=\frac{(2n-1)\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}x-\frac{1}{2(n-1)\sqrt{n(n-1)}}$$

$f''(x)=\frac{4-x}{4(1-x)^2\sqrt{1-x}}>0,\ \forall x\in(0;1)$ suy ra đồ thị hàm số lõm trên khoảng $(0;1)$ và do đó tiếp tuyến của nó tại điểm $\left(\frac{1}{n};\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\right)$ nằm phía dưới đồ thị. Bởi vậy ta có $\frac{x}{\sqrt{1-x}} \ge \frac{(2n-1)\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}x-\frac{1}{2(n-1)\sqrt{n(n-1)}}$, $\forall x\in(0;1)$. Áp dụng bất đẳng thức này cho $x_1,x_2,...,x_n$ và cộng vế lại ta được

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \ge \frac{(2n-1)\sqrt{n}}{2(n-1)\sqrt{n-1}}(x_1+\cdots+x_n)-\frac{n}{2(n-1)\sqrt{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$.

**Bài 6**. Chứng minh rằng, trong tam giác ABC, ta có

$$\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**Chứng minh**. Xét hàm số $f(x)=\sin x,\ x\in(0;\pi)$. Bất đẳng thức xảy ra dấu bằng khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ nên ta xét tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ta có

$f'(x)=\cos x\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ nên tiếp tuyến có phương trình là $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6}$.

$f''(x)=-\sin x<0,\ \forall x\in(0;\pi)$ nên đồ thị hàm số lồi trên khoảng $(0;\pi)$. Do vậy tại điểm $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tiếp tuyến nằm phía trên đồ thị, từ đó ta có

$\sin x\le\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{6},\ \forall x\in(0;\pi)$. Áp dụng bất đẳng thức này cho $A, B, C$ và cộng vế lại ta được

$$\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{1}{2}(A+B+C)+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

**Nhận xét**.

- Bằng cách này ta có thể chứng minh được các bất đẳng thức cơ bản cho các hàm số $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$.
- Các bất đẳng thức trên có thể được chứng minh dựa vào BĐT Jenxen. Tuy nhiên BĐT Jenxen không được đề cập đến trong chương trình toán học phổ thông (có thể vì sự chứng minh BĐT này khá phức tạp). Bây giờ, dùng tiếp tuyến ta sẽ chứng minh BĐT Jenxen một cách đơn giản.

**Bài 7**. Cho các số dương $a, b, c$ thoả mãn $4(a+b+c)-9=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\mathrm{S}=\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)^b\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)^c\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)^a$$

**Giải**.

Ta có $\ln\mathrm{S}=b\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)+c\ln\left(b+\sqrt{b^2+1}\right)+a\ln\left(c+\sqrt{c^2+1}\right)$

Xét hàm số $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ x>0$ (1). Do đặc thù của bài toán nên ta có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi $a=b=c=\dfrac{3}{4}$. Vì vậy ta sẽ so sánh vị trí của đồ thị với tiếp tuyến của nó tại điểm $(\dfrac{3}{4};\ln 2)$.

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow f'(\dfrac{3}{4})=\dfrac{4}{5}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) tại điểm $(\dfrac{3}{4};\ln 2)$ có phương trình $y=\dfrac{4}{5}x+\ln 2-\dfrac{3}{5}$.

Đạo hàm cấp hai $f''(x)=\dfrac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}<0,\ \forall x>0$ suy ra đồ thị hàm số (1) lồi trên khoảng $(0;+\infty)$. Do đó tại điểm $(\dfrac{3}{4};\ln 2)$ tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1) nằm phía trên đồ thị hàm số (1). Từ đó ta có $\ln(x+\sqrt{x^2+1})\le\dfrac{4}{5}x+\ln 2-\dfrac{3}{5},\ \forall x>0$. Áp dụng bất đẳng thức này cho số

dương $a$ ta được $\ln(a+\sqrt{a^2+1}) \le \frac{4}{5}a + \ln 2 - \frac{3}{5}$. Nhân hai vế với số b > 0 ta suy ra

$$b\ln(a+\sqrt{a^2+1}) \le \frac{4}{5}ab + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)b.$$

Tương tự ta có $c\ln(b+\sqrt{b^2+1}) \le \frac{4}{5}bc + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)c.$

$$a\ln(c+\sqrt{c^2+1}) \le \frac{4}{5}ca + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)a.$$

Cộng vế ba bất đẳng thức này ta được

$$\ln S \le \frac{4}{5}(ab+bc+ca) + \left(\ln 2 - \frac{3}{5}\right)(a+b+c).$$

Cuối cùng sử dụng bất đẳng thức $(ab+bc+ca) \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ và giả thiết $a+b+c = \frac{9}{4}$, rút gọn ta thu được $\ln S \le \frac{9}{4}\ln 2$. Từ đó $S \le 4\sqrt[4]{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{4}$. Vậy giá trị lớn nhất của S là $4\sqrt[4]{2}$.

**Nhận xét.** Đôi khi giả thiết lồi, lõm không được thoả mãn. Lúc đó ta sẽ so sánh vị trí của tiếp tuyến và đồ thị hàm số bằng chứng minh trực tiếp.

**Bài 8**. Chứng minh rằng, với mọi số thực dương *a*, *b*, *c* thoả mãn *a* + *b* + *c* = 3 ta có

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \ge 3.$$

Giải.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, x > 0$. Ta có $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ có phương trình là $y = -\frac{1}{2}x + 1$. $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$ suy ra đồ thị hàm số <u>không luôn luôn lõm</u> trên khoảng $(0;+\infty)$. Tuy nhiên ta vẫn có bất đẳng thức

$$\frac{1}{x^2+1} \ge -\frac{1}{2}x + 1, \forall x > 0 \quad (1)$$

(vì BĐT này tương đương với BĐT $x(x-1)^2 \ge 0$).

Áp dụng BĐT (1) cho số *b* > 0 ta được $\frac{1}{b^2+1} \ge -\frac{1}{2}b + 1$ (2). Vì $a+1 > 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \frac{a+1}{b^2+1} \ge \left(-\frac{1}{2}b+1\right)(a+1) \Leftrightarrow \frac{a+1}{b^2+1} \ge -\frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}b + a + 1.$$

Tương tự, cộng lại ta được

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \ge -\frac{1}{2}(ab+bc+ca) - \frac{1}{2}(b+c+a) + (a+b+c) + 3.$$

Cuối cùng sử dụng BĐT $(ab+bc+ca) \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ và giả thiết $a+b+c = 3$ ta thu được

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \ge 3$$

**Nhận xét.** Trong chứng minh các BĐT ở trên, giả thiết $a+b+c=k$ ($\geq k$ hay $\leq k$) là quan trọng. Do vậy, đối với các BĐT chưa cho sẵn giả thiết này mà có tính đẳng cấp, ta cũng có thể tự tạo ra các điều kiện của biến (chuẩn hoá) rồi sử dụng phương pháp trên.

**Bài 9** (***2003 USA Math Olympiad***)

Cho $a, b, c$ là những số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8$$

**Giải**. Đặt $x=\frac{a}{a+b+c}; y=\frac{b}{a+b+c}; z=\frac{c}{a+b+c}$. Khi đó $x, y, z$ là những số dương và thoả mãn $x+y+z=1$, và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}+\frac{(2y+z+x)^2}{2y^2+(z+x)^2}+\frac{(2z+x+y)^2}{2z^2+(x+y)^2}\leq 8$$

Hay

$$\frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}+\frac{(y+1)^2}{2y^2+(1-y)^2}+\frac{(z+1)^2}{2z^2+(1-z)^2}\leq 8$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}$, $x\in(0;1)$. Vì rằng đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$ nên ta xét tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$. Ta có $f'(x)=-4.\frac{2x^2+x-1}{(3x^2-2x+1)^2}$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm $\left(\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$ có phương trình là $y=4x+\frac{4}{3}$.

$f''(x)=12.\frac{4x^3+3x^2-6x+1}{(3x^2-2x+1)^3}$ đổi dấu hai lần trên khoảng $(0;1)$. Do đó đồ thị hàm số <u>không hoàn toàn lồi</u> trên khoảng $(0;1)$. Tuy nhiên ta vẫn có bất đẳng thức

$$\frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}\leq 4x+\frac{4}{3},\ \forall x\in(0;1)$$

(Vì BĐT này tương đương với $(3x-1)^2(4x+1)\geq 0$).

Tương tự ta có các BĐT đối với y và z, cộng vế lại và sử dụng $x+y+z=1$ ta thu được đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$, tức là $a=b=c$.

**Bài tập tự luyện**

1) Trong tam giác nhọn ABC, chứng minh rằng
   a) $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$
   b) $\tan A+\tan B+\tan C\geq 3\sqrt{3}$
   c) $\cot A+\cot B+\cot C\geq\sqrt{3}$
   d) $\frac{2}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)+\frac{1}{3}(\tan A+\tan B+\tan C)\geq 2\sqrt{3}$
2) Cho các số dương $a, b, c$ thoả mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

3) Cho các số dương $a, b$ thoả mãn $a+b \le \frac{2}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

4) (***1997 Japanese Math Olympiad***) Cho $a, b, c$ là những số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \ge \frac{3}{5}.$$

5) Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC và số $a \ge 2$ ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{\sin A}{a+\cos A} + \frac{\sin B}{a+\cos B} + \frac{\sin C}{a+\cos C} \le \frac{3\sqrt{3}}{2a+1}$$

# MỘT SỐ ĐỊNH HƯỚNG CƠ BẢN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

## 1. CƠ SỞ ĐỊNH HƯỚNG CƠ BẢN ĐỂ GIẢI MỘT PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Tiếp cận phương trình hàm, mỗi người có những cơ sở và phương pháp khác nhau. Tuy nhiên dựa vào đặc trưng của các hàm ta có thể xây dựng được 1 số định hướng cơ bản như sau:

1. Thế các giá trị biến phù hợp: Hầu hết các giá trị ban đầu có thể thế vào là: x = 0; x = 1 …; từ đó tìm ra 1 tính chất quan trọng nào đó hoặc các giá trị đặc biệt của hàm hoặc tìm cách chứng minh hàm số hằng.

2. Quy nạp toán học: Đây là phương pháp sử dụng giá trị f(x) và bằng cách quy nạp với n $\in$ N để tìm f(n). Sau đó tìm $f(\frac{1}{n})$ và f(e) với r hữu tỷ. Phương pháp này thường áp dụng trong bài toán mà ở đó hàm f đã được xác định trên Q $\Rightarrow$ từ đó mở rộng trên các tập số rộng hơn.

3. Nghiên cứu tính đơn ánh và toàn ánh của các hàm luỹ thừa trong phương trình. Chứng minh tính chất này không phức tạp nhưng điều đó lại cho ta một kết quả quan trọng để tìm được đáp số bài toán.

4. Tìm điểm cố định hoặc giá trị 0 của các hàm: Số lượng bài toán có sử dụng phương pháp này thường ít hơn số lượng bài áp dụng ba phương pháp nói trên. Tuy nhiên trong 1 số bài toán khó, việc tìm điểm cố định và giá trị 0 lại là điểm chốt quan trọng cho lời giải hoàn hảo.

5. Sử dụng PT Cauchy và kiểu Cauchy.

6. Nghiên cứu tính đơn điệu và tính liên tục của các hàm. Các tính chất này áp dụng trong phương trình Cauchy hoặc kiểu Cauchy. Các phương trình đó nếu không có tính chất đơn điệu, liên tục thì bài toán trở lên phức tạp hơn nhiều.

7. Dự đoán hàm và dùng phương pháp phản chứng để chứng minh điều dự đoán đúng.

8. Tạo nên các hệ thức truy hồi: Phương pháp này thường được sử dụng trong pt mà các hàm có tính chất bị chặn hoặc tìm được mối quan hệ giữa f(f(n)), f(n) và n … n $\in$N.

9. Miêu tả tính chất chẵn, lẻ của hàm số

Trên đây là một vài định hướng cơ bản khi giải PT hàm. Tuy nhiên để có được lời giải tối ưu, hãy thử giải bài toán bằng tất cả các phương pháp có thể …

## 2. PHƯƠNG TRÌNH CAUCHY VÀ KIỂU CAUCHY

Phương trình có đặc trưng f(x+y) = f(x) + f(y) $\forall$x, y $\in$R gọi là phương trình Cauchy.

Đặc điểm của lớp phương trình này: Nếu hàm f xác định trên Q, bằng phương pháp quy nạp toán học cho ta kết quả f(x) = xf(1), $\forall$x$\in$Q. Bài toán được mở rộng trên R cộng thêm các tính chất cho trước của hàm ta sẽ xác định được hàm f. Tuy nhiên với mỗi tính chất khác nhau sẽ cho ta các hàm khác nhau và do vậy lời giải bài toán cũng sẽ khác nhau. Các tính chất thường được cho trong bài toán là:

+) Đơn điệu trên một khoảng (đóng; mở) thực nào đó

+) Hàm liên tục

+) Hàm bị chặn trên các khoảng (đoạn)

+) Dương với các giá trị x $\geq$ 0

+) Đơn ánh, toàn ánh ….

Khi đó có thể giải được bài toán tổng quát: Tìm f : R $\rightarrow$ S

Tìm f(x + y) = f(x) + f(y)

Tuy nhiên, trong thực tế ta thường hay gặp các phương trình mà sau khi biến đổi giả thiết sẽ được phương trình Cauchy. Lớp phương trình đó gọi là phương trình kiểu Cauchy và có thể nêu ra 1 số đặc trưng sau.

1. f liên tục thỏa mãn f : R $\rightarrow$ (0; +$\infty$) và f(x+y) = f(x) f(y) là hàm có dạng f(x) = $a^x$. Khi đó f(x) = logf(x) liên tục và thỏa mãn phương trình Cauchy.

2. Mọi hàm liên tục f: (0; +$\infty$) $\rightarrow$ (0; +$\infty$) thoả mãn f(xy) = f(x) + f(y) cho ta hàm f(x) = $\log_a x \Rightarrow$ g(x) = f($a^x$) liên tục và thỏa mãn đặc trưng phương trình Cauchy.

3. Mọi hàm liên tục f: (0; +$\infty$) $\rightarrow$ (0; +$\infty$) thoả mãn f(xy) = f(x).f(y)

$\rightarrow$ f(x) = $x^t$ với $t = \log\frac{a}{b}$ và f(x) = b $\Rightarrow$ g(x) = log(f($a^x$)) là hàm liên tục và thỏa mãn phương trình Cauchy.

## 3. CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

Dưới đây sẽ đề cập đến một số bài toán có lời giải được sử dụng những định hướng cơ bản đã nêu trên.

**Bài toán 1**: Tìm hàm liên tục f : R --> R và t/m: $f(x)+f\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{3x}{5} \quad \forall x\in R\,(*)$

**Nhận xét:** Đây một lớp hàm liên tục đưa về xét giới hạn của dãy

**Lời giải**:

Đặt : $g(x)=\frac{2x}{3}$ và xét dãy { $x_n$ } với $x_1\in$R, $x_{n+1}$ = g($x_n$) thì

$$x_2=\frac{2}{3}x_1,\quad x_3=\frac{2}{3}x_2=\left(\frac{2}{3}\right)^2.x_1,\cdots,\quad x_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.x_1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}x_n=0$$

Lần lượt thay x = $x_1$, $x_2$, ...$x_n$ vào (*) ta được :

$$f(x_1)+f(x_2)=\frac{3}{5}x_1,\quad f(x_2)+f(x_3)=\frac{3}{5}x_2,\cdots,f(x_{n-1})+f(x_n)=\frac{3}{5}x_{n-1}.$$

Suy ra: $f(x_1)+(-1)^n f(x_n)=\frac{3}{5}[x_1-x_2+\cdots+(-1)^n x_{n-1}]=\frac{9}{25}x_1.\left[1+(-1)^n.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$ (**)

Do f(x) liên tục và f(0) = 0 nên lấy giới hạn hai vế (**) ta được :

$$f(x_1)=\frac{9}{25}x_1 \text{ hay : } f(x)=\frac{9}{25}x$$

Thử lại t/m bài toán.

**Bài toán 2**: Tìm hàm f(x) liên tục trên R và t/m: 2f(2x) = f(x) + x, (*) $\forall$x$\in$R

**Nhận xét:** Giống như bài toán 1 đây cũng là một lớp hàm liên tục dạng af(x) + bf(g(x)) = h(x) chuyển qua giới hạn của dãy. Đây là một trong những dạng toán thường gặp của phương trình hàm.

**Lời giải**:

Ta có (*) $\Leftrightarrow$ 2f(x) = f(x/2) + x/2 , (**) $\forall$x$\in$R.

Đặt g(x) = x/2 và xét dãy số {$x_n$ }với $x_1\in$R, $x_{n+1}$ = g($x_n$) thì

$$x_n=x_1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

Lần lượt thay x bởi $x_1$, $x_2$ , ... $x_n$ vào (**) ta được :

$$\begin{cases}2f(x_1)=f(x_2)+\frac{1}{2}x_1\\ 2f(x_2)=f(x_3)+\frac{1}{2}x_2=f(x_3)+\left(\frac{1}{2}\right)^2x_1\\ \cdots\\ 2f(x_{n-1})=f(x_n)+\frac{1}{2}x_{n-1}=f(x_n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.x_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x_1)=\frac{1}{2}f(x_2)+x_1.\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ f(x_2)=\frac{1}{2}f(x_3)+x_1.\left(\frac{1}{2}\right)^3\\ \cdots\\ f(x_{n-1})=\frac{1}{2}f(x_n)+x_1.\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{cases}$$

Suy ra : $f(x_1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.f(x_n)+x_1.\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.f(x_n)+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}}{3}.x_1$

Lấy giới hạn 2 vế và do f(x) liên tục nên ta được :

$$f(x_1) = 0.f(0) + \frac{1-0}{3}x_1 = \frac{x_1}{3} \quad \text{hay} \quad : \ f(x) = x/3.$$

Thử lại t/m bài toán.

*Sau đây ta xét một số bài toán về lớp hàm đưa về phương trình hàm Cauchy.*
*Đây là một trong những dạng quen thuộc và quan trọng nhất về phương trình hàm, đầu tiên ta xét một bài toán trong đề thi HSGQG năm 1999*

**Bài toán 3**: (QG-1999). Cho hàm số f(x) liên tục trên R và t/m

1) f(0) = f(1) = 0.

2) $2f(x) + f(y) = 3f\left(\frac{2x+y}{3}\right) \quad \forall x, y \in R$

**Lời giải**:

+ Từ 2) cho x = 0 ta được : $f\left(\frac{y}{3}\right) = \frac{1}{3}f(y), \forall y \in [0,1]$

+Cho y = 0 $\Rightarrow 2f(x) = 3f\left(\frac{2x}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{2}{3}x$

Khi đó 2) $\Leftrightarrow \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) = f\left(\frac{2x}{3} + \frac{y}{3}\right), \quad \forall x, y \in [0,1]$

Hay f(x+y) = f(x) + f(y), $\forall x,y \in [0,1]$

Do đó f(x) = ax với a = f(1) = 0. Vậy f(x) = 0 , $\forall x \in [0,1]$

**Bài toán 4**: Tìm hàm f(x) liên tục trên R và t/m:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x) + f(y)], \quad \forall x, y \in R \qquad (1)$$

**Lời giải**:

Đặt g(x) = f(x) - f(0) thì g(0) = 0 . Trong (1) cho y = 0, ta được

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) - f(0) = \frac{f(x)-f(0)}{2} \Leftrightarrow g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}g(x) \quad \forall x \in R$$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) = \frac{1}{2}[f(x) - f(0) + f(y) - f(0)]$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[g(x) + g(y)] \Leftrightarrow g\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow g(x+y) = g(x) + g(y) \forall x, y \in R$$

Do đó g(x) = ax, f(x) = g(x) +g(0) = ax + b, với b = f(0) và a = f(1) - f(0).

**Bài toán 5**: Tìm hàm f(x) liên tục trên R và t/m

f(x) + f(y) - f(x+y) = xy. (1) $\forall x,y \in$ R.

**Lời giải**:

Từ (1) cho x = 0 $\Rightarrow$ f(0) = 0.

Cho y = - x $\Rightarrow$ f(x) + f(-x) + $x^2$ = 0 $\forall x \in$ R.

Đặt g(x) = f(x) + $x^2/2$ $\Rightarrow$ f(x) = g(x) - $x^2/2$.

Khi đó (1) g(x) + g(y) = g(x+y) $\forall x,y \in$ R $\Rightarrow$ g(x) = ax

Do đó f(x) = ax - $x^2/2$. Thử lại t/m (1).

**Bài toán 6**: Tìm hàm f(x) liên tục trên R, t/m: f(0) = 1, f(1) = 2002 và

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = \frac{1}{3}[f(x) + f(y) + f(z)] \quad \forall x, y, z \in R$$

**Lời giải**:

Đặt : $z = \frac{x+y}{2}$ Thì từ gt suy ra : $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$

Do đó theo bài toán 3 suy ra f(x) = ax + b.

Vì f(0) = 1, f(1) = 2002 suy ra f(x) = 2001x + 1.

**Bài toán 7**: Tìm hàm f(x) liên tục trên R và t/m:

$$f\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right) = \frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}f(y), \quad \forall x,y \in R \quad (*)$$

**Lời giải**:

Đặt : g(x) = f(x) - f(0) , thì g(0) = 0.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow g\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right) = \frac{1}{3}g(x)+\frac{2}{3}g(y), \quad \forall x,y \in R \quad (**)$

Từ (**) cho y = 0 ta được : $g\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{3}g(x), \quad \forall x \in R$

cho x = 0 ta được : $g\left(\frac{2y}{3}\right) = \frac{2}{3}g(y), \quad \forall y \in R$

Do đó (**) $\Leftrightarrow g\left(\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}\right) = g\left(\frac{x}{3}\right)+g\left(\frac{2y}{3}\right), \quad \forall x,y \in R$

Hay g(x+y) = g(x) + g(y), $\forall$x,y$\in$R, nên theo bài toán 1 thì g(x) = ax

Do đó f(x) = ax + b. Thử lại t/m đề bài.

**Bài toán 8**: Cho hàm g(x) xác định trên R và t/m:

g(x) + g(y) = g(x+y) - xy - 1, (*) $\forall$x,y$\in$R và g(1) = 1

Tìm tất cả số nguyên n $\neq$ 1 sao cho g(n) = n.

**Lời giải**:

Từ (*) suy ra: g(0) = - 1, $g(x) + g(-x) = x^2 - 2$,

Hay $g(x) + 1 - x^2/2 + g(-x) + 1 - (-x)^2/2 = 0$.

Đặt $f(x) = g(x) + 1 - x^2/2$ thì f(1) = 3/2, f(0) = 0.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow$ f(x) + f(y) = f(x+y) , $\forall$x,y$\in$R.

Từ đó f(nx) = nf(x), $\forall$ n$\in$Z, x$\in$R. Suy ra f(n) = nf(1) = 3n/2.

Vậy $g(n) = f(n) + n^2/2 - 1 = (n^2 + 3n - 2)/2$.

$g(n) = n \Leftrightarrow n^2 + n - 2 = 0 \Leftrightarrow n = 1, n = -2$.

Vì n $\neq$ 1 nên n = -2.

**Bài toán 9**: Tìm tất cả các hàm f: Q $\rightarrow$ Q tìm $\begin{cases} f(x) = 2 \\ f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \end{cases}$ (1)

**Nhận xét:** Đây là 1 lớp ví dụ sử dụng phương pháp quy nạp toán học

**Lời giải**:

Cho x = 1 và y = n trong (1) $\Leftrightarrow$ ta có:

f(n) = 2 f(n) – f(n+1) + 1 $\Leftrightarrow$ f(n+1) = f(n) + 1 $\forall$n$\in$N

$\Rightarrow$ f(n) = n + 1 $\forall$n $\in$N

+) Cho x = 0 và y = n $\Rightarrow$ f(0) = f(0) (n + 1) – f(n) + 1

$\Rightarrow$ f(0) = f(0) (n + 1) – n - 1 + 1

$\Rightarrow$ nf(0) = n $\forall$ n $\in$N

$\Rightarrow$ f(0) = 1

+) Với mỗi z $\in$ Z , cho x = -1 và y = 1 trong (1) có f(-1) = 0

+) Cho x = -1 và y = n $\Rightarrow$ f(-n) = -f(n-1) + 1 = -n + 1

$\Rightarrow f(z) = z + 1$ với mỗi $z \in Z$

+) Cho $x = n,\ y = \frac{1}{n}$ ta có $f(1) = (n + 1)\, f(\frac{1}{n}) - f(n + \frac{1}{n}) + 1$ (2)

Hơn nữa: Cho $x = 1$ và $y = m + \frac{1}{n} \Rightarrow f(m + 1 + \frac{1}{n}) = f(m + \frac{1}{n}) + 1$

Theo phương pháp quy nạp $\Rightarrow f(m + \frac{1}{n}) = m + f(\frac{1}{n})$. Từ (2) ta có

$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + 1 \qquad \forall n \in N^*$.

Mặt khác: Cho $x = m$ và $y = \frac{1}{n}$ ta có: $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} + 1$

$\Rightarrow f(r) = r + 1 \qquad \forall r \in Q^+$

+) Cho $x = -1$ và $y = r$ ta có $f(-r) = -f(r-1) = -f(r-1) + 1 = -r + 1$

$\Rightarrow f(x) = x + 1$ với mỗi $x \in Q$

**Thử lại:** Từ $xy + 1 = (x + 1)(y + 1) - (x + y + 1) + 1$

$\forall x, y \in Q \quad \Rightarrow f(x) = x + 1$ là hàm số cần tìm

**Bài toán 10**: (Belarus 1997)

Tìm tất cả các hàm g: $R \to R$ sao cho với mỗi số thực x và y ta có:

$g(x + y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$.

**Lời giải**:

+) $g(x) \equiv 0$ và $g(x) \equiv 2$ thỏa mãn bài ra.

+) Giả sử g(x) khác hằng số.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $g(x) = x, \forall x \in Q$.

Để chứng minh $g(r + x) = r + g(x)$ và $g(rx) = rg(x)$ với $r \in Q$ và $x \in R$.

Từ (2) cho $r = -1 \Rightarrow g(-x) = -g(x) \qquad \forall x \in R \Rightarrow g(x)$ là hàm số lẻ.

Cho $y = -x$ vào giả thiết $\Rightarrow g^2(x) = g(x^2) \Rightarrow g(x) \geq 0\ \forall x > 0$

+) Giả sử $g(x) < x\ \forall x \in R$. Chọn $r \in Q$ sao cho $g(x) < r < x$

$\Rightarrow r > g(x) = g(x - r) + r \geq r \Rightarrow$ Vô lý

Tương tự: Giả sử $g(x > x\ \forall \in R \Rightarrow$ Vô lý.

$\Rightarrow g(x) = x\ \forall x \in R$. Thử lại thỏa mãn

Vậy $g(x) \equiv 0$; $g(x) \equiv 2$ và $g(x) = x$ thỏa mãn.

**Bài toán 11**: (BMO 2000) Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn:

$f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x) \quad \forall x, y \in R \qquad (1)$

**Nhận xét**: Đây là lớp bài chứng minh hàm số là hàm đơn ánh; toàn ánh -> sử dụng các tính chất của lớp hàm đó để khai thác bài toán.

**Lời giải**:

+ Cho $x = 0$ ; $y \in R$ => $f(f(y) = y + f^2(0)$ => dễ chứng minh được f là toàn ánh. Mặt khác f đơn ánh => $\exists$ t sao cho $f(t) = 0$ => cho $x = 0$ và $y = t$ ta có $f(0) = t + f^2(0)$.

+ Cho $x = t$ => $f(f(y) = y$ với $\forall y \in R$

=> $t = f(f(t)) = f(0) = t + f^2(0)$ => $f(0) = 0$

Thay f(x) trong giả thiết (1) ta có $f(f(x)\, x + f(y) = y + x^2 \quad \forall x, y \in R$

=> $f^2(x) = x^2\ \forall x \in R$ => $\left[\begin{array}{l} f(x) = x \quad \forall x \in R \\ f(x) = -x \quad \forall x \in R \end{array}\right.$

Xét trường hợp 1: $f(1) = -1$ cho $x = 1$ trong (1) => $f(1 + f(y)) = 1 + y$

=> $(1 + y)^2 = f^2(1 + f(y)) = (1 + f(y))^2 = 1 + 2f(y) + y^2$

=> $f(y) = y \quad \forall y \in R$

Xét trường hợp 2: f(1) = 1 cho x = -1 trong (1) => f(-1 + f(y)) = 1 + y

=> $(1 + y)^2 = f^2(-1 + f(y)) = (-1 + f(y))^2 = 1 - 2f(y) + y^2$

=> f(y) = - y $\quad \forall$ y $\in$ R

Vậy f(x) = x và f(x) = -x, $\forall$ x; y $\in$ R

**Bài toán 12:** (IMO 1979): Cho hàm f: R $\rightarrow$ R, nếu hai số thực bất kỳ x, y thỏa mãn f (xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y). CMR: f(x + y) = f(x) + f(y) $\forall$ x; y $\in$ R

**Nhận xét:** Sử dụng việc lựa chọn các giá trị biến phù hợp để thay vào đẳng thức hàm cần thỏa mãn.

**Lời giải**:

Giả thiết f(xy + x + y) = f (xy) + f(x) + f(y) (1) $\quad \forall$ (x,y) $\in$ R

+ Cho x = y = 0 (1) => f(0) = 0

+ Trong (1) cho y = -1 => f(x) = -f(-x); thay y = 1

=> f(2x + 1) = 2f(x) + f(1)

=> f (2(u + v + uv) + 1) = 2f (u + v + uv) + f(1) = 2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + f(1)

$\forall$ u, v $\in$ R:

Mặt khác: Thay x = u và y = 2v + 1 trong (1) ta có:

f(2(u+ v + uv) + 1) = f(u + (2v + 1) + u(2v+1))

= f(u) + 2f(v) + f(1) + f (2uv + u)

Suy ra: 2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + f(1) = f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv + u)

=> f(2uv + u) = 2f(uv) + f(u) (2)

Trong (2) cho $v = -\frac{1}{2}$ => $0 = 2f\left(-\frac{u}{2}\right) + f(u) = -2f\left(\frac{u}{2}\right) + f(u)$

Do đó $f(u) = 2f\left(\frac{u}{2}\right)$ -> f(2x) = 2f(x) $\forall$x $\in$R

Trong (2) suy ra f(2uv + u) = f(2uv) + f(u) $\quad \forall$ u, v $\forall \in$R

Đặt u = y và x = 2uv => f(x+ y) = f(x) + f(y) $\quad \forall$ x, y $\in R^*$

Mặt khác: f(0) = 0 => f(x + y) = f(x) = f(x) + f(y) $\forall$ x, y $\in$ R (đpcm)

**Bài toán 13:** Tìm tất cả các hàm f: (0; + $\infty$) $\rightarrow$ (0; +$\infty$) thoả mãn

f(f(x) + y) = xf(1 + xy) $\forall$ x, y $\in$ (0; +$\infty$)

**Lời giải**:

+ Hiển nhiên f(x) = $\frac{1}{x}$ là hàm thỏa mãn bài ra, ta sẽ chứng minh hàm f thỏa mãn đk bài ra là hàm không tăng trên (0; +$\infty$) bằng phương pháp phản chứng.

Thật vậy: giả sử với 0 < x < y ta có 0 < f(x) < f(y)

Giả sử: $z = \frac{yf(y) - xf(x)}{y - x} > f(y)$

Thay x = x và y bởi z – f(y) vào giả thiết và y bởi z – f(x)

=> x = y vô lý. Vậy f là hàm không tăng.

+ Ta chứng minh f(1) = 1. Thật vậy giả sử f(1) $\neq$ 1. Cho x = 1 vào giả thiết ta có f(f(1) + y) = f(1+y) -> $f(u + |f(1) - 1|) = f(u)$ với u > 1

=> f(x) là hàm tuần hoàn trên (1; +$\infty$). Do f đơn điệu tuần hoàn => f là hàm hằng. Hơn nữa theo giả thiết => Vế trái là hằng, vế phải không là hằng => vô lý. Vậy f(1) = 1.

+ Ta sẽ chứng minh f(x) = $\frac{1}{x}$ với x > 1. Cho y = $1 - \frac{1}{x}$ => $f(f(x) - \frac{1}{x} + 1) = x f(x)$

Giả sử f(x) > $\frac{1}{x}$ => f(f(x) - $\frac{1}{x}$+1) $\leq$ f(1) và xf(x) > 1 -> vô lý

Nếu $f(x) < \frac{1}{x}$ -> $f(f(x) - \frac{1}{x}+1) \geq f(1) = 1$ và $xf(x) < 1$

=> Vô lý => $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x > 1$

+ Nếu $x < 1$, đặt $y = \frac{1}{x}$ => $f(f(x) + \frac{1}{x}) = xf(2) = \frac{x}{2}$

Do $\frac{1}{x} \geq 1$ => $f(x) + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} => f(x) = \frac{1}{x}$ $x < 1$

Vậy $f(x) = \frac{1}{x}$ $\forall x \in (0; +\infty)$

**Bài toán 14:** Tìm tất cả các hàm $f: [1; +\infty) \to [1; +\infty)$ thỏa mãn

i) $f(x) \leq 2(1+x)$ $\forall x \in [1; +\infty)$

u) $xf(x+1) = f^2(x) - 1$ $\forall x \in [1; +\infty)$

**Nhận xét:** Dựa vào điều kiện hàm f cần tìm => dùng phương pháp dự đoán hàm và chứng minh bằng phương pháp sử dụng tính chất hàm bị chặn tính chất đối lập.

**Lời giải**:

Dễ thấy $f(x) = x + 1$ thỏa mãn bài ra. Ta sẽ chứng minh $f(x) = x + 1$ là hàm duy nhất.

Thật vậy: Từ giả thiết -> $f^2(x) = xf(x+1) + 1 \leq x(2(x+2) + 1 < 2(x+1)^2$

=> $f(x) < \sqrt{2}(x + 1)$ $\forall x \in [1; +\infty)$ => $f(x)$ bị chặn trên. Tương tự như trên có $f^2(x) < 2^{1/4}(1 + x)^2$

Quy nạp => $f(x) < 2^{\frac{1}{2^k}}(1+x)$ $\forall k \in N$

Cho $2^{\frac{1}{2^k}} \to 1$ khi $k \to +\infty$. Cố định x => $f(x) \leq x + 1$ $\forall x \geq 1$.

Ta cần chứng minh $f(x) \geq x + 1$ $\forall x \geq 1$

Thật vậy: Xét $\frac{f^2(x)-1}{x} = f(x+1) \geq 1 => f(x) \geq \sqrt{x+1} > x^{1/2}$

Hơn nữa $f^2(x) = 1 + xf(x+1) > 1 + x\sqrt{x+2} > x^{3/2}$ và quy nạp

$f(x) > x^{1-\frac{1}{2^k}}$ => chuyển qua giới hạn -> $f(x) \geq x$

Sử dụng giả thiết => $f^2(x) = 1 + xf(x+1) \geq (x+\frac{1}{2})^2$ => $f(x) \geq x + \frac{1}{2}$

Quy nạp => $f(x) \geq x + 1 - \frac{1}{2^k}$ => $f(x) \geq x + 1$ $\forall x \geq 1$

Vậy $f(x) = x + 1$ (đpcm).

**Bài toán 15**: Tìm $f: N^* \to N^*$ thỏa mãn

$(f(n) + m) = n + f(m + 2007)$ $\forall m, n \in N^*$ (1)

**Nhận xét**: Bài toán này giải quyết bằng phương pháp sử dụng các tính chất của ánh xạ (đơn ánh).

**Lời giải**:

Trước hết ta chứng minh f đơn ánh.

Thật vậy: Giả sử $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow f(f(n_1) + 1) = f(f(n_2) + 1)$

$\Rightarrow n_1 + f(1 + 2007) = n_2 + f(1 + 2007) \Rightarrow n_1 = n_2 \to$ f đơn ánh

Mặt ≠: Từ (1) $\Rightarrow \forall m, n \in N^*$ ta có

$f(f(n)) + f(1) = n + f(f(1) + 2007)$

$\Rightarrow f(f(n) + f(1)) = n + 1 + f(2007 + 2007) = f(f(n + 1) + 2007)$

Do f đơn ánh nên ta có: $f(n) + f(1) = f(n+1) + 2007$

$\to f(n+1) - f(n) = f(1) - 2007$. Đặt $f(1) - 2007 = a \in N^*$

Khi đó $f(n) = n.a + 2007 \Rightarrow a^2n = n \quad \forall n \in N^*$

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ (vì $a \in N^*$) $\Rightarrow f(n) = n + 2007$

***Thử lại***: $f(n) = n + 2007$ (thỏa mãn)

**Bài toán 16**: (VMO-2009). Tìm f: $R \to R$ liên tục thỏa mãn:

$$f(x-y)f(y-z)f(z-x) + 8 = 0 \ \forall x, y, z \in R \qquad (1)$$

**Nhận xét**: Dùng phương trình hàm Cauchy và khai thác tính chất liên tục của hàm.

**Lời giải**:

+) Cho $x = t$; $z = -t$ và $y = 6$ ta có:

$f^2(t)f(-2t) = -8 \Rightarrow f(-2t) = \dfrac{-8}{f^2(t)} < 0 \Rightarrow f(t) < 0 \ \forall t \in R$

Đặt $g(x) = \ln\left(\dfrac{f(x)}{-2}\right) \Rightarrow f(x) = -2e^{g(x)}$. Thay vào (1) ta có

$-8e^{g(x-y) + g(y-z) + g(z-x)} = -8 \Rightarrow g(x-y) + g(y-z) + g(z-x) = 0 \qquad (*)$

+) Trong (*) cho $x = y = z = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Cho $y = z = 0$, $x \in R \Rightarrow g(x) = g(-x) \quad \forall x \in R$

Suy ra $g(x-y) + g(y-z) = -g(z-x) = g(x-y + y-z)$

$\Rightarrow g(t+t') = g(t) + g(t') \ \forall t, t' \in R$

Do f liên tục suy ra g liên tục và thỏa mãn đặc trưng hàm Cauchy.

$\Rightarrow g(x) = ax \Rightarrow g(x) = -2e^{ax} = -2b^x$ với $b = e^a > 0$

***Thử lại***: Thỏa mãn

Để kết thúc xin các bạn làm một số bài tập sau, hi vọng thầy cô và các em học sinh tìm tòi, sáng tạo ra những lời giải hay, độc đáo.

**Bài 1**: Tìm tất cả các hàm f: $Z^+ \to Z^+$

i) $f(0) = 1$

ii) $f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n \ \forall n \in Z^*$

**Bài 2**: Cho $n \in N$, tìm các hàm f đơn điệu, $f : R \to R$ thỏa mãn

$f(x + f(y)) = f(x) + y^n$

**Bài 3**: (BMO - 2003) Tìm $f : Q \to R$ tìm.

i) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy \quad \forall x, y \in Q$

ii) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x \ \forall x \in Q$

iii) $f(1) + 1 > 0$

**Bài 4**: (VMO - 2005).

Tìm tất cả các giá trị $\alpha$ sao cho tồn tại duy nhất hàm $f : R \to R$ thỏa mãn.

$$f(x^2 + y + f(y)) = f^2(x) + \alpha y$$

**Bài 5**: Tìm $f : N^* \to N^*$ thỏa mãn.

i) $2f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n)$

ii) Nếu $m \geq n$ thì $f(m^2) \geq f(n^2)$

# KĨ THUẬT GIẢM BIẾN TRONG BÀI TOÁN TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

**1.1 Định nghĩa.** Giả sử hàm số $f$ xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{R}$.

**a)** Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \le f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $M = f(x_0)$ được gọi là *giá trị lớn nhất* của hàm số $f$ trên $D$, kí hiệu là $M = \max_{x \in D} f(x)$.

**b)** Nếu tồn tại một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x) \ge f(x_0)$ với mọi $x \in D$ thì số $m = f(x_0)$ được gọi là *giá trị nhỏ nhất* của hàm số $f$ trên $D$, kí hiệu là $m = \min_{x \in D} f(x)$.

**1.2 Nhận xét.** Như vậy, muốn chứng tỏ rằng số $M$ (hoặc $m$) là giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của hàm số $f$ trên tập hợp $D$ cần chỉ rõ :

**a)** $f(x) \le M$ (hoặc $f(x) \ge m$) với mọi $x \in D$ ;

**b)** Tồn tại ít nhất một điểm $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$ (hoặc $f(x_0) = m$).

**1.3 Nhận xét.** Người ta đã chứng minh được rằng hàm số liên tục trên một đoạn thì đạt được giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên đoạn đó.

Trong nhiều trường hợp, có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn mà không cần lập bảng biến thiên của nó.

Quy tắc tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm $f$ trên đoạn $[a;b]$ như sau :

1. Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f$ có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
2. Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.
3. So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của $f$ trên đoạn $[a;b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của $f$ trên đoạn $[a;b]$.

**2.1 Ví dụ đơn gian (một biến):**

Trong mục này chúng tôi trình bày một số ví dụ tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

**Thí dụ 1 ( Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)**

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$

*Lời giải.* Tập xác định $D = [-2;2]$, $f'(x) = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Bảng biến thiên

| $t$ | $-2$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $-2$ | ↗ | $2\sqrt{2}$ | ↘ | $2$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{x \in [-2;2]} f(x) = f(-2) = -2$ và $\max_{x \in [-2;2]} f(x) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

**Thí dụ 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$

*Lời giải.* Ta có $y' = \dfrac{2\ln x . \dfrac{1}{x} . x - \ln^2 x}{x^2} = \dfrac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$

Từ đó có bảng biến thiên :

| $x$ | $1$ | | $e^2$ | | $e^3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $0$ | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ | $\frac{9}{e^3}$ |

Vậy $\max\limits_{[1;e^3]} y = y\left(e^2\right) = \frac{4}{e^2} \Leftrightarrow x = e^2$ và $\min\limits_{[1;e^3]} y = y\left(1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

**2.2 Bài tập hàm một biến**

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

1) $f\left(x\right) = \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$

2) $f\left(x\right) = 5\cos x - \cos 5x$ với $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

3) $f\left(x\right) = \frac{2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 3}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + 1}$

*Hướng dẫn.* Đặt $t = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}$ , với $\sqrt{2} \le t \le 2$.

**3.1 Dồn về một biến :**

Trong phần này tôi trình bày một số dạng bài toán tìm GTNN, GTLN của biểu thức chứa hai biến bằng cách thế một biến qua biến còn lại. Từ đó xét hàm số và tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

**Thí dụ 1.** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$$

*Lời giải.* Từ giả thiết $x + y = \frac{5}{4}$ ta có $y = \frac{5}{4} - x$. Khi đó $P = \frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x}$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = \frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x}$ với $x \in \left(0;\frac{5}{4}\right)$. Ta có $f'\left(x\right) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{\left(5-4x\right)^2}$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\frac{5}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(x\right)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f\left(x\right)$ | $+\infty$ | ↘ | $5$ | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x\in\left(0;\frac{5}{4}\right)} f\left(x\right) = f\left(1\right) = 5$. Do đó $\min P = 5$ đạt được khi $x = 1, y = \frac{1}{4}$.

**Thí dụ 2.** Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $y \le 0, x^2 + x = y + 12$.
Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy + x + 2y + 17$.

*Lời giải.* Từ giả thiết $y \le 0, x^2 + x = y + 12$ ta có $y = x^2 + x - 12$ và $x^2 + x - 12 \le 0$ hay $-4 \le x \le 3$. Khi đó $P = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$. Xét hàm số $f\left(x\right) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7, x \in \left[-4;3\right]$.

Ta có $f'\left(x\right) = 3\left(x^2 + 2x - 3\right)$.

Ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-4$ | | $-3$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-13$ | ↗ | $20$ | ↘ | $-12$ | ↗ | $20$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{x\in[-4;3]} f(x)=f(1)=-12$, $\max\limits_{x\in[-4;3]} f(x)=f(-3)=f(3)=20$.

Do đó $\min P=-12$ đạt được khi $x=1,y=-10$ và $\max P=20$ đạt được khi $x=-3,y=-6$ hoặc $x=3,u=0$.

**Thí dụ 3.** Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}$$

*Lời giải.* Từ giả thiết $x,y>0, x+y=1$ ta có $y=1-x, 0<x<1$.

Khi đó ta có $P=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$, $f'(x)=\dfrac{2-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}-\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\sqrt{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $\min P=\min\limits_{x\in(0;1)} f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$ đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

**Nhận xét.** Qua ba thí dụ này cho ta một kỹ thuật giảm biến khi tìm GTNN, GTLN của biểu thức hai biến bằng cách thế một biến qua biến còn lại và sử dụng các giả thiết để đánh giá biến còn lại. Từ đó tìm GTNN, GTLN của hàm số chứa một biến bị chặn.

**3.2 Bài tập dồn về một biến**

**1/** Cho $x,y\in[-3;2]$ thỏa mãn $x^3+y^3=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

**2/** Cho $x,y\geq 0$ thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}$

**3/** Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$

**4/** Cho $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+3(x^2-y^2)+3(x+y)$

5/ Cho $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $0<a,b\leq 4$, $a+b\leq 7$ và $2\leq x\leq 3\leq y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x^2+y^2+2x+y}{xy(a^2+b^2)}$. *Hướng dẫn*. Tìm giá trị lớn nhất của $Q=a^2+b^2$ là $M$, xét hàm số $g(y)=f(x,y)=\dfrac{2x^2+y^2+2x+y}{xy.M}$ với ẩn $y$ và $x$ là tham số,

tìm giá trị nhỏ nhất của $g(y)$ là $h(x)$. Sau đó tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)$ với $x \in [2;3]$.

6/ Cho $x,y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^3 \le y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 8x + 16$.

*Hướng dẫn*. Nếu $x > 0$ thì $x^6 \le y^2$ từ đó xét hàm số $f(x) = x^6 + x^2 - 8x + 16$. Nếu $x \le 0$ thì $x^2 + y^2 - 8x + 16 \ge 16$ với mọi $x \le 0, x^3 \le y$.

7/ Cho $x,y \in (0;1)$ thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^x + y^y$.

*Hướng dẫn.* Xét hàm số $f(x) = x^x, x \in (0;1)$. Chứng minh $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} \ge f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$. Ta có $P = x^x + (1-x)^{1-x} = f(x) + f(1-x) \ge 2f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}$.

8/ Cho $x,y > 0$ thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng $xy \le x^x y^y$.

**4.1 Biểu thức có tính chất đối xứng:**

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm GTNN, GTLN của biểu thức chứa hai biến mà giả thiết hoặc biểu thức đó thể hiện tính đối xứng. Từ đó bằng phép đặt ẩn phụ ta chuyển về bài toán tìm G của hàm số.

**Thí dụ 1.** Cho $x^2 + y^2 = x + y$.
Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$

*Lời giải.*

Đặt $t = x + y$, từ giả thiết $x^2 + y^2 = x + y$ ta có $2xy = (x+y)^2 - (x+y) = t^2 - t$ hay $xy = \dfrac{t^2 - t}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2) = 2(x+y)$ hay $t^2 \le 2t$ suy ra $0 \le t \le 2$. Khi đó biểu thức $P = (x+y)^3 - 2xy(x+y) = t^2$. Do đó ta có $\max P = 4$ đạt được khi $t = 2$ hay $x + y = 2$ và $xy = 1$ suy ra $x = 1$ và $y = 1$, ta có $\min P = 0$ đạt được khi $t = 0$ hay $x = y = 0$.

**Nhận xét.** Bài toán này giả thiết và biểu thức $P$ được cho dưới dạng đối xứng với hai biến. Vì vậy, chúng ta nghĩ đến cách đổi biến $t = x + y$. Nhưng để giải bài toán trọn vẹn thì phải tìm điều kiện của biến $t$. Sau đây là một số bài toán với định hướng tương tự.

**Thí dụ** 2. Cho $x,y > 0$ thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{xy}{x + y + 1}$

*Lời giải*. Đặt $t = x + y$. Từ giả thiết $x,y > 0$ và $x^2 + xy + y^2 = 1$ suy ra $xy = t^2 - 1$. Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \ge 4xy$ suy ra $0 < t \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó $P = t - 1 \le \dfrac{\sqrt{3} - 3}{3}$.

Vì vậy $\max P = \dfrac{\sqrt{3} - 3}{3}$ đạt được khi $(x;y) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}; -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ hoặc $(x;y) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}; \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

**Thí dụ 3.** Cho $x,y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x + y \ne -1$ và $x^2 + y^2 + xy = x + y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{xy}{x + y + 1}$.

*Lời giải.* Đặt $t=x+y$. Từ giả thiết $x^2+y^2+xy=x+y+1$ ta có $\left(x+y\right)^2-xy=\left(x+y\right)+1$ hay $xy=t^2-t-1$.

Áp dụng bất đẳng thức $\left(x+y\right)^2\geq 4xy$ suy ra $3t^2-4t-4\leq 0$ hay $-\dfrac{2}{3}\leq t\leq 2$. Khi đó $P=\dfrac{t^2-t-1}{t+1}$. Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2-t-1}{t+1}$, $f'\left(t\right)=\dfrac{t^2+2t}{\left(t+1\right)^2}$, $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=0\vee t=-2$ (loại).

Bảng biến thiên

| $t$ | $-\frac{2}{3}$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f\left(t\right)$ | $\frac{1}{3}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{3}$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\min P=\min\limits_{t\in\left[-\frac{2}{3};2\right]}f\left(t\right)=f\left(0\right)=-1$ đạt được khi $\left(x;y\right)=\left(-1;1\right)$ hoặc $\left(x;y\right)=\left(1;-1\right)$ và $\max P=\max\limits_{t\in\left[-\frac{2}{3};2\right]}f\left(t\right)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=f\left(2\right)=\dfrac{1}{3}$ đạt được khi $x=y=-\dfrac{1}{3}$ hoặc $x=y=1$.

**Thí dụ 4.** Cho $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $0<x,y\leq 1$ và $x+y=4xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-xy$.

Đặt $t=x+y$. Từ giả thiết $0<x,y\leq 1$ và $x+y=4xy$ suy ra $xy=\dfrac{t}{4}$ và $1\leq t\leq 2$. Khi đó $P=\left(x+y\right)^2-3xy=t^2-\dfrac{3}{4}t$. Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2-\dfrac{3}{4}t$, $f'\left(t\right)=2t-\dfrac{3}{4}$, $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{8}$ (loại). Bảng biến thiên

| $t$ | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | | $+$ | |
| $f\left(t\right)$ | $\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{2}$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\min P=\min\limits_{t\in\left[1;2\right]}f\left(t\right)=f\left(1\right)=\dfrac{1}{4}$ đạt được khi $x=y=\dfrac{1}{2}$ và $\max P=\max\limits_{t\in\left[1;2\right]}f\left(t\right)=f\left(2\right)=\dfrac{5}{2}$ đạt được khi $\left(x;y\right)=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $\left(x;y\right)=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

**Thí dụ 5.** Cho $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $x,y\neq 0$ và $xy\left(x+y\right)=x^2+y^2-x-y+2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

*Lời giải.* Đặt $t=x+y$. Từ giả thiết $xy\left(x+y\right)=x^2+y^2-x-y+2$ hay $xy\left(x+y\right)=\left(x+y\right)^2-2xy-\left(x+y\right)+2$ suy ra $xy=\dfrac{t^2-t+2}{t+2}$. Áp dụng bất đẳng thức

$\left(x+y\right)^2 \ge 4xy$ suy ra $\dfrac{t^3-2t^2+4t-8}{t+2} \ge 0$ hay $t<-2 \vee t \ge 2$. Khi đó $P=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{t^2+2t}{t^2-t+2}$. Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2+2t}{t^2-t+2}$, $f'\left(t\right)=\dfrac{-3t^2+4t+4}{\left(t^2-t+2\right)^2}$, $f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t=2 \vee t=-\frac{2}{3}$ (loại). Bảng biến thiên

| $t$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | | $-$ | | $\|\|$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f\left(t\right)$ | $1$ | ↘ | | $\|\|$ | | ↗ | $2$ | ↘ | |
| | | | $0$ | $\|\|$ | | | | | $1$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\max P=\max\limits_{t<-2 \vee t \ge 2} f\left(t\right)=f\left(2\right)=2$ đạt được khi $x=y=1$.

**Thí dụ 6.** Cho $x,y>0$ thỏa mãn $xy+x+y=3$.

Chứng minh rằng $\dfrac{3x}{y+1}+\dfrac{3y}{x+1}+\dfrac{xy}{x+y} \le x^2+y^2+\dfrac{3}{2}$

*Lời giải*. Đặt $t=x+y$. Từ giả thiết $x,y>0$, $xy+x+y=3$ và áp dụng bất đẳng thức $\left(x+y\right)^2 \ge 4xy$ ta có $xy=3-t, t>0$ và $t^2+4t-12 \ge 0$ hay $t \ge 2$ hoặc $t \le -6$ (loại). Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\dfrac{3\left(x+y\right)^2-6xy+3\left(x+y\right)}{xy+\left(x+y\right)+1}+\dfrac{xy}{x+y} \le \left(x+y\right)^2-2xy+\dfrac{3}{2}$ hay

$\dfrac{3t^2+9t-18}{4}+\dfrac{3-t}{t} \le t^2+2t-\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow t^3-t^2+4t-12 \ge \Leftrightarrow \left(t-2\right)\left(t^2+t+6\right) \ge 0$ luôn đúng với mọi $t \ge 2$, dấu bằng xảy ra khi $t=2$ hay $x=y=1$.

**Thí dụ 7.** Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(1+x\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)+\left(1+y\right)\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

*Lời giải*. Đặt $t=x+y$. Từ giả thiết $x,y>0$ và $x^2+y^2=1$ suy ra $xy=\dfrac{t^2-1}{2}$ và $t>1$. Áp dụng bất đẳng thức $\left(x+y\right)^2 \le 2\left(x^2+y^2\right)$ suy ra $1<t \le \sqrt{2}$.

Khi đó $P=\left[1+\left(x+y\right)+xy\right]\left[\dfrac{x+y}{xy}\right]=\dfrac{t^2+t}{t-1}$. Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{t^2+t}{t-1}$, $f'\left(t\right)=\dfrac{t^2-2t-1}{\left(t-1\right)^2}$, $f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow t=1\pm\sqrt{2}$ (loại). Bảng biến thiên

| $t$ | $1$ | | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $f\left(t\right)$ | $\|\|$ $+\infty$ | ↘ | $4+3\sqrt{2}$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\min P = \min\limits_{t\in(1;\sqrt{2}]} f(t) = f\left(\sqrt{2}\right) = 4+3\sqrt{2}$ đạt được khi $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

**Nhận xét.** Qua các thí dụ trên, cho ta một kỹ thuật giảm biến của bài toán tìm GTNN, GTLN của biểu thức hai biến có tính đối xứng: Do tính đối xứng nên ta luôn có thể biến đổi đưa về một trong các dạng đặt $t = x+y$, $t = x^2+y^2$ hoặc $t = xy$, từ đó đưa về tìm GTNN, GTLN của hàm số.

**4.2 Bài tập**

**1/** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x+y+1 = 3xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{3x}{y(x+1)} + \dfrac{3y}{x(y+1)} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}$

**2/** Cho $x, y$ không đồng thời bằng $0$ và thỏa mãn $x+y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{x^2+y^2} + \dfrac{x^2}{y^2+1} + \dfrac{y^2}{x^2+1}$

**3/** Cho $x^2+y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$

4/ Cho $x^2+y^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{\sqrt{1+y}} + \dfrac{y}{\sqrt{1+x}}$

5/ Cho $x, y \neq 0$ thay đổi thỏa mãn $(x+y)xy = x^2+y^2-xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$.

6/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2+xy+y^2 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 - xy + y^2$.

**5.1 Biểu thức đẳng cấp**

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa hai biến mà giả thiết hoặc biểu thức đó thể hiện tính đẳng cấp. Từ đó xét hàm số và tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

**Thí dụ 1**. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2+y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = y(x+y)$.

*Lời giải*. Đặt $y = tx$. Từ điều kiện $x, y > 0$ suy ra $t > 0$. Từ giả thiết $x^2+y^2 = 1$ ta có $x^2 = \dfrac{1}{t^2+1}$. Khi đó biểu thức $P = x^2 t(t+1) = \dfrac{t^2+t}{t^2+1}$. Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+t}{t^2+1}$, $f'(t) = \dfrac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}+1 \vee t = 1-\sqrt{2}$ (loại). Bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\sqrt{2}+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $0$ | ↗ | $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ | ↘ | $1$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\max P = \max\limits_{t>0} f(t) = f\left(\sqrt{2}+1\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ đạt được khi $(x;y) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}; \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}\right)$.

**Thí dụ 2.** Cho $x,y \ge 0$ và thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{4x^2+6xy-5}{2xy-2y^2-1}$$

*Lời giải.*

Nếu $x=0$ thì từ giả thiết $x^2+y^2=1$ và $y\ge 0$ suy ra $y=1$. Khi đó $P=\frac{5}{3}$.

Nếu $x\ne 0$ thì đặt $y=tx$. Từ giả thiết $x,y\ge 0$ và $x^2+y^2=1$ suy ra $t\ge 0$ và $x^2=\frac{1}{t^2+1}$. Khi đó $P=\frac{x^2\left(4+6t\right)-5}{x^2\left(2t-2t^2\right)-1}=\frac{5t^2-6t+1}{3t^2-2t+1}$. Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{5t^2-6t+1}{3t^2-2t+1}$, $f'\left(t\right)=\frac{8t^2+4t-4}{\left(3t^2-2t+1\right)^2}$, $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\vee t=-1$ (loại). Bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f\left(t\right)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{3}$ |

Từ bảng biến thiên ta có $f\left(t\right)<\frac{5}{3},\forall t\ge 0$ và $\min P=\min\limits_{t\ge 0}f\left(t\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ đạt được khi $x=\frac{2}{\sqrt{5}}$ và $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Vì vậy $\max P=\frac{5}{3}$ đạt được khi $\left(x;y\right)=\left(0;1\right)$ và $\min P=-1$ đạt được khi $\left(x;y\right)=\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

**Thí dụ 2.** Cho $x,y>0$. Chứng minh rằng $\frac{4xy^2}{\left(x+\sqrt{x^2+4y^2}\right)^3}\le\frac{1}{8}$

*Lời giải.* Đặt $t=\frac{x}{y}$. Từ giả thiết $x,y>0$ suy ra $t>0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{4t}{\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)^3}\le\frac{1}{8}$ hay $t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)^3\le 2$. Xét hàm số $f\left(t\right)=t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)^3$,

$f'\left(t\right)=\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)^3-\frac{3t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)^3}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)^3\left(\sqrt{t^2+4}-3t\right)}{\sqrt{t^2+4}}$, $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta có bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f\left(t\right)$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ |

Diendantoanhoc.net

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{t>0} f\left(t\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2$ hay $t\left(\sqrt{t^2+4}-t\right)^3\le 2$ dấu bằng xảy ra khi $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $y=\sqrt{2}x$.

**5.2 Bài tập**

**1/** Cho $x,y>0$ thỏa mãn $xy\le y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{y^2}+9\frac{y^3}{x^3}$

2/ Cho $x,y\ge 0$. Chứng minh rằng $3x^3+7y^3\ge 9xy^2$.

3/ Cho $x,y\ge 0$. Chứng minh rằng $x^4+y^4\ge x^3y+xy^3$.

4/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)-8\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$ với $x,y\ne 0$.

**6.1 Biểu thức ba biến**

Trong phần này chúng tôi trình bày một số dạng bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức chứa ba biến bằng cách đặt ẩn phụ hoặc thế hai biến qua một biến còn lại. Từ đó, chuyển được bài toán về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số.

**Thí dụ 1.** Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\ge 16$

*Lời giải.* Đặt $t=x+y$. Từ giả thiết ta có $z=1-\left(x+y\right)=1-t$ và $0<t<1$.

Áp dụng bất đẳng thức $\left(x+y\right)^2\ge 4xy$ hay $xy\le\frac{t^2}{4}$.

Khi đó $P=\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=\frac{t}{xy\left(1-t\right)}\ge\frac{4}{-t^2+t}$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{4}{-t^2+t}, f'\left(t\right)=\frac{4\left(2t-1\right)}{\left(-t^2+t\right)^2}$, $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $f\left(t\right)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $16$ | ↗ | ‖ $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{t\in\left(0;1\right)} f\left(t\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=16$ đạt được khi $x=y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{2}$.

Vì vậy $\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}\ge 16$.

**Thí dụ 2.** Cho $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x+y+z+xy+yz+zx$$

*Lời giải.* Đặt $t=x+y+z$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $\left(x+y+z\right)^2\le 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$ suy ra $-\sqrt{3}\le t\le\sqrt{3}$. Khi đó

$$P=\left(x+y+z\right)+\frac{1}{2}\left[\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]=\frac{1}{2}\left(t^2+2t-1\right)$$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{2}\left(t^2+2t-1\right)$, $f'(t)=2t+2$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-1$.

Ta có bảng biến thiên

| $t$ | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $1-\sqrt{3}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1+\sqrt{3}$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\min P=\min\limits_{t\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]}f(t)=f(-1)=-1$ đạt được khi $t=-1$ hay $(x;y;z)=(-1;0;0)$ và các hoán vị của nó; $\max P=\max\limits_{t\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]}f(t)=f\left(\sqrt{3}\right)=1+\sqrt{3}$ đạt được khi $t=\sqrt{3}$ hay $(x;y;z)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**Thí dụ 3.** Cho $x,y,z\geq 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng $x^3+y^3+z^3+\frac{15}{4}xyz\geq\frac{1}{4}$

*Lời giải*. Do vai trò của $x,y,z$ bình đẳng nên ta luôn giả sử được $x=\min\{x,y,z\}$. Từ giả thiết $x,y,z\geq 0$, $x+y+z=1$ ta có $0\leq x\leq\frac{1}{3}$ và $y+z=1-x$. Áp dụng bất đẳng thức $yz\leq\frac{(y+z)^2}{4}$ và $\frac{27x}{4}-3<0$. Khi đó biểu thức

$$P=x^3+y^3+z^3+\frac{15}{4}xyz=x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)+\frac{15}{4}xyz$$
$$=x^3+(y+z)^3+yz\left[\frac{15x}{4}-3(y+z)\right]=x^3+(1-x)^3+yz\left(\frac{27x}{4}-3\right)$$
$$\geq x^3+(1-x)^3+\frac{(y+z)^2}{4}\left(\frac{27x}{4}-3\right)=\frac{1}{16}\left(27x^3-18x^2+3x+4\right)$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{16}\left(27x^3-18x^2+3x+4\right)$, $f'(x)=\frac{1}{16}\left(81x^2-36x+3\right)$,

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{9}\vee x=\frac{1}{3}$. Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{9}$ | | $\frac{1}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $\frac{7}{27}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{4}$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\max\limits_{x\in\left[0;\frac{1}{3}\right]} f\left(x\right)=f\left(0\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}$. Do đó $P\ge\frac{1}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $\left(x;y;z\right)=\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ hoặc $\left(x;y;z\right)=\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ và các hoán vị của nó.

**Thí dụ 4.** Cho $x,y,z\in\left(0;1\right)$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$.

*Lời giải.* Ta có $P=\frac{x^2}{x\left(1-x^2\right)}+\frac{y^2}{y\left(1-y^2\right)}+\frac{z^2}{z\left(1-z^2\right)}$. Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{1}{t\left(1-t^2\right)}$ với $0<t<1$, $f'\left(t\right)=\frac{3t^2-1}{t^2\left(1-t^2\right)^2}$, $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}\vee t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (loại).

Ta có Bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $f\left(t\right)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | ‖ $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có $\frac{1}{t\left(1-t^2\right)}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\forall t\in\left(0;1\right)$.

Vì vậy $P\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(xy+yz+zx\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Do đó $\min P=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

# MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC

**Bài 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học A – 2011)**
Cho $x,y,z$ là ba số thực thuộc đoạn $\left[1;4\right]$ và $x\ge y,x\ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$

***Lời giải.*** Trước hết ta chứng minh : $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ (*), với $a$ và $b$ dương và $ab\ge1$.

Thật vậy, $\left(*\right)\Leftrightarrow\left(a+b+2\right)\left(1+\sqrt{ab}\right)\ge2\left(1+a\right)\left(1+b\right)$

$\Leftrightarrow\left(a+b\right)\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}\ge a+b+2ab\Leftrightarrow\left(\sqrt{ab}-1\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge0$, luôn đúng với $a,b$ dương và $ab\ge1$. Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi : $a=b$ hoặc $ab=1$.

Áp dụng (*), với $x$ và $y$ thuộc đoạn $\left[1;4\right]$ và $x\ge y$, ta có:

$$P=\frac{x}{2x+3y}+\frac{1}{1+\frac{z}{y}}+\frac{1}{1+\frac{x}{z}}\ge\frac{1}{2+\frac{3y}{x}}+\frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi : $\frac{z}{y}=\frac{x}{z}$ hoặc $\frac{x}{y}=1$ (1)

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}}=t, t\in\left[1;2\right]$. Khi đó: $P\geq\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{2}{1+t}$. Xét hàm số :

$f\left(t\right)=\frac{t^2}{2t^2+3}+\frac{2}{1+t}, t\in\left[1;2\right],\ f'\left(t\right)=\frac{-2\left[t^3\left(4t-3\right)+3t\left(2t-1\right)+9\right]}{\left(2t^2+3\right)^2\left(1+t\right)^2}<0,$

$\Rightarrow f\left(t\right)\geq f\left(2\right)=\frac{34}{33}.$

Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi $t=2\Leftrightarrow\frac{x}{y}=4\Leftrightarrow x=4, y=1$ (2). Suy ra $P\geq\frac{34}{33}$.

Từ (1) và (2) suy ra dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi : $x=4, y=1$ và $z=2$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng $\frac{34}{33}$, khi $x=4, y=1, z=2$.

**Bài 2 (Đề thi tuyển sinh Đại học B – 2011)**
Cho $a$ và $b$ là các số thực dương thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=\left(a+b\right)\left(ab+2\right)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)$

***Lời giải.*** Với $a,b$ dương, ta có: $2\left(a^2+b^2\right)+ab=\left(a+b\right)\left(ab+2\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right)+ab=a^2b+ab^2+2\left(a+b\right)\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1=\left(a+b\right)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$

Mà $\left(a+b\right)+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 2\sqrt{2\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}=2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}$, suy ra:

$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)}\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq\frac{5}{2}.$

Đặt $t=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}, t\geq\frac{5}{2}$, suy ra : $P=4\left(t^3-3t\right)-9\left(t^2-2\right)=4t^3-9t^2-12t+18$

Xét hàm số $f\left(t\right)=4t^3-9t^2-12t+18$, với $t\geq\frac{5}{2}$

Ta có $f'\left(t\right)=6\left(2t^2-3t-2\right)>0$, suy ra : $\min\limits_{\left[\frac{5}{2};+\infty\right)}f\left(t\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{23}{4}.$

Vậy, $\min P=-\frac{23}{4}$ đạt khi và chỉ khi : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$

và $a+b=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow\left(a;b\right)=\left(2;1\right)$ hoặc $\left(a;b\right)=\left(1;2\right)$

**Bài 3 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B-2010)**
Cho các số thực không âm $a,b,c$ thoản mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3\left(ab+bc+ca\right)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

***Lời giải.*** Ta có: $M\geq\left(ab+bc+ca\right)^2+3\left(ab+bc+ca\right)+2\sqrt{1-2\left(ab+bc+ca\right)}$

Đặt $t = ab + bc + ca$, ta có : $0 \le t \le \dfrac{\left(a+b+c\right)^2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1-2t}$ trên $\left[0;\dfrac{1}{2}\right)$, ta có : $f'\left(t\right) = 2t + 3 - \dfrac{2}{\sqrt{1-2t}}$

$f''\left(t\right) = 2 - \dfrac{2}{\sqrt{\left(1-2t\right)^3}} \le 0$, dấu bằng chỉ xảy ra tại $t = 0$, suy ra $f'\left(t\right)$ nghịch biến.

Xét trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]$ ta có : $f'\left(t\right) \ge f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0$, suy ra $f\left(t\right)$ đồng biến. Do đó : $f\left(t\right) \ge f\left(0\right) = 2, \forall t \in \left[0;\dfrac{1}{3}\right]$.

Vì thế : $M \ge f\left(t\right) \ge 2, \forall t \in \left[0;\dfrac{1}{3}\right]$. $M = 2 \Leftrightarrow ab = bc = ca, ab + bc + ca = 1$ và $a + b + c = 1 \Leftrightarrow \left(a;b;c\right)$ là một trong các bộ số : $\left(1;0;0\right),\left(0;1;0\right),\left(0;0;1\right)$

Do đó giá trị nhỏ nhất của $M$ là 2.

**Bài 4. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)**

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3\left(x^4 + y^4 + x^2y^2\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$ với $x, y$ là các số thỏa mãn $\left(x+y\right)^3 + 4xy \ge 2$.

***Lời giải.*** Dựa vào bất đẳng thức hiển nhiên : $\left(x+y\right)^2 \ge 4xy$ nên

$\left(x+y\right)^3 + 4xy \ge 2 \Rightarrow \left(x+y\right)^3 + \left(x+y\right)^2 \ge \left(x+y\right)^3 + 4xy \ge 2 \Rightarrow \left(x+y\right)^3 + \left(x+y\right)^2 - 2 \ge 0$

$\Rightarrow \left[\left(x+y\right) - 1\right]\left[\left(x+y\right)^2 + \left(x+y\right) + 2\right] \ge 0$ (1)

Do $\left(x+y\right)^2 + \left(x+y\right) + 2 = \left[\left(x+y\right) + \dfrac{1}{2}\right]^2 + \dfrac{7}{4} > 0$ và từ (1) suy ra : $x + y \ge 1$.

Vậy nếu cặp $\left(x;y\right)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $x + y \ge 1$ (2).

Ta biến đổi $A$ như sau:

$A = 3\left(x^4 + y^4 + x^2y^2\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1 = \dfrac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right)^2 + \dfrac{3}{2}\left(x^4 + y^4\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$ (3)

Do $x^4 + y^4 \ge \dfrac{\left(x^2 + y^2\right)^2}{2}$ nên từ (3) suy ra :

$A \ge \dfrac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right)^2 + \dfrac{3}{4}\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1 = \dfrac{9}{4}\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$

Vì $x^2 + y^2 \ge \dfrac{\left(x+y\right)^2}{2}$ nên từ (2) ta có : $x^2 + y^2 \ge \dfrac{1}{2}$.

Đặt $f\left(t\right) = \dfrac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ với $t = x^2 + y^2 \ge \dfrac{1}{2}$. Ta có : $f'\left(t\right) = \dfrac{9}{2}t - 2 > 0, \forall t \ge \dfrac{1}{2}$.

Suy ra : $\min\limits_{t \ge \frac{1}{2}} f\left(t\right) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{16}$ (4)

Từ (4) suy ra $A \ge \dfrac{9}{16}$. Mặt khác dễ thấy khi $x = y = \dfrac{1}{2}$ thì $A = \dfrac{9}{16}$.

Vậy $\min A = \dfrac{9}{16}$ khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

**Bài 5. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**
Cho $x, y \ge 0$ và $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức :
$S = \left(4x^2 + 3y\right)\left(4y^2 + 3x\right) + 25xy$

***Lời giải.*** Ta có :
$S = \left(4x^2 + 3y\right)\left(4y^2 + 3x\right) + 25xy = 16x^2y^2 + 12\left(x^3 + y^3\right) + 34xy$
$= 16x^2y^2 + 12\left(x + y\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) + 34xy = 16x^2y^2 + 12\left[\left(x + y\right)^2 - 3xy\right] + 34xy$
$= 16x^2y^2 - 2xy + 12$ (1) (do $x + y = 1$).

Đặt $xy = t$. Với $x \ge 0, y \ge 0$, ta có : $0 \le xy \le \dfrac{\left(x + y\right)^2}{4} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 0 \le t \le \dfrac{1}{4}$

Xét hàm số $f\left(t\right) = 16t^2 - 2t + 12$ với $0 \le t \le \dfrac{1}{4}$. Ta có : $f'\left(t\right) = 32t - 2$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{16}$ | | $\frac{1}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(t\right)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f\left(t\right)$ | $12$ | ↘ | $\frac{191}{16}$ | ↗ | $\frac{25}{2}$ |

Suy ra $\min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f\left(t\right) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \dfrac{191}{16}$ và $\max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f\left(t\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \dfrac{25}{2}$.

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của $S$ đạt được

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}; y = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4} \\ x = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{4}; y = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$$

Giá trị lớn nhất của $S$ đạt được

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$