



ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ NĂM 2015

Ngày 1 (10/07/2015)

Bài 1 Cho S là một tập hữu hạn các điểm trên mặt phẳng. Tập S được gọi là "cân bằng" nếu với hai điểm A, B phân biệt bất kỳ thuộc S thì luôn tồn tại điểm C thuộc S thoả mãn $AC = BC$. Tập S được gọi là "không tâm" nếu với bất kỳ ba điểm phân biệt A, B, C thuộc S thì không có điểm P nào thoả mãn $PA = PB = PC$.

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 3$, tồn tại một tập "cân bằng" với n điểm.

b) Tìm tất cả số nguyên $n \geq 3$, sao cho tồn tại một tập "cân bằng" và "không tâm" cho n điểm.

Bài 2 Tìm mọi số nguyên dương (a, b, c) thoả mãn $ab - c, bc - a, ca - b$ đều là lũy thừa của 2.

Bài 3 Cho tam giác nhọn ABC , $AB > AC$ có đường tròn ngoại tiếp Γ , trục tâm H và chân đường cao F hạ từ A . M là trung điểm BC . Q là điểm trên Γ thoả mãn $\angle HQA = 90^\circ$, và K là điểm trên Γ sao cho $\angle HKQ = 90^\circ$. A, B, C, K, Q là các điểm phân biệt, và chúng nằm trên Γ theo đúng thứ tự đó. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp hai tam giác KQH và FKM tiếp xúc với nhau.

Ngày 2 (11/07/2015)

Bài 4 Tam giác ABC nội tiếp đường tròn Ω có tâm O . Một đường tròn Γ với tâm A cắt cạnh BC tại D và E sao cho B, D, E, C phân biệt và nằm trên đường thẳng BC theo đúng thứ tự này. F, G là giao điểm của Ω và Γ sao cho A, F, B, C, G nằm trên Ω theo đúng thứ tự này. K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDF$ và cạnh AB . L là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CGE$ và cạnh CA .

Giả sử đường thẳng FK và GL phân biệt và cắt nhau tại X . Chứng minh rằng X nằm trên đường thẳng AO .

Bài 5 Ký hiệu $\mathbb{R}$ là tập các số thực. Xác định tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

với mọi số thực x, y .

Bài 6 Cho dãy $a_1, a_2, \dots$ các số nguyên thoả mãn điều kiện sau:

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ với mọi $j \geq 1$;

(ii) $k + a_k \neq l + a_l$ với mọi $1 \leq k < l$.

Chứng minh rằng tồn tại hai số nguyên dương b và N thoả mãn

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

với mọi số nguyên m, n thoả mãn $n > m \geq N$.

Hết