Dồn biến cổ điển và bất đẳng thức Jack Garfunkel

Võ Quốc Bá Cẩn
Đại học Y Dược Cần Thơ

Ngày 9 tháng 5 năm 2008

Tóm tắt nội dung

Trong bài này, chúng ta sẽ giới thiệu một cách chứng minh bằng phép dồn biến cổ điển cho bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Bất đẳng thức này được tác giả Jack Garfunkel đề nghị trên tạp chí Crux Magazine năm 1991 (bài toán 1490). Đây là một bài toán hay và khó mặc dù hiện nay đã nhận được nhiều lời giải cho nó nhưng một lời giải bằng phép dồn biến thuần túy thì đến nay vẫn chưa nhận được.

Trước hết chúng ta cần có kết quả sau làm bổ đề phụ trợ cho chứng minh bất đẳng thức Jack Garfunkel

Bài toán 1 *Cho các số không âm a, b, c, tất cả không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b} \le \frac{1}{3}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $a+b+c=3$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{3-c}+\frac{b}{3-a}+\frac{c}{3-b} \le 1$$

$$\Leftrightarrow a(3-a)(3-b)+b(3-b)(3-c)+c(3-c)(3-a) \le (3-a)(3-b)(3-c)$$

$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc \le 4$$

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số hạng nằm giữa a và c, thế thì ta có

$$c(b-a)(b-c) \le 0$$

$$\Rightarrow b^2c + c^2a \le abc + bc^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a + abc &\le b(a+c)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2b\cdot(a+c)\cdot(a+c)\\ &\le \frac{1}{2}\left(\frac{2b+a+c+a+c}{27}\right)^3 = 4.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $(a, b, c) \sim (2, 1, 0)$.

Nhận xét 1 *Đây là một bổ đề khá chặt và có thể được dùng để giải nhiều bài toán khác, các bạn hãy ghi nhớ nó nhé! Ngoài ra, chúng ta có thể làm mạnh bổ đề như sau*

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc + \frac{1}{2}abc(3 - ab - bc - ca) \le 4$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

■

Bây giờ chúng ta sẽ đi đến giải quyết bài toán chính

Bài toán 2 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}.$$

(Jack Garfunkel)

LỜI GIẢI. Ta xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. $c \ge b \ge a$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}}\right)^2 \le (a+b+c)\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}\right)$$

Lại có do $c \ge b \ge a$ nên

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right)\\ &= \frac{3}{2} - \frac{(c-a)(c-b)(b-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{3}{2} < \frac{25}{16}\end{aligned}$$

Nên hiển nhiên

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}$$

Trường hợp 2. $a \ge b \ge c$.

Trường hợp 2.1. $\frac{11}{5}b \ge a$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 &\le \left[\sum_{cyc}\frac{a(4a+4b+c)}{a+b}\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\right)\\ &= \left[3\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)}{a+b}\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\right)\\ &= \left(\sum_{cyc}a\right)\left(3+\sum_{cyc}\frac{a}{a+b}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c}\right)\end{aligned}$$

Theo kết quả bài toán trước, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{4a+4b+c} \le \frac{1}{3}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{a}{a+b} \le \frac{27}{16}$$

$$\Leftrightarrow (11a^2+6ab-5b^2)c+(ab+c^2)(11b-5a) \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Trường hợp 2.2. $a \ge \frac{11}{5}b$, đặt $f(a,b,c) = \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}}$. Vì bài toán này có đẳng thức xảy ra tại $a=3, b=1, c=0$ nên ý tưởng của chúng ta sẽ là dồn 1 biến về 0, tức là chứng minh

$$f(a,b,c) \le f(a_1,b_1,0)$$

với $a_1+b_1 = a+b+c$.
Việc làm này nói có vẻ rất đơn giản nhưng khi thực hiện, bạn sẽ thấy rất khó vì các biểu thức trong căn rất khó cho ta để đánh giá chúng, và nếu chúng ta cứ "cố chấp" một giá trị a_1, b_1 hoài khi dồn biến thì cũng rất khó mà ta phải linh động hơn, tùy theo những trường hợp cụ thể mà chọn a_1, b_1 thích hợp ứng với những trường hợp ấy.
Chúng ta sẽ xét những trường hợp nhỏ như sau
Trường hợp 2.2.1. $a \ge 3b$, khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} \le \frac{a+\frac{c}{2}}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+b+c) \le \left(a^2+ac+\frac{c^2}{4}\right)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}c^4(a+b) \ge 0 \text{ (đúng)}$$

và

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\sqrt{b+\frac{c}{2}}$$

Do $a\ge 3b$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{3b+c}}\le\sqrt{b+\frac{c}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{3b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}}\le b+\frac{c}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{3b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}}\le \frac{c}{2}+\frac{bc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{3b+c}+\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}}\le \frac{b}{b+c}+\frac{1}{2}$$

Do $b\ge c$ nên $3b+c\ge 2(b+c)$, suy ra

$$\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(3b+c)}}\le\frac{\sqrt{2}b}{b+c}\le\frac{3b}{2(b+c)}$$

Lại có

$$\frac{1}{2}+\frac{b}{b+c}-\frac{c}{3b+c}-\frac{3b}{2(b+c)}=\frac{c(b-c)}{2(b+c)(3b+c)}\ge 0$$

Từ đây, ta đi đến

$$f(a,b,c)\le f\left(a+\frac{c}{2},b+\frac{c}{2},0\right)$$

Trường hợp 2.2.2. $3b\ge a\ge\frac{5}{2}b$, khi đó, ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}\le\frac{a+\frac{3}{8}c}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+b+c)\le\left(a^2+\frac{3}{4}ac+\frac{9}{64}c^2\right)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{64}c^2(a+b)+\frac{1}{4}ca(3b-a)\ge 0 \text{ (đúng)}$$

và

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\sqrt{b+\frac{5}{8}c}$$

Tương tự như trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+\frac{5}{2}b}}\le\sqrt{b+\frac{5}{8}c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{\frac{5}{2}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}}\le b+\frac{5}{8}c$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{\frac{5}{2}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}}\le \frac{5}{8}c+\frac{bc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\frac{5}{2}b+c}+\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}}\le \frac{b}{b+c}+\frac{5}{8}$$

Do $b\ge c$ nên

$$\frac{5}{2}b+c\ge\frac{7}{4}(b+c)=\frac{28}{16}(b+c)\ge\frac{25}{16}(b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{5}{2}b+c)}}\le\frac{8b}{5(b+c)}$$

Lại có

$$\frac{5}{8}+\frac{b}{b+c}-\frac{8b}{5(b+c)}-\frac{c}{\frac{5}{2}b+c}=\frac{(b+10c)(5b-3c)}{40(b+c)(5b+2c)}\ge 0$$

Vậy nên

$$f(a,b,c)\le f\left(a+\frac{3}{8}c,b+\frac{5}{8}c,0\right)$$

Trường hợp 2.2.3. $\frac{5}{2}b\ge a\ge\frac{11}{5}b$, khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}\le\frac{a+\frac{5}{14}c}{\sqrt{a+b+c}}$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+b+c)\le\left(a^2+\frac{5}{7}ac+\frac{25}{196}c^2\right)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{196}c^2(a+b)+\frac{1}{7}ca(5b-2a)\ge 0 \text{ (đúng)}$$

và

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\le\sqrt{b+\frac{9}{14}c}$$

Tương tự như trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+\frac{11}{5}b}}\le\sqrt{b+\frac{9}{14}c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{\frac{11}{5}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}}\le b+\frac{9}{14}c$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{\frac{11}{5}b+c}+\frac{2bc}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}}\le \frac{9}{14}c+\frac{bc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{\frac{11}{5}b+c}+\frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}}\le \frac{b}{b+c}+\frac{9}{14}$$

Do $b\ge c$ nên

$$\frac{11}{5}b+c\ge\frac{8}{5}(b+c)\ge\frac{25}{16}(b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{2b}{\sqrt{(b+c)(\frac{11}{5}b+c)}}\le\frac{8b}{5(b+c)}$$

Lại có

$$\frac{9}{14}+\frac{b}{b+c}-\frac{8b}{5(b+c)}-\frac{c}{\frac{11}{5}b+c}=\frac{33b^2+160bc-125c^2}{70(b+c)(5b+2c)}\ge 0$$

Vậy nên

$$f(a,b,c)\le f\left(a+\frac{5}{14}c,b+\frac{9}{14}c,0\right)$$

Như vậy, ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp có 1 biến bằng 0 là đủ. Không mất tính tổng quát, giả sử $c=0$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\sqrt{b}\le\frac{5}{4}\sqrt{a+b}$$

$$\Leftrightarrow a+\sqrt{b(a+b)}\le\frac{5}{4}(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{b(a+b)}\le a+5b$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a+b}-2\sqrt{b}\right)^2\ge 0 \text{ (đúng)}.$$

Bài toán được giải quyết xong.