

Số chính phương

1. Định nghĩa:

Số nguyên A được gọi là số chính phương $\Leftrightarrow A = a^2$ ($a \in \mathbb{Z}$)

2. Một số tính chất áp dụng khi giải toán:

$(A, B) = 1$ và AB là số chính phương thì A, B là số chính phương.

Số chính phương tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Nếu A là số chính phương thì :

$$A \equiv 1 \pmod{8} \text{ nếu}$$

+ Còn 1 số tính chất về số dư khi chia cho 5, 6, 7... các bạn có thể tự suy ra bằng cách đặt số ban đầu là $nk+q$ (Ví dụ $5k+1, 5k+2, 5k+3, \dots$).

Số chính phương không tận cùng bằng 2 số lẻ.

3. Một số cách nhận biết số không chính phương:

$A: p$ và $A \nmid p^2$ (p là số nguyên tố)

$$B^2 < A < (B+1)^2 \text{ với } B \in \mathbb{Z}$$

A có chữ số tận cùng là 2, 3, 7, 8.

4. Một số điều cần lưu ý:

>>> Khi giải các bài toán về số chính phương ta có thể áp dụng phương pháp môđun, nghĩa là xét số dư của các số chính phương khi chia cho 1 số nguyên nào đó.

Ta xét ví dụ sau:

Tìm k để $4k+3 = a^2$.

Giả sử $4k+3 = a^2$

$$\Rightarrow a^2 \equiv 3 \pmod{4} \quad (1)$$

lại có nếu a là số chính phương thì

$$A \equiv 0, 1 \pmod{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ vô lý

Vậy không $\exists k$ để $4k+3$ là số chính phương.

>>> Số chính phương có thể dùng để giải toán về phương trình nghiệm nguyên.

Ví dụ: Tìm $a \in \mathbb{N}^*$ để phương trình sau có nghiệm nguyên:

$$x^2 + 2ax - 3a = 0$$

$$\text{Xét } \Delta' = a^2 + 3a$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì $a^2 + 3a$ là số chính phương

Lại có

$$a^2 < a^2 + 3a < a^2 + 4a + 4$$

$$\Rightarrow a^2 < a^2 + 3a < (a+2)^2$$

Do đó

$$a^2 + 3a = a^2 + 2a + 1$$

$$\Rightarrow a = 1$$

Với $a = 1$ phương trình có nghiệm $x = 1$ hay $x = -3$.

5. Một số bài tập ví dụ:

Bài 1: Tìm a để $17a+8$ là số chính phương.

Theo đề bài $\exists y \in \mathbb{N}$ để $17a+8 = y^2$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 17(a-1) = y^2 - 25 \\
&\Rightarrow 17(a-1) = (y-5)(y+5) \\
&\Rightarrow \begin{cases} y-5 \vdots 17 \\ y+5 \vdots 17 \end{cases} \\
&\Rightarrow y = 17n \pm 5 \\
&\Rightarrow a = 17n^2 \pm 10n + 1
\end{aligned}$$

Bài 2: Chứng minh số $3^n + 63$ không chính phương ($n \in \mathbb{N}, n \neq 0, 4$)

Xét n lẻ. Đặt $n = 2k + 1$.

$$\text{Có } 3^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \pmod{4}$$

$$63 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 3^{2k+1} + 63 \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 3^n + 63 \text{ không chính phương}$$

Xét n chẵn. Đặt $n = 2k$ ($k \neq 0$)

Giả sử $3^n + 63$ là số chính phương tức là

$$3^n + 63 = y^2 \quad (y \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow y \vdots 3$$

Đặt $y = 3t$ ta có:

$$3^{2k} + 63 = 9t^2$$

$$\Rightarrow 3^{2k-2} + 7 = t^2$$

$$\Rightarrow t^2 - (3^{k-1})^2 = 7$$

$$\Rightarrow (t - 3^{k-1})(t + 3^{k-1}) = 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - 3^{k-1} = 1 \\ t + 3^{k-1} = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 3^{k-1} = 6$$

$$\Rightarrow 3^{k-1} = 3$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow n = 4 \text{ (trái với giả thiết đề bài)}$$

Vậy $3^n + 63$ không là số chính phương $\forall n \neq 0, n \neq 4$.

Bài 3: Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + 1 = z^2$ có vô số nghiệm nguyên.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta chọn $x = 2n^2$; $y = 2n$; $z = 2n^2 + 1$.

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + 1 = (2n^2)^2 + (2n)^2 + 1 = (2n^2 + 1)^2 = z^2$$

Do đó phương trình có vô số nghiệm

Bài 4:

Cho p là tích của n số nguyên tố đầu tiên ($n > 1$).

Chứng minh rằng $p-1$ không phải là số chính phương.

Giả sử $p-1$ là số chính phương. Do p là tích của số nguyên tố đầu tiên ($n > 1$) suy ra

$$p \vdots 3. \text{ Do đó } p-1 \equiv -1 \pmod{3}$$

$$\text{Đặt } p-1 = 3k-1.$$

Một số chính phương không có dạng $3k-1$. Từ đây ta có điều mâu thuẫn.

Bài 5: Chứng minh $n^7 + 34n + 5$ không chính phương.

$$\text{Bổ đề: } x^2 \equiv i \pmod{7}; i \in \{0, 1, 2, 4\}$$

Theo định lý Fermat ta có: $n^7 \equiv n \pmod{7}$

$$\Rightarrow n^7 + 34n + 5 \equiv 35n + 5 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow n^7 + 34n + 5 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$\text{Giả sử } n^7 + 34n + 5 = x^2, x \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Suy ra } x^2 \equiv 5 \pmod{7} \text{ (vô lý)}$$

Do đó $n^7 + 34n + 5$ không phải là số chính phương.

Bài 6: Cho $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ là những số nguyên dương, không có hai số nào liên tiếp và

$$\text{đặt } S_n = k_1 + k_2 + \dots + k_n, \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương, khoảng $[S_n, S_{n+1})$ chứa ít nhất một số chính phương.

Nhận xét: khoảng $[S_n, S_{n+1})$ có ít nhất một số chính phương khi và chỉ khi khoảng

$$[\sqrt{S_n}, \sqrt{S_{n+1}}) \text{ có ít nhất một số nguyên dương, tức là: } \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} \geq 1.$$

Ta có:

$$\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow S_{n+1} \geq (\sqrt{S_n} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow S_n + k_{n+1} \geq (\sqrt{S_n} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow k_{n+1} \geq 2\sqrt{S_n} + 1$$

Theo đề bài rõ ràng:

$$k_{n+1} \geq k_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow S_n \leq nk_{n+1} - n(n+1)$$

Ta cần chứng minh:

$$k_{n+1} \geq 2\sqrt{nk_{n+1} - n(n+1)} + 1$$

$$\Leftrightarrow k_{n+1}^2 - 2k_{n+1} + 1 \geq 4nk_{n+1} - 4n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow k_{n+1}^2 - 2(2n+1)k_{n+1} + (2n+1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (k_{n+1} - 2n - 1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng.

Do đó với mọi n khoảng $[S_n, S_{n+1})$ chứa ít nhất một số chính phương.

Bài 7: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m , tồn tại một số nguyên dương n sao cho là số chính phương và là số lập phương.

Chọn $n = m^2 + 3m + 3$ thì:

$$m^2 + n + 1 = (m + 2)^2 \quad \mathbf{J}$$

$$mn + 1 = (m + 1)^3$$

6. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Nếu $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a^2 + b^2}{1 + ab} \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{a^2 + b^2}{1 + ab} \in \mathbb{Z}$ là số chính phương.

Bài 2: Tìm tất cả bộ số nguyên dương (x, y, z) sao cho

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z - 1) + 2y(z + 1) \text{ là số chính phương.}$$

Bài 3: Tìm a để $19a + 7$ là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng: $19^{2n} + 5^n + 2000 (n \in \mathbb{N}^*)$ không phải là số chính phương.

Bài 5: Tìm n để tổng bình phương các số từ 1 đến n là số chính phương.

Bài 6: Với mọi số nguyên dương n , hãy xác định (phụ thuộc theo n) số tất cả các cặp thứ tự hai số nguyên dương (x, y) sao cho $x^2 - y^2 = 10^2 \cdot 30^{2n}$.

Ngoài ra chứng minh số các cặp này không là số chính phương.

Bài 7: Cho dãy $\{a_n\}_{n \geq 0}$ là dãy số mà $a_0 = a_1 = 5$ và $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{98}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $\frac{(a_n + 1)}{6}$ là số chính phương, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 8: Cho các số

$$A = 11 \dots 11 \text{ (} 2m \text{ chữ số } 1 \text{)}$$

$$B = 11 \dots 11 \text{ (} m + 1 \text{ chữ số } 1 \text{)}$$

$$C = 66 \dots 66 \text{ (} m \text{ chữ số } 6 \text{)}$$

Chứng minh rằng: là một số chính phương.

Bài 9: Một số có tổng các chữ số là 2000 có thể là số chính phương hay không.