



<http://diendantoanhoc.net>

ĐÁP ÁN

VMEO II

Tháng 01/2006

Lời mở đầu

Cuộc thi giải toán online VMEO [*Vietnamese Mathematical E-Olympiad*] được Diễn Đàn Toán Học tổ chức năm nay (2005) là lần thứ nhì. Tuy nhiên, đây là lần đầu tiên mà chúng tôi cố gắng soạn thảo một tập đáp án chính thức cho những bài toán đã được đưa ra.

Mục đích của tập đáp án này là để giúp các bạn đã dự thi, cùng các em học sinh yêu toán, nhưng... chưa dự thi. Do đó, những lời giải sẽ được trình bày một cách khá chi tiết. Có thể một số bạn đọc sẽ cảm thấy chúng “dài dòng”. Khi muốn giải thích một việc gì cho mạch lạc, chặt chẽ và dễ hiểu, thiết nghĩ chúng ta phải chấp nhận tính cách “nhiều lời” của bài viết.

VMEO II là công trình chung của rất nhiều thành viên gắn bó với Diễn Đàn. Đặc biệt năm nay có rất nhiều thành viên sáng tác bài mới, hoặc sưu tập bài cũ, để đóng góp vào thư viện đề thi. Có được thành công lớn lao này là nhờ sự cống hiến của

chuyentoan, Circle, duantien, emvaanh, full_angel, Hatucdao, hungkhtn, K09,
koreagerman, lehoan, MrMATH, nemo, nguyendinh_kstn_dhxd, TieuSonTrangSi.

Dĩ nhiên, nhóm chọn đề phải thực hiện nhiệm vụ của mình, tức là tuyển chọn trong kho tàng đáng kể đó một số bài tiêu biểu cho tôn chỉ của cuộc thi. Mong rằng những tác giả mà bài không được chọn lần này không lấy đó làm... buồn! Nhóm chọn đề năm nay gồm có

Hatucdao, K09, TieuSonTrangSi, VNMaths.

Phần chấm bài, sắp hạng các thí sinh cũng khá vất vả và sẽ không được hoàn thành tốt đẹp nếu không có sự tham gia nhiệt tình của

chuyentoan, hungkhtn, lovePearl_maytrang, MrMATH, Mr Stoke, namdung,
NangLuong, stupid_mathematician.

Trong quá trình biên soạn tập đáp án này, chúng tôi cũng đã nhận được sự giúp đỡ từ nhiều thành viên cho phần đọc lại, sửa chữa bản nháp. Nếu bạn thấy còn sơ sót gì trong tập đáp án này, xin vui lòng liên lạc với TieuSonTrangSi. Mong rằng quyển đáp án nhỏ này sẽ đem lại nhiều điều hữu ích cho các bạn.

Diễn Đàn Toán Học

Mục lục

Lời mở đầu	iii
Vài ký hiệu	vii
1 Tháng 10	1
1.1 Bài 1	1
1.1.1 Lời giải	1
1.1.2 Phân tích lời giải	2
1.1.3 Một cách khác	4
1.2 Bài 2	5
1.2.1 Lời giải	5
1.2.2 Nguồn gốc	5
1.3 Bài 3	6
1.3.1 Lời giải	6
1.3.2 Một bài tương tự	8
1.3.3 Hai câu hỏi mở	8
1.4 Bài 4	8
1.4.1 Lời giải	9
1.4.2 Bình luận	12
2 Tháng 11	13
2.1 Bài 5	13
2.1.1 Lời giải	13
2.1.2 Mở rộng	15
2.2 Bài 6	16
2.2.1 Lời giải	16
2.2.2 Một cách khác	16
2.3 Bài 7	17
2.3.1 Lời giải	18
2.3.2 Mở rộng	19
2.4 Bài 8	20
2.4.1 Lời giải	20
2.4.2 Nguồn gốc	21

2.4.3	Một cách khác	21
3	Tháng 12	23
3.1	Bài 9	23
3.1.1	Lời giải	23
3.1.2	Nguồn gốc	27
3.1.3	Hai bài tương tự	27
3.2	Bài 10	28
3.2.1	Lời giải	28
3.2.2	Bình luận	30
3.3	Bài 11	30
3.3.1	Lời giải	30
3.3.2	Bình luận	34
3.4	Bài 12	35
3.4.1	Lời giải	35
3.4.2	Một bài tương tự	37

Vài ký hiệu

$\square$	kết thúc chứng minh câu hỏi
$\blacklozenge$	kết thúc chứng minh bổ đề
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{Q}_+^*$	tập hợp các số hữu tỉ dương
$\mathbb{N}$	tập hợp các số nguyên không âm
$\angle$	góc không định hướng
$\parallel$	song song
$[AB]$	đoạn thẳng AB
$d^\circ P$	bậc của đa thức P
$a \mid b$	b chia hết cho a
$a \nmid b$	b không chia hết cho a
$:=$	định nghĩa về trái bằng về phải
$=:$	định nghĩa về phải bằng về trái
$\equiv$	đồng dư (mod)
$\equiv$	đẳng thức giữa hai hàm
$\sim$	tương đương giữa hai hàm

Chương 1

Tháng 10

1.1 Bài 1

Cho a, b, c là ba số thực dương.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất số thực dương d thỏa mãn

$$\frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} = \frac{2}{d}.$$

b) Với x, y, z là các số thực dương sao cho $ax + by + cz = xyz$, hãy chứng minh bất đẳng thức

$$x + y + z \geq \frac{2}{d} \sqrt{(a+d)(b+d)(c+d)}.$$

MrMATH

1.1.1 Lời giải

a) Nhân hai vế của đẳng thức

$$\frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+d} + \frac{1}{c+d} = \frac{2}{d} \tag{1.1}$$

cho d , và sử dụng $\frac{d}{\lambda+d} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda+d}$ với $\lambda \in \{a, b, c\}$, ta biến đổi phương trình phải thỏa mãn thành

$$\frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d} = 1. \tag{1.2}$$

Khảo sát hàm

$$F(t) = \frac{a}{a+t} + \frac{b}{b+t} + \frac{c}{c+t} \tag{1.3}$$

trên miền $t \in (0, +\infty)$, ta dễ thấy F là một hàm liên tục và nghịch biến ngặt (vì a, b, c đều dương). Hơn nữa, $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t) = 3$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$. Vậy, tồn tại một giá trị $d \in (0, +\infty)$

duy nhất sao cho $F(d) = 1$. $\square$

b) Đặt $X = (a + d)x$, $Y = (b + d)y$, $Z = (c + d)z$. Khi đó, giả thiết $ax + by + cz = xyz$ có thể được phát biểu lại bằng

$$\frac{a}{a+d}X + \frac{b}{b+d}Y + \frac{c}{c+d}Z = \frac{XYZ}{(a+d)(b+d)(c+d)}, \quad (1.4)$$

còn điều phải chứng minh thì trở thành

$$\frac{d}{2(a+d)}X + \frac{d}{2(b+d)}Y + \frac{d}{2(c+d)}Z \geq \sqrt{(a+d)(b+d)(c+d)}. \quad (1.5)$$

Theo (1.2), các hệ số bên vế trái của (1.4) có tổng bằng 1. Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng/trung bình nhân mở rộng (hoặc Cauchy mở rộng) vào vế trái của (1.4), ta có

$$\frac{a}{a+d}X + \frac{b}{b+d}Y + \frac{c}{c+d}Z \geq X^{\frac{a}{a+d}}Y^{\frac{b}{b+d}}Z^{\frac{c}{c+d}}, \quad (1.6)$$

và từ đó, phối hợp với giả thiết (1.4), ta suy ra

$$X^{\frac{d}{a+d}}Y^{\frac{d}{b+d}}Z^{\frac{d}{c+d}} \geq (a+d)(b+d)(c+d). \quad (1.7)$$

Theo (1.1), các hệ số bên vế trái của (1.5) có tổng bằng 1. Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng/trung bình nhân mở rộng vào vế trái của (1.5), ta có

$$\frac{d}{2(a+d)}X + \frac{d}{2(b+d)}Y + \frac{d}{2(c+d)}Z \geq X^{\frac{d}{2(a+d)}}Y^{\frac{d}{2(b+d)}}Z^{\frac{d}{2(c+d)}} = \left[X^{\frac{d}{a+d}}Y^{\frac{d}{b+d}}Z^{\frac{d}{c+d}} \right]^{1/2}. \quad (1.8)$$

Sử dụng (1.7) thì thu được điều phải chứng minh (1.5). $\square$

1.1.2 Phân tích lời giải

Có một cách suy luận hợp lý nào dẫn dắt ta đến con số d trong câu a) không, nếu đề bài không cho ta biết? Nói chính xác hơn, ta phải làm sao nếu đề bài đưa ra là:

Cho a, b, c là ba số thực dương. Với x, y, z thực dương sao cho $ax + by + cz = xyz$, tìm giá trị nhỏ nhất của $x + y + z$.

Hãy đặt $X = ux$, $Y = vy$, $Z = wz$, trong đó u, v, w là 3 tham số thực dương sẽ được xác định một cách “thông minh”. Giả thiết của đề bài là

$$\frac{a}{u}X + \frac{b}{v}Y + \frac{c}{w}Z = \frac{XYZ}{uvw} \quad (1.9)$$

còn biểu thức $x + y + z$ mà ta phải tìm giá trị nhỏ nhất bằng

$$\frac{1}{u}X + \frac{1}{v}Y + \frac{1}{w}Z. \quad (1.10)$$

Nếu ta đặt điều kiện

$$\frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} = 1 \quad (1.11)$$

thì các hệ số bên vế trái của (1.9) có tổng bằng 1. Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng/trung bình nhân mở rộng vào vế trái của (1.9), ta có

$$\frac{XYZ}{uvw} = \frac{a}{u}X + \frac{b}{v}Y + \frac{c}{w}Z \geq X^{\frac{a}{u}}Y^{\frac{b}{v}}Z^{\frac{c}{w}},$$

từ đó suy ra

$$X^{1-\frac{a}{u}}Y^{1-\frac{b}{v}}Z^{1-\frac{c}{w}} \geq uvw. \quad (1.12)$$

Mặt khác, cũng áp dụng Cauchy mở rộng vào (1.10), ta tìm được một chặn dưới cho (1.10), đó là

$$\frac{1}{u}X + \frac{1}{v}Y + \frac{1}{w}Z \geq \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \right) \left[X^{\frac{1}{u}}Y^{\frac{1}{v}}Z^{\frac{1}{w}} \right]^{\frac{1}{\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}}}. \quad (1.13)$$

Lần này thì kết quả có vẻ hơi phức tạp, vì tổng các hệ số bên vế trái không bằng 1, nhưng điều này không thay đổi bản chất vấn đề.

So sánh (1.13) với (1.12) gợi cho ta ý kiến sau: nếu ta muốn khai thác (1.12) để tiếp tục tìm chặn dưới cho vế phải của (1.13), thì các bộ số mũ trong (1.12) và (1.13) phải tỷ lệ với nhau. Nói cách khác, ta phải chọn u, v, w sao cho

$$\text{i) tồn tại } d \in \mathbb{R} \text{ thỏa mãn } \left(1 - \frac{a}{u}, 1 - \frac{b}{v}, 1 - \frac{c}{w} \right) = d \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w} \right)$$

$$\text{ii) } \frac{a}{u} + \frac{b}{v} + \frac{c}{w} = 1, \text{ đây chính là điều kiện (1.11).}$$

Từ ii), ta có $1 - \frac{a}{u} > 0$. Phối hợp với i) thì kéo theo $d > 0$. Từ i), ta có $u = a + d$, $v = b + d$, $w = c + d$. Thế các đẳng thức này vào ii) thì được

$$\frac{a}{a+d} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+d} = 1.$$

Đây chính là phương trình (1.2) để xác định $d (> 0)$. $\square$

Tóm lại, công dụng của các tham số u, v, w là để cho ta “nối đuôi” được (1.13) với (1.12). Đồng thời, nó cũng “dời chỗ” trường hợp dấu bằng: trong tất cả các bất đẳng thức viết trên, dấu bằng xảy ra khi $X = Y = Z$. Bài 1 này tuy không khó lắm, nhưng tiêu biểu cho một phương pháp cân bằng hệ số cần nắm vững trong bất đẳng thức. Hiểu rõ bài này thì bạn sẽ làm được bài sau:

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\tan A + 2 \tan B + 5 \tan C$, với A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn.

Đây là bài 10 của cuộc thi VMO I (2004). Chúc các bạn thành công! (đáp số : giá trị nhỏ nhất bằng 12, tương ứng với $\tan A = 3$, $\tan B = 2$, $\tan C = 1$.)

1.1.3 Một cách khác

Xin giới thiệu với các bạn một cách khác, do tác giả bài (MrMATH) cùng một thí sinh (clmt) đề xướng. Cách này có vẻ “dễ sợ”, nhưng chúng tôi sẽ cố gắng trình bày nó một cách hợp lý, tự nhiên.

Điều kiện $ax + by + cz = xyz$ có thể được viết dưới dạng

$$\frac{a}{yz} + \frac{b}{zx} + \frac{c}{xy} = 1. \quad (1.14)$$

Gọi (x, y, z) và (x_0, y_0, z_0) hai bộ số thực dương thỏa mãn (1.14). Hãy hình dung (x, y, z) là một điểm “di động” bất kỳ, còn (x_0, y_0, z_0) là một điểm “cố định”, nơi mà dấu bằng sẽ xảy ra. Hiện giờ thì dĩ nhiên ta chưa biết (x_0, y_0, z_0) nằm tại đâu. Nhưng theo bất đẳng thức trung bình cộng/trung bình nhân cho 3 số (Cauchy thường, không mở rộng), ta có

$$\frac{a}{yz} + \frac{a}{y_0^2 z_0} y + \frac{a}{y_0 z_0^2} z \geq 3 \frac{a}{y_0 z_0}. \quad (1.15)$$

Bất đẳng thức này có lợi ích gì và tại sao nghĩ ra được nó ? Một lợi ích trước mắt là khi so sánh (1.15) với (1.14), ta thấy xuất hiện các phân số $\frac{a}{yz}$ và $\frac{a}{y_0 z_0}$. Do đó, nếu ta viết hai bất đẳng thức tương tự với (1.15), tức là

$$\frac{b}{zx} + \frac{b}{z_0^2 x_0} z + \frac{b}{z_0 x_0^2} x \geq 3 \frac{b}{z_0 x_0} \quad (1.16)$$

$$\frac{c}{xy} + \frac{c}{x_0^2 y_0} x + \frac{c}{x_0 y_0^2} y \geq 3 \frac{c}{x_0 y_0} \quad (1.17)$$

rồi cộng cả 3 bất đẳng thức này lại, ta có thể sử dụng (1.14) để rút gọn kết quả. Phép cộng này dẫn đến

$$\left(\frac{b}{z_0 x_0^2} + \frac{c}{x_0^2 y_0} \right) x + \left(\frac{c}{x_0 y_0^2} + \frac{a}{y_0^2 z_0} \right) y + \left(\frac{a}{y_0 z_0^2} + \frac{b}{z_0^2 x_0} \right) z \geq 3 - 1 = 2. \quad (1.18)$$

Đến đây thì ta nhận thấy một lợi ích khác của (1.15): vì (1.15) bậc nhất đối với y, z , nên khi cộng lại, (1.18) cũng bậc nhất đối với x, y, z . Từ đó, nảy sinh ra ý tưởng chọn x_0, y_0, z_0 khéo léo, sao cho vế trái của (1.18) tỉ lệ với $x + y + z$ (biểu thức mà ta phải tìm giá trị nhỏ nhất). Vậy, ta hãy đòi hỏi

$$\frac{b}{z_0 x_0^2} + \frac{c}{x_0^2 y_0} = \frac{c}{x_0 y_0^2} + \frac{a}{y_0^2 z_0} = \frac{a}{y_0 z_0^2} + \frac{b}{z_0^2 x_0}, \quad (1.19)$$

và cũng đừng quên điều kiện

$$\frac{a}{y_0 z_0} + \frac{b}{z_0 x_0} + \frac{c}{x_0 y_0} = 1. \quad (1.20)$$

Hệ phương trình (1.19)–(1.20) tuy không khó giải, nhưng các phép tính tương đối dài, nên chúng tôi chỉ xin ghi ra đáp số, mời các bạn kiểm lại. Ta được

$$x_0 = \sqrt{\frac{(b+d)(c+d)}{a+d}}, \quad y_0 = \sqrt{\frac{(c+d)(a+d)}{b+d}}, \quad z_0 = \sqrt{\frac{(a+d)(b+d)}{c+d}}, \quad (1.21)$$

với d là đại lượng phụ trong câu hỏi a). Khi đó, ta cũng chứng minh được rằng (1.18) tương đương với điều phải chứng minh trong câu b). $\square$

1.2 Bài 2

Các số nguyên dương được tô bằng hai màu trắng và đen. Biết rằng tổng hai số khác màu luôn mang màu đen, và có vô hạn các số mang màu trắng. Chứng minh rằng tổng và tích của hai số mang màu trắng cũng là các số mang màu trắng.

[từ một bài cũ]

1.2.1 Lời giải

Gọi p là số nguyên dương nhỏ nhất màu trắng. Con số này tồn tại, vì theo giả thiết, ta có vô hạn số màu trắng.

Nhận xét rằng nếu a là một số trắng, với $a > p$, thì $a - p$ cũng phải trắng. Thật vậy, nếu $a - p$ đen, ta sẽ có

$$a = (a - p) + p = \text{đen} + \text{trắng} = \text{đen}, \quad (1.22)$$

mâu thuẫn với a trắng. Nhận xét này gợi ý cho ta tiếp tục trừ cho p như trên, đến khi nào “không trừ được nữa”. Trong ngôn ngữ toán học, ý này được biểu diễn bằng phép chia Euclid

$$a = pq + r, \text{ với } q \geq 0 \text{ và } 0 \leq r < p. \quad (1.23)$$

Khai thác nhận xét trên thì ta suy ra được r trắng. Tuy nhiên, theo định nghĩa của p thì với mọi $1 \leq r < p$ thì r đen. Do đó, ta phải có $r = 0$. Tổng kết lại các trường hợp $a > p$, $a = p$ và $1 \leq a < p$, ta có

$$a \text{ trắng} \Rightarrow a \text{ chia hết cho } p.$$

Vậy, tất cả những số không phải là bội số của p đều màu đen. Bây giờ, trong số các bội số của p , có thể có số nào màu đen không? Hãy tạm giả sử là có. Gọi n là số nhỏ nhất sao cho np đen. Khi đó,

$$(n + 1)p = np + p = \text{đen} + \text{trắng} = \text{đen}. \quad (1.24)$$

Lý luận tương tự thì tất cả các số mp , với $m \geq n$ cũng đen. Vậy, tất cả mọi số nguyên dương đều đen, ngoại trừ $p, 2p, \dots, (n - 1)p$. Nhưng điều này mâu thuẫn với giả thiết tồn tại vô hạn các số màu trắng.

Tóm lại, mọi bội số của p phải màu trắng, và chỉ có những số ấy mới màu trắng. Từ đó dễ suy ra điều phải chứng minh. $\square$

1.2.2 Nguồn gốc

Bài 2 cũng tương đối dễ, nhiều bạn thí sinh đã giải quyết thành công. Thật ra, nó là biến dạng của một bài tập có trong quyển *Problem-solving strategies* của Arthur Engel (chương 2, bài 38):

Các số nguyên dương được tô bằng hai màu trắng và đen. Biết rằng tổng hai số khác màu luôn mang màu đen, còn tích của chúng luôn mang màu trắng. Vậy, tích của hai số trắng màu gì? Tìm tất cả các phép tô màu thỏa mãn các điều kiện đưa ra.

Ta thấy giả thiết *tích của hai số khác màu luôn mang màu trắng* trong bài gốc đã được thay thế bởi *có vô hạn số màu trắng* trong bài 2. Những giả thiết đó đều có tính cách phụ thuộc. Giả thiết *tổng hai số khác màu luôn mang màu đen* mới thực sự thiết yếu. Lời giải đưa ra cho bài 2 khai thác triệt để giả thiết chính yếu này.

1.3 Bài 3

Cho $a_1, a_2, \dots, a_m$ là các số nguyên dương ($m \geq 1$). Xét dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, với

$$u_n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n.$$

Biết rằng dãy này có hữu hạn ước số nguyên tố. Chứng minh rằng $a_1 = a_2 = \dots = a_m$.

K09

1.3.1 Lời giải

Trước tiên, ta cần làm sáng tỏ thế nào là *dãy có hữu hạn ước số nguyên tố*. Mỗi số hạng u_n của dãy đều dĩ nhiên có hữu hạn ước số nguyên tố. Gọi $\mathcal{D}(u_n)$ là tập hợp (hữu hạn) của những ước số nguyên tố của u_n . Giả thiết của đề bài nói rằng tập hợp

$$\mathcal{D}(u) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(u_n) \tag{1.25}$$

cũng hữu hạn. Vậy, hãy gọi các phần tử của $\mathcal{D}(u)$ là

$$\mathcal{D}(u) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}. \tag{1.26}$$

Khi có lũy thừa của một số nguyên, trong đó ta “kiểm soát” được số mũ, một phản xạ tốt là nên nghĩ đến định lý nhỏ của Fermat. Theo định lý này thì với mọi $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k$, ta có

$$a_i^{p_j-1} \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } p_j), & \text{nếu } p_j \nmid a_i \\ 0 & (\text{mod } p_j), & \text{nếu } p_j \mid a_i. \end{cases} \tag{1.27}$$

$$\tag{1.28}$$

Điều này gợi ý cho ta chọn $n = N(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)$, với $N \geq 1$ bất kỳ, vì khi đó ta sẽ có $a_i^n \equiv 1$ hoặc $0 \pmod{p_j}$. Lấy tổng trên i thì ta có thể hy vọng suy ra được một điều gì đó về $u_n \pmod{p_j}$, thậm chí dẫn đến “mâu thuẫn” khi biến đổi j và tăng N . Thật ra thì muốn thành công, hướng giải này cần phải được bổ túc bởi một số ý kiến có tính cách kỹ thuật. Nhưng chúng tôi đã cố ý trình bày sơ lược cốt ý như trên cho dễ hiểu. Sau đây mới là lời giải thực thụ.

Đặt d là ước số chung lớn nhất của $a_1, a_2, \dots, a_m$. Ta có thể viết $a_i = db_i$, trong đó các số nguyên dương b_i nguyên tố cùng nhau. Dễ thấy rằng dãy số $\{v_n\}_{n=1}^\infty$, định nghĩa bởi

$$v_n = b_1^n + b_2^n + \dots + b_m^n, \tag{1.29}$$

cũng có hữu hạn ước số nguyên tố. Gọi

$$\mathcal{D}(v) = \{q_1, q_2, \dots, q_\ell\}. \quad (1.30)$$

là tập hợp các ước số nguyên tố của dãy v_n . Hiển nhiên là $\mathcal{D}(v) \subset \mathcal{D}(u)$.

Chọn số nguyên dương χ đủ lớn sao cho $q_j^\chi > m$ với mọi $1 \leq j \leq \ell$. Điều này khả thi, vì $\ell < \infty$. Theo định lý hàm Euler (mở rộng định lý nhỏ của Fermat) thì ta có

$$b_i^{\phi(q_j^\chi)} \equiv \begin{cases} 1 & (\text{mod } q_j^\chi), & \text{nếu } q_j \nmid b_i \\ 0 & (\text{mod } q_j^\chi), & \text{nếu } q_j \mid b_i, \end{cases} \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

với mọi $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq \ell$, và ϕ là hàm Euler. Xin lưu ý: phần thứ nhì của khẳng định trên, tức là (1.32), không nằm trong định lý hàm Euler và phải được kiểm tra trực tiếp. Thật vậy, nếu b_i chia hết cho q_j thì $b_i^{\phi(q_j^\chi)}$ chia hết cho $q_i^{\phi(q_j^\chi)}$. Nhưng

$$\phi(q_j^\chi) = q_j^\chi - q_j^{\chi-1} = q_j^{\chi-1}(q_j - 1) \geq 2^{\chi-1} \quad (1.33)$$

và $2^{\chi-1} \geq \chi$ nếu ta chọn $\chi \geq 3$. Vậy, $b_i^{\phi(q_j^\chi)}$ cũng sẽ chia hết cho q_i^χ .

Bây giờ, ta đặt

$$n(N) = N \prod_{j=1}^{\ell} \phi(q_j^\chi). \quad (1.34)$$

Từ (1.31)–(1.32), ta có $b_i^{n(N)} \equiv 1$ hoặc $0 \pmod{q_j}$, tùy theo b_i không chia hết hay chia hết cho q_j . Dựa trên (1.29), ta thấy rằng xét theo modulo q_j^χ , số hạng $v_{n(N)}$ đồng dư với tổng của m số bằng 1 hoặc 0. Các số này không thể bằng 0 hết được, vì nếu sự kiện này xảy ra, thì tất cả các b_i sẽ phải chia hết cho q_j , và điều này mâu thuẫn với tính chất các b_i nguyên tố cùng nhau. Vậy, $v_{n(N)}$ đồng dư với một tổng số s_N nào đó, với $1 \leq s_N \leq m$. Tuy nhiên, vì $m < q_i^\chi$ nên $s_N \not\equiv 0 \pmod{q_j^\chi}$.

Điều này chứng tỏ rằng nếu ta xét phân tích của $v_{n(N)}$ thành thừa số nguyên tố

$$v_{n(N)} = \prod_{j=1}^{\ell} q_j^{\tau_j(N)} \quad (1.35)$$

thì bắt buộc số mũ $\tau_j(N)$ phải nhỏ hơn χ , tức là $\tau_j(N) \leq \chi - 1$. Do đó, với mọi $N \geq 1$ thì $v_{n(N)}$ bị chặn bởi

$$v_{n(N)} \leq \prod_{j=1}^{\ell} q_j^{\chi-1}. \quad (1.36)$$

Việc này chỉ có thể xảy ra khi $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, hay $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. $\square$

1.3.2 Một bài tương tự

Vài ngày sau khi đề thi tháng 10 được công bố (01/10), có một số thành viên Diễn đàn báo cáo cho ban tổ chức biết rằng bài 3 “đã” có trên MathLinks (<http://www.mathlinks.ro>). Thật ra, bài trên Mathlinks được gửi sau, vào ngày 21/10. Dù sao đi nữa thì đây cũng là một sự trùng lặp ý tưởng rất đáng tiếc. Cũng phải nói rằng trên MathLinks chỉ có lời giải cho trường hợp $m = 2$ (tương đối dễ hơn vì không cần phải chọn χ).

Bài 3 có thể xem là bài khó nhất của tháng 10. Nó là một trong những bài toán mà tác giả (K09) đã khảo sát, liên quan đến dãy số định nghĩa bằng tổng các lũy thừa. Dưới đây là một trong những kết quả ta có thể thu được. Theo kiến thức hiện tại của chúng tôi thì đây là một kết quả mới.

Cho $a_1, a_2, \dots, a_m$ là các số nguyên dương ($m \geq 1$). Xét dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, với $u_n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n$. Giả sử với mọi n đủ lớn thì u_n là số chính phương. Chứng minh rằng m là số chính phương.

Bài này không dễ. Bạn nào muốn trao đổi thêm về đề tài này thì xin liên lạc với K09 trên Diễn đàn.

1.3.3 Hai câu hỏi mở

Để mở rộng bài 3, chúng tôi có hai câu hỏi mở sau đây, dường như cũng rất khó.

1. Cho $a_1, a_2, \dots, a_m$ là các số nguyên dương ($m \geq 1$). Xét dãy số $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, với $u_n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n$. Giả sử dãy này có hữu hạn ước số chính phương. Chứng minh rằng $a_1 = a_2 = \dots = a_m$.
2. Tồn tại hay không một dãy số nguyên $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ sao cho
 - (a) có vô hạn các số hạng a_i khác 0;
 - (b) dãy $u_n = a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n$ chỉ có hữu hạn ước số nguyên tố.

1.4 Bài 4

-
- a) Cho tam giác ABC và một điểm I nằm trong tam giác. Giả sử $\angle IBA > \angle ICA$ và $\angle IBC > \angle ICB$. Chứng minh rằng, nếu ta kéo dài BI, CI cắt AC, AB tại B', C' tương ứng, thì $BB' < CC'$.
 - b) Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và phân giác AD . Chứng minh rằng với mọi điểm I, J thuộc đoạn $[AD]$ và $I \neq J$, ta luôn có $\angle JBI > \angle JCI$.
 - c) Cho tam giác ABC có $AB < AC$, với phân giác AD . Chọn M, N lần lượt thuộc các đoạn CD, BD sao cho AD là phân giác của góc $\angle MAN$. Trên đoạn $[AD]$ lấy điểm I tùy ý (khác D). Các đường thẳng BI, CI cắt AM, AN tại B', C' . Chứng minh rằng $BB' < CC'$.
-

duantien

1.4.1 Lời giải

a) Do $\angle IBA > \angle ICA$ nên ta có thể lấy $C'' \in [IC']$ sao cho $\angle IBC'' = \angle ICA$. Do $\angle IBC > \angle ICB$, nên

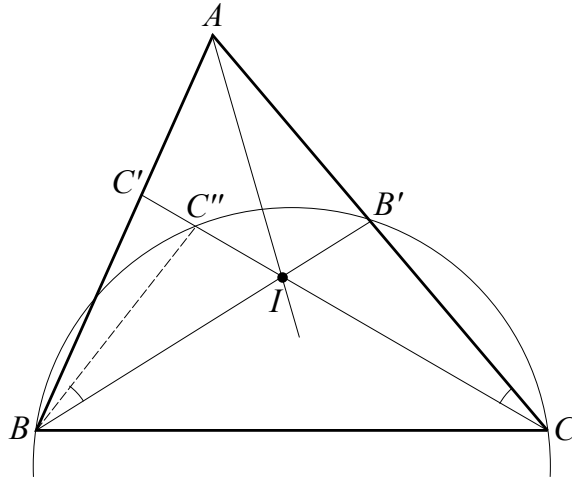
$$\angle C''BC = \angle IBC + \angle IBC'' > \angle ICB + \angle ICA = \angle B'CB. \quad (1.37)$$

Mặt khác, dễ thấy rằng

$$\angle C''BC + \angle B'CB < \angle C'BC + \angle B'CB = 180^\circ - \angle A < 180^\circ. \quad (1.38)$$

Phối hợp (1.37) và (1.38) thì ta được

$$\angle B'CB < \angle C''BC < 180^\circ - \angle B'CB. \quad (1.39)$$



Hình 1.1: Bài 4, câu a)

Gọi R bán kính vòng tròn ngoại tiếp tứ giác $B'C''BC$ (xem hình 1.1). Ta có

$$\begin{aligned} CC''^2 &= 2R^2 - 2R^2 \cos(2\angle C''BC) = 4R^2 \sin^2 \angle C''BC \\ BB'^2 &= 2R^2 - 2R^2 \cos(2\angle B'CB) = 4R^2 \sin^2 \angle B'CB. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Từ (1.39), ta có $\sin \angle B'CB < \sin \angle C''BC$. Vậy, hai đẳng thức (1.40) đưa đến kết luận $BB' < CC'' < CC'$. $\square$

b) Tất nhiên, ta có thể coi J nằm trên đoạn $[AI]$. Lấy E điểm đối xứng của B qua AD . Gọi F là đỉnh thứ tư của hình thang cân $CIJF$ (xem hình 1.2). Vì một hình thang cân luôn nội tiếp được, ta có

$$\angle ICF = 180^\circ - \angle IJF = 180^\circ - \angle AIC = \frac{1}{2}\angle A + \angle AEJ > \angle AEJ \quad (1.41)$$

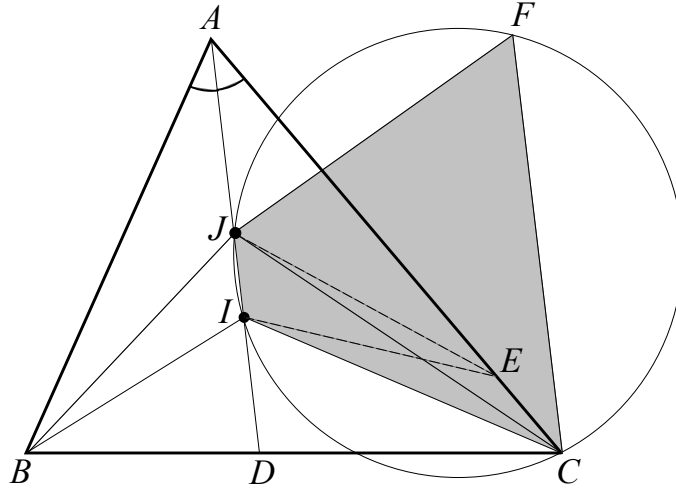
nên tia CA nằm trong góc ICF . Hơn nữa,

$$\angle EJI = \frac{1}{2}\angle A + \angle AEJ = \frac{1}{2}\angle A + \angle ABJ < \frac{1}{2}\angle A + \angle B \quad (1.42)$$

và

$$\angle FJI = \angle FIA = 180^\circ - (\frac{1}{2}\angle A + \angle ICA) \geq 180^\circ - (\frac{1}{2}\angle A + \angle C) = \frac{1}{2}\angle A + \angle B \quad (1.43)$$

nên ta suy ra $\angle EJI < \angle FJI$. Điều này chứng tỏ rằng E nằm trong hình thang $CIJF$. Nói riêng là E nằm trong cung chứa góc $\angle JCI$ dựng trên đoạn $[IJ]$. Vậy, $\angle JBI = \angle JEI > \angle JCI$. $\square$

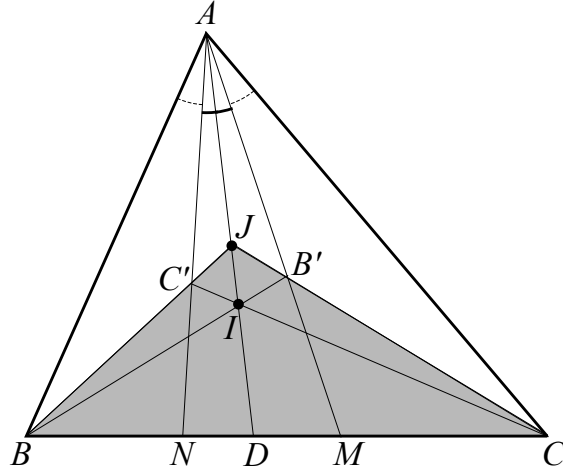


Hình 1.2: Bài 4, câu b)

c) Vẽ hình cẩn thận, ta có “cảm giác” là BC' và CB' cắt nhau tại một điểm $J \in [AD]$. Ta hãy tạm giả sử nhận xét này thật và thiết lập kết quả câu c). Sau đó, ta sẽ tìm cách chứng minh nhận xét này.

Áp dụng câu b) vào tam giác ABC và cặp điểm (I, J) , ta có $\angle JBI > \angle JCI$. Áp dụng câu b) vào tam giác ABC và cặp điểm (I, D) , ta có $\angle IBC > \angle ICB$. Hai bất đẳng thức này cho phép áp dụng câu a) vào tam giác JBC và điểm I . Khi đó, ta suy ra $BB' < CC'$.

Để kết thúc, ta phải chứng minh rằng BC' , CB' và AD đồng quy. Ta sẽ thiết lập điều này một cách gián tiếp: ta đặt $J = BC' \cap AD$, $B'' = JC \cap AM$ và cố gắng chứng minh rằng BB'' , CC' và JD đồng quy. Khi đó, điểm đồng quy bắt buộc phải là $CC' \cap AD = I$, và từ đó $B'' = B'$.



Hình 1.3: Bài 4, câu c)

Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác JDB và cát tuyến $AC'N$, ta có (xem hình 1.4)

$$\frac{C'J}{C'B} \cdot \frac{NB}{ND} \cdot \frac{AD}{AJ} = 1. \quad (1.44)$$

Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác JDC và cát tuyến $AB''M$, ta có

$$\frac{B''J}{B''C} \cdot \frac{MC}{MD} \cdot \frac{AD}{AJ} = 1. \quad (1.45)$$

Chia (1.44) cho (1.45), rồi cho hai phân số qua vế phải, ta được

$$\frac{C'J}{C'B} \cdot \frac{B''C}{B''J} = \frac{ND}{NB} \cdot \frac{MC}{MD} = \frac{DN}{DM} \cdot \frac{MC}{NB}. \quad (1.46)$$

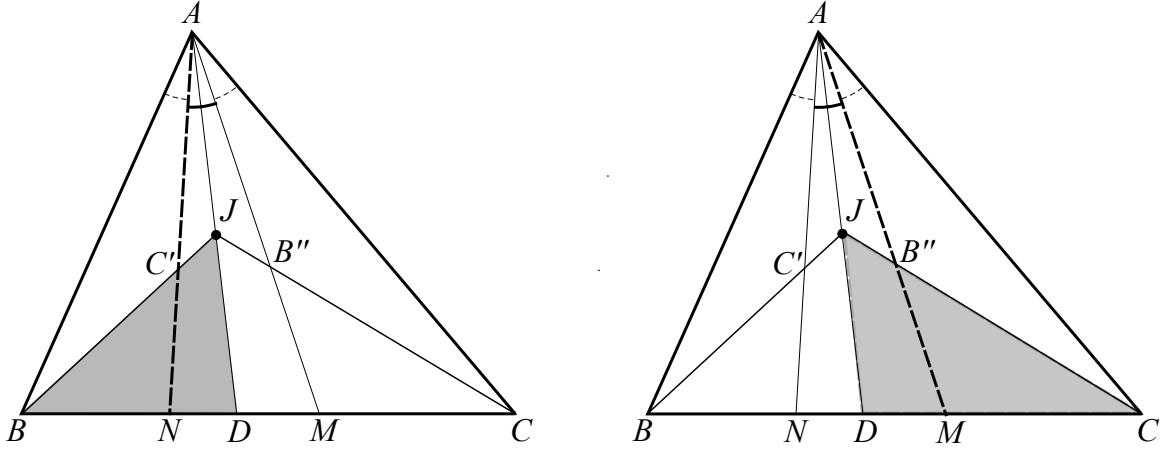
Mặt khác, theo tính chất đường phân giác thì

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad \text{và} \quad \frac{DN}{DM} = \frac{AN}{AM}. \quad (1.47)$$

Dùng (1.47), ta biến đổi (1.46) thành

$$\frac{C'J}{C'B} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{B''C}{B''J} = \frac{AN}{AM} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{MC}{NB} = \frac{S(ABN)}{S(ACM)} \cdot \frac{MC}{NB} = 1 \quad (1.48)$$

ký hiệu S tượng trưng cho diện tích của tam giác. Theo định lý Ceva thì các đường thẳng BB'' , CC' và JD phải đồng quy. $\square$



Hình 1.4: Áp dụng 2 lần Menelaus

1.4.2 Bình luận

Bài 4 cũng là một bài khó, và sẽ là một bài rất khó nếu chỉ có câu c), không có hai câu a) và b) đóng vai bổ đề. Tác giả (duantien) đi đến bài toán này khi tìm cách tổng quát định lý Steiner-Lehmus. Xin nhắc lại vắn tắt nội dung của định lý Steiner-Lehmus.

Cho tam giác ABC . Xét hai đường phân giác trong BB' và CC' của các góc $\angle B$ và $\angle C$, với $B' \in [AC]$ và $C' \in [AB]$. Nếu $AB < AC$ thì $BB' < CC'$.

Ta cũng đạt được kết quả của câu c), mục đích chính của bài này, bằng một con đường khác. Thay vì a) và b), ta có thể dùng hai bổ đề sau, cũng do duantien đề nghị:

1. Cho tam giác ABC với $AB < AC$. Xét trung tuyến AM , phân giác AD , cùng một điểm I bất kỳ trong tam giác AMD , nhưng không nằm trên đoạn MD . Các đường thẳng BI, CI cắt lần lượt AC, AB tại E, F . Chứng minh rằng $BE < CF$.
2. Cho tam giác ABC với $AB < AC$. Xét một điểm J bất kỳ trên đường phân giác AD . Chứng minh rằng $CJ > BJ$ và $\angle ABJ > \angle ACJ$.

Còn hai bổ đề a) và b) thật ra là do Hatucdao đề xướng. Sở dĩ con đường này được chọn làm đề bài vì nó tương đối dễ hơn (dù chỉ “tương đối” thôi!). Riêng câu b) còn có nhiều cách chứng minh. Trong số các bạn dự thi, hầu như mỗi người đều có một cách khác biệt ít nhiều với lời giải chính thức trên!

Chương 2

Tháng 11

2.1 Bài 5

Cho a, b hai số nguyên dương. Hỏi có bao nhiêu số nguyên có thể được biểu diễn dưới dạng $ap + bq$, trong đó p, q là những số nguyên không âm, và $p + q \leq 2005$.

lehoan

2.1.1 Lời giải

Thay 2005 bằng số nguyên n , ta xét vấn đề tổng quát: tìm u_n , số các số nguyên có thể được biểu diễn dưới dạng $ap + bq$, với $p + q \leq n$, trong đó a, b là hai số nguyên dương cho trước, p, q là những số nguyên không âm.

Dễ thấy rằng nếu $a = b (\geq 1)$ thì $u_n = n + 1$. Vậy, ta chỉ cần nghiên cứu trường hợp $a > b \geq 1$ (khi đó, $a \geq 2$). Sở dĩ ta có quyền giả sử vậy là vì a, b đóng vai trò đối xứng trong bài. Chia a, b cho ước số chung lớn nhất của chúng, ta không đổi đáp số u_n . Vậy, ta cũng có thể giả sử a, b nguyên tố cùng nhau. Với các giả thiết này, ta sẽ tìm một công thức truy hồi cho dãy u_n .

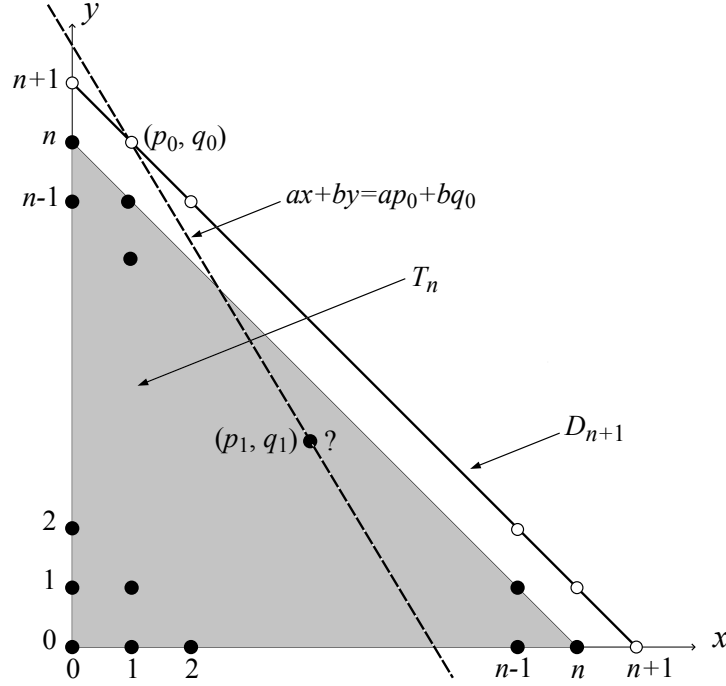
Trong $\frac{1}{4}$ -mặt phẳng (x, y) , ta xét tam giác

$$T_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q \leq n\}. \quad (2.1)$$

Gọi là “tam giác” cho tiện, chứ thật ra đó là tập hợp rời rạc của những điểm có tọa độ nguyên trong tam giác thực thụ $T_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq n\}$. Những điểm của T_n được tô màu đen (•) trên hình 2.1. Vẽ thêm đường thẳng

$$D_{n+1} = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = n + 1\}. \quad (2.2)$$

Một lần nữa, gọi là “đường thẳng” cho tiện, chứ đó là tập hợp rời rạc của những điểm có tọa độ nguyên trên đường thẳng thực thụ $D_{n+1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = n + 1\}$. Những điểm của D_{n+1} được tô màu trắng (o) trên hình 2.1.



Hình 2.1: Bài 5

Một số nguyên N có thể được biểu hiện dưới dạng $N = ap + bq$, $(p, q) \in T_n$, nếu đường thẳng có phương trình $ax + by = N$ xuyên qua ít nhất một điểm của T_n . Qua mỗi điểm $(p_0, q_0) \in D_{n+1}$, ta vẽ đường thẳng $ax + by = ap_0 + bq_0$. Nếu đường thẳng này xuyên qua một điểm $(p_1, q_1) \in T_n$ nào đó, thì số $N = ap_0 + bq_0$ là một số “cũ”, đã được đếm trong u_n . Ngược lại, nếu đường thẳng này không xuyên qua điểm nào của T_n , thì $N = ap_0 + bq_0$ là một số “mới”, chưa được đếm trong u_n nhưng phải được đếm trong u_{n+1} .

Tập hợp D_{n+1} gồm $n+2$ điểm. Ta phải tính xem trong đó, có bao nhiêu điểm $(p_0, q_0) \in D_{n+1}$ tương ứng một số cũ. Nhận xét rằng, theo giả thiết a, b nguyên tố cùng nhau, ta có

$$ap_0 + bq_0 = ap_1 + bq_1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ sao cho } \begin{cases} p_1 = p_0 + kb \\ q_1 = q_0 - ka = (n+1) - p_0 - ka. \end{cases} \quad (2.3)$$

Khi đó, $p_1 + q_1 = (p_0 + q_0) - k(a - b) = (n+1) - k(a - b)$. Mặt khác, dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} (p_1, q_1) \in T_n &\Leftrightarrow p_1 + q_1 \leq n, \quad p_1 \geq 0, \quad \text{và} \quad q_1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow k \geq 1, \quad p_0 + b \leq n, \quad \text{và} \quad (n+1) - p_0 - a \geq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Điều kiện chót tương đương với

$$p_0 \leq \min(n+1-a, n-b) = n+1-a \quad (2.5)$$

(vì $a \geq b + 1$). Vậy, nếu $n + 1 < a$, ta không có số cũ trên D_{n+1} . Nếu $n + 1 \geq a$, ta có đúng $n + 2 - a$ điểm ($0 \leq p_0 \leq n + 1 - a$) tương ứng với số cũ trên D_{n+1} . Tóm lại,

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n + (n + 2) - 0 = u_n + n - 2, & \text{nếu } n + 1 < a; \\ u_n + (n + 2) - (n + 2 - a) = u_n + a, & \text{nếu } n + 1 \geq a. \end{cases} \quad (2.6)$$

tức là $u_{n+1} = u_n + \min(a, n + 2)$. Ngoài ra, dễ thiết lập $u_0 = 1, u_1 = 3$. Phối hợp với (2.6)–(2.7) thì suy ra

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2), & \text{nếu } a > n + 1; \\ \frac{1}{2}a(a + 1) + (n - a + 1)a, & \text{nếu } a \leq n + 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Để kết thúc, ta quay trở lại đề bài và áp dụng cụ thể cho $n = 2005$ sau khi đã gộp chung lại các trường hợp vừa được xét.

1. Nếu $a = b$, ta có $u_{2005} = 2006$.

2. Nếu $a \neq b$, đặt

$$c = \frac{\max(a, b)}{\gcd(a, b)}, \quad (2.10)$$

với ký hiệu $\gcd$ = ước số chung lớn nhất. Khi đó,

- nếu $c > 2006$,

$$u_{2005} = \frac{1}{2} \cdot 2006 \cdot 2007 = 2013021; \quad (2.11)$$

- nếu $c \leq 2006$,

$$u_{2005} = \frac{1}{2}c(c + 1) + (2006 - c)c = \frac{1}{2}(4013 - c)c. \quad (2.12)$$

Sở dĩ ta phải định nghĩa c theo (2.10) là vì các công thức (2.8)–(2.9) chỉ có hiệu lực khi a, b nguyên tố cùng nhau và $a > b$. $\square$

2.1.2 Mở rộng

Lời giải trên tuy có vẻ dài dòng, nhưng bài 5 này không phải là một bài khó. Dựa trên những ý tưởng đã được trình bày, một hướng tổng quát bài 5 có thể như sau.

Cho các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_m$, với $m \geq 1$. Hỏi có bao nhiêu số hữu tỷ có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \dots + \frac{p_m}{a_m},$$

trong đó p_i là những số nguyên không âm, và $p_1 + p_2 + \dots + p_m \leq 2005$.

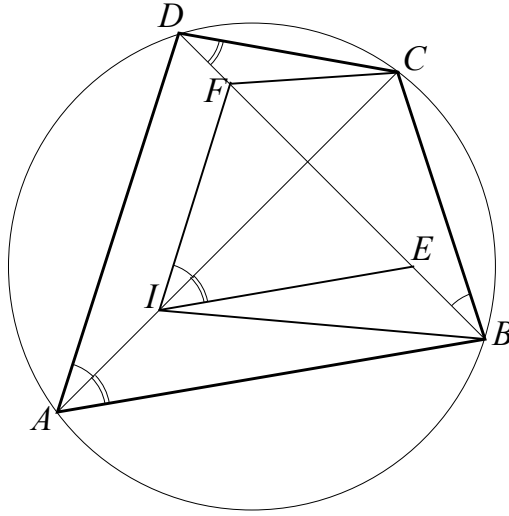
2.2 Bài 6

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Trên đường chéo AC , ta chọn một điểm I sao cho I và C nằm về hai phía khác nhau đối với BD . Trên đường chéo BD , ta lấy hai điểm E và F sao cho $IE \parallel AB$ và $IF \parallel AD$. Chứng minh rằng $\angle BIE = \angle DCF$.

lehoan

2.2.1 Lời giải

Vì $IF \parallel AD$ nên $\angle FIC = \angle DAC$. Theo giả thiết $ABCD$ nội tiếp, ta có $\angle DAC = \angle DBC$. Từ đó, $\angle FIC = \angle FBC$, cho nên tứ giác $IBCF$ nội tiếp.



Hình 2.2: Bài 6, cách 1

Do đó, $\angle BIC = \angle BFC$. Nhưng $\angle BIC = \angle BIE + \angle EIC$, còn $\angle BFC = \angle BDC + \angle DCF$ (góc ngoài của tam giác DCF). Vậy,

$$\angle BIE + \angle EIC = \angle BDC + \angle DCF. \quad (2.13)$$

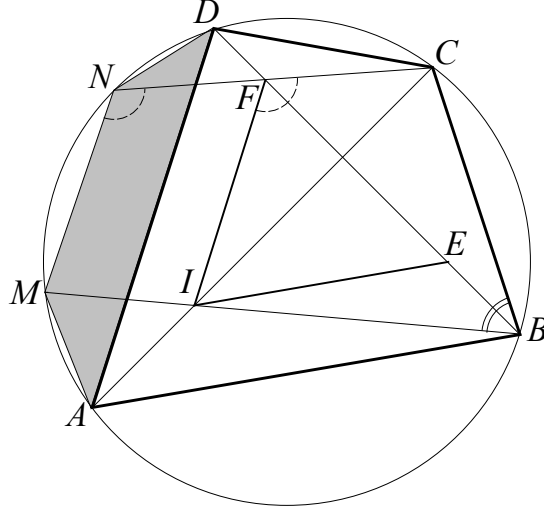
Mặt khác, $\angle EIC = \angle BAC = \angle BDC$, nên (2.13) có thể được rút gọn thành $\angle BIE = \angle DCF$. $\square$

2.2.2 Một cách khác

Lời giải trên do bạn dungCT tìm ra. Có thể coi đó là cách “ngắn gọn” nhất, không cần dựng hình phụ, không cần sử dụng khái niệm gì cao cấp hơn góc nội tiếp. Còn rất nhiều cách giải,

đa số đều phải bước qua giai đoạn $IBCF$ nội tiếp. Dưới đây là một trong những cách đó, phần chót khá ngộ nghĩnh, do tác giả (lehoan) đề xướng.

Kéo dài BI, CF cho chúng cắt vòng tròn ngoại tiếp $ABCD$ lần lượt tại M, N . Vì $IBCF$ nội tiếp nên $\angle IFC = 180^\circ - \angle IBC$. Vì $MBCN$ nội tiếp nên $\angle MNC = 180^\circ - \angle IBC$. Vậy, $\angle IFC = \angle MNC$, suy ra $MN \parallel IF \parallel AD$.



Hình 2.3: Bài 6, cách 2

Khi đó, tứ giác $ADMN$ là một hình thang. Hình thang này nội tiếp, nên phải là một hình thang cân. Vậy, $AM = DN$. Điều này kéo theo $\angle ABI = \angle DCF$, và vì $\angle ABI = \angle BIE$ (so le trong), nên $\angle BIE = \angle DCF$.

Dĩ nhiên là trường hợp $M = N$ có thể xảy ra, và khi đó ta không còn hình thang nữa. Nhưng tình huống này tương ứng với một vị trí đặc biệt, và ý tưởng chứng minh có thể được “sửa chữa” dễ dàng. $\square$

2.3 Bài 7

Tìm tất cả các hàm $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho f đơn điệu và

$$[f(x) + f(y)]^2 = f(x^2 - y^2) + f(2xy),$$

với mọi $x \geq y \geq 0$.

Hatucdao

2.3.1 Lời giải

Cho $(x, y) = (0, 0)$ vào đẳng thức của đề bài. Ta có $4f^2(0) = 2f(0)$, suy ra $f(0) = 0$ hoặc $\frac{1}{2}$. Chúng ta hãy lần lượt xét hai khả năng.

① $\boxed{f(0) = \frac{1}{2}}$

Cho $(x, y) = (1, 0)$ vào đẳng thức của đề bài, ta có $[f(1) + f(0)]^2 = f(1) + f(0)$. Sau khi đơn giản, ta được $f(1) = -\frac{1}{2}$ hoặc $\frac{1}{2}$.

- Nếu $f(1) = -\frac{1}{2}$ thì cho $(x, y) = (1, 1)$ vào đẳng thức của đề bài, ta được $f(2) = \frac{1}{2}$. Song khi đó $f(0) > f(1)$ và $f(1) < f(2)$, điều này mâu thuẫn với f đơn điệu.
- Nếu $f(1) = \frac{1}{2}$, xét dãy $x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n^2$. Cho $(x, y) = (x_n, x_n)$ vào đẳng thức của đề bài, ta có

$$4[f(x_n)]^2 = f(x_{n+1}) + \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

Từ đó, bằng qui nạp, ta có $f(x_n) = \frac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vì $x_n \rightarrow \infty$ và f đơn điệu nên ta suy ra $f(x) = \frac{1}{2}$ với mọi $x \geq 0$.

② $\boxed{f(0) = 0}$

Cho $(x, y) = (x, 0)$ vào đẳng thức của đề bài, ta có

$$[f(x)]^2 = f(x^2), \quad \text{với mọi } x \geq 0. \quad (2.15)$$

Mặt khác, cho $(x, y) = (x, x)$ vào phương trình hàm, ta có $4[f(x)]^2 = f(2x^2)$, vì $f(0) = 0$. Kết hợp hai đẳng thức này, ta có $4f(x^2) = f(2x^2)$ với mọi $x \geq 0$, hay

$$4f(x) = f(2x), \quad \text{với mọi } x \geq 0. \quad (2.16)$$

Trong phương trình hàm ban đầu, đặt $x = u + v, y = u - v$. Kết hợp với (2.16), ta được

$$\begin{aligned} [f(u+v) + f(u-v)]^2 &= f(4uv) + f(2(u^2 - v^2)) \\ &= 4[f(2uv) + f(u^2 - v^2)] \\ &= 4[f(u) + f(v)]^2 \end{aligned} \quad (2.17)$$

với mọi $u \geq v \geq 0$. Từ (2.15), ta suy ra $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Do đó, lấy căn bậc hai, ta được

$$f(u+v) + f(u-v) = 2[f(u) + f(v)], \quad \text{với mọi } u, v \geq 0. \quad (2.18)$$

Đây là *hằng đẳng thức hình bình hành*, sẽ được đề cập đến trong phần mở rộng. Từ (2.18), ta sẽ chứng minh rằng

$$f(w) = f(1)w^2, \quad \text{với mọi } w \in \mathbb{R}_+. \quad (2.19)$$

Trước tiên, dễ thấy rằng

$$f(nx) = n^2 f(x), \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.20)$$

Thật vậy, với $n = 0, 1, 2$, điều này dễ thiết lập. Giả sử khẳng định (2.20) đúng đến n . Khi đó, vì

$$f((n+1)x) + f((n-1)x) = 2[f(nx) + f(x)], \quad (2.21)$$

theo (2.18), nên

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= 2[f(nx) + f(x)] - f((n-1)x) \\ &= 2[n^2 f(x) + f(x)] - (n-1)^2 f(x) \\ &= (n+1)^2 f(x). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Điều này chứng tỏ rằng (2.20) cũng đúng với $n+1$. Áp dụng (2.20), ta có

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad (2.23)$$

với mọi m, n nguyên dương. Đặt $w = \frac{m}{n}$. Vậy,

$$f(w) = f(1)w^2, \quad \text{với mọi } w \in \mathbb{Q}_+^*. \quad (2.24)$$

Nhờ giả thiết đơn điệu của f và tính chất trù mật của $\mathbb{Q}$ trong $\mathbb{R}$, ta có (2.19). Trong (2.15), cho $x = 1$ thì ta có $f(1) = 0$ hoặc 1 . Nếu $f(1) = 0$ thì $f(x) = 0$ với mọi $x \geq 0$. Nếu $f(1) = 1$ thì $f(x) = x^2$ với mọi $x \geq 0$.

Tổng kết lại tất cả những trường hợp, ta có 3 hàm thỏa mãn điều kiện bài toán. Đó là

$$(i) \ f(x) = 0, \quad (ii) \ f(x) = \frac{1}{2}, \quad (iii) \ f(x) = x^2.$$

với mọi $x \geq 0$. $\square$

2.3.2 Mở rộng

Bài này được tác giả (Hatucdao) lấy cảm hứng từ hằng đẳng thức $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + (2xy)^2$. Như ta đã biết, hằng đẳng thức này liên quan mật thiết đến việc giải phương trình nghiệm nguyên $A^2 + B^2 = C^2$. Và chính nó là mấu chốt trong biến đổi dẫn tới (2.15), một điểm quyết định của bài toán.

Trong lời giải trên, ta cũng có một điểm then chốt khác. Đó là *hằng đẳng thức hình bình hành* (2.18). Sở dĩ nó mang tên đó là vì nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là hai véc-tơ trong mặt phẳng và $\|\cdot\|$ là ký hiệu độ dài, ta có

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2). \quad (2.25)$$

Bản chất phần ② của lời giải là chứng minh rằng một hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ đơn điệu và thỏa mãn hằng đẳng thức hình bình hành bắt buộc có dạng $f(w) = f(1)w^2$. Kết quả này thật ra tổng quát trên $\mathbb{R}^n$: mời các bạn suy nghĩ bài sau.

Cho số nguyên dương n . Tìm tất cả các hàm liên tục $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \Phi(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 2(\Phi(\mathbf{u}) + \Phi(\mathbf{v})),$$

với mọi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Nghiệm tổng quát cho phương trình hàm trên là *dạng toàn phương*

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (2.26)$$

với $a_{ij} \in \mathbb{R}$ và $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2.4 Bài 8

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}} + \frac{1}{b\sqrt{b+c}} + \frac{1}{c\sqrt{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2abc}}.$$

Hatucdao

2.4.1 Lời giải

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng $x + y + z \geq 3$, với

$$x = \sqrt{\frac{2bc}{a(a+b)}}, \quad y = \sqrt{\frac{2ca}{b(b+c)}}, \quad z = \sqrt{\frac{2ab}{c(c+a)}}. \quad (2.27)$$

Quan sát các số x, y, z , ta cố gắng tìm một mối liên hệ giữa chúng. Ta thấy các đại lượng

$$yz = \frac{2a}{\sqrt{(b+c)(c+a)}}, \quad zx = \frac{2b}{\sqrt{(c+a)(a+b)}}, \quad xy = \frac{2c}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \quad (2.28)$$

khá “đẹp”. Giả sử ta chứng minh được $xy + yz + zx \geq 3$. Khi đó, ta sẽ có

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \geq 3 \cdot 3 = 9, \quad (2.29)$$

và từ đó sẽ suy ra được $x + y + z \geq 3$. Vậy, ta hãy cố gắng chứng minh $xy + yz + zx \geq 3$. Để thực hiện mục đích đó, ta đặt

$$u = \sqrt{b+c}, \quad v = \sqrt{c+a}, \quad w = \sqrt{a+b}. \quad (2.30)$$

Khi ấy,

$$yz = \frac{w^2 + v^2 - u^2}{uv}, \quad zx = \frac{u^2 + w^2 - v^2}{vw}, \quad xy = \frac{v^2 + u^2 - w^2}{wu} \quad (2.31)$$

và

$$\begin{aligned} xy + yz + zx \geq 3 &\Leftrightarrow v(v^2 + u^2 - w^2) + w(w^2 + v^2 - u^2) + u(u^2 + w^2 - v^2) \geq 3uvw \\ &\Leftrightarrow (u^3 + v^3 + w^3) + (u^2v + v^2w + w^2u) \geq (v^2u + w^2v + u^2w) + 3uvw. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Tuy nhiên, dễ thấy bất đẳng thức cuối cùng đúng, vì

- khai triển bất đẳng thức hiển nhiên $u(u-v)^2 + v(v-w)^2 + w(w-u)^2 \geq 0$, ta được

$$(u^3 + v^3 + w^3) + (uv^2 + vw^2 + wu^2) \geq 2(u^2v + v^2w + w^2u). \quad (2.33)$$

- áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng/trung bình nhân (Cauchy) cho 3 số, ta có

$$u^2v + v^2w + w^2u \geq 3uvw. \quad (2.34)$$

Cộng (2.33) và (2.34) theo vế, rồi rút gọn, thì ta được (2.32). $\square$

2.4.2 Nguồn gốc

Bài này phát sinh khi tác giả (Hatucdao) tìm cách chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{h_A}{m_B} + \frac{h_B}{m_C} + \frac{h_C}{m_A} \leq 3. \quad (2.35)$$

trong tam giác ABC . Rủi thay, bất đẳng thức (2.35) này sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh thành công bất đẳng thức của bài 8 trong chiều... ngược lại!

2.4.3 Một cách khác

Một nét hay của cách giải trên là chỉ cần “muốn gì viết đấy”, đi cửa chính một cách khá hợp lý. Phần chót, ta cũng có thể theo một lối khác:

- khai triển bất đẳng thức Schur $u(u-v)(u-w) + v(v-w)(v-u) + w(w-u)(w-v) \geq 0$, ta được

$$(u^3 + v^3 + w^3) + 3uvw \geq 2(u^2v + v^2w + w^2u) + (uv^2 + vw^2 + wu^2). \quad (2.36)$$

- áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng/trung bình nhân (Cauchy) cho 3 số, ta có

$$2(u^2v + v^2w + w^2u) \geq 6uvw. \quad (2.37)$$

Sau đó, cộng (2.36) và (2.37) theo vế để thiết lập (2.32).

Các bạn thí sinh cũng đã tìm ra nhiều lời giải hay khác cho bài này. Xin giới thiệu cách dưới đây, khá ngắn gọn, của bạn dungCT. Đặt $p = \frac{1}{a}$, $q = \frac{1}{b}$, và $r = \frac{1}{c}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a\sqrt{a+b}} + \frac{1}{b\sqrt{b+c}} + \frac{1}{c\sqrt{c+a}} &= \frac{p}{\sqrt{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}} + \frac{q}{\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{1}{r}}} + \frac{r}{\sqrt{\frac{1}{r} + \frac{1}{p}}} \\ &= \frac{p\sqrt{pq}}{\sqrt{p+q}} + \frac{q\sqrt{qr}}{\sqrt{q+r}} + \frac{r\sqrt{rp}}{\sqrt{r+p}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Bất đẳng thức phải chứng minh có thể được chuyển về dạng

$$\frac{p}{\sqrt{2r(p+q)}} + \frac{q}{\sqrt{2p(q+r)}} + \frac{r}{\sqrt{2q(r+p)}} \geq \frac{3}{2}. \quad (2.39)$$

Sử dụng bất đẳng thức trung bình cộng/trung bình nhân cho 2 số $\sqrt{st} \leq \frac{1}{2}(s+t)$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{2r(p+q)}} + \frac{q}{\sqrt{2p(q+r)}} + \frac{r}{\sqrt{2q(r+p)}} &\geq \frac{2p}{p+q+2r} + \frac{2q}{q+r+2p} + \frac{2r}{r+p+2q} \\ &= \frac{2p^2}{p^2+pq+2rp} + \frac{2q^2}{q^2+qr+2pq} + \frac{2r^2}{r^2+rp+2qr} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ta lại dùng bất đẳng thức Buniakovski-Cauchy-Schwarz để tìm chặn dưới cho vế phải. Dễ thấy rằng

$$\sum_{\text{cyc.}} \frac{p^2}{p^2+pq+2rp} \geq \frac{\left(\sum_{\text{cyc.}} p\right)^2}{\sum_{\text{cyc.}} (p^2+pq+2rp)} \quad (2.41)$$

nên ta có thể nối tiếp (2.41) với (2.40) và thu được

$$\begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{2r(p+q)}} + \frac{q}{\sqrt{2p(q+r)}} + \frac{r}{\sqrt{2q(r+p)}} &\geq \frac{2(p+q+r)^2}{(p^2+q^2+r^2)+3(pq+qr+rp)} \\ &= \frac{2(p+q+r)^2}{(p+q+r)^2+(pq+qr+rp)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Nhưng ta biết rằng $pq+qr+rp \leq \frac{1}{3}(p+q+r)^2$. Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{2r(p+q)}} + \frac{q}{\sqrt{2p(q+r)}} + \frac{r}{\sqrt{2q(r+p)}} &\geq \frac{2(p+q+r)^2}{(p+q+r)^2+\frac{1}{3}(p+q+r)^2} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Đây là điều mong muốn (2.39). $\square$

Chương 3

Tháng 12

3.1 Bài 9

Trên một bàn cờ vua châu Âu gồm 64 (8×8) ô, hãy tìm một cách sắp đặt 9 quân hậu cùng 1 quân vua sao cho các quân hậu không thể bắt nhau (một quân hậu có thể bắt được tất cả những quân đứng cùng hàng, cùng cột, hoặc trên hai đường chéo xuyên ngang ô nó đang đứng, và những quân đó không bị cản bởi một quân khác).

[từ một bài cũ]

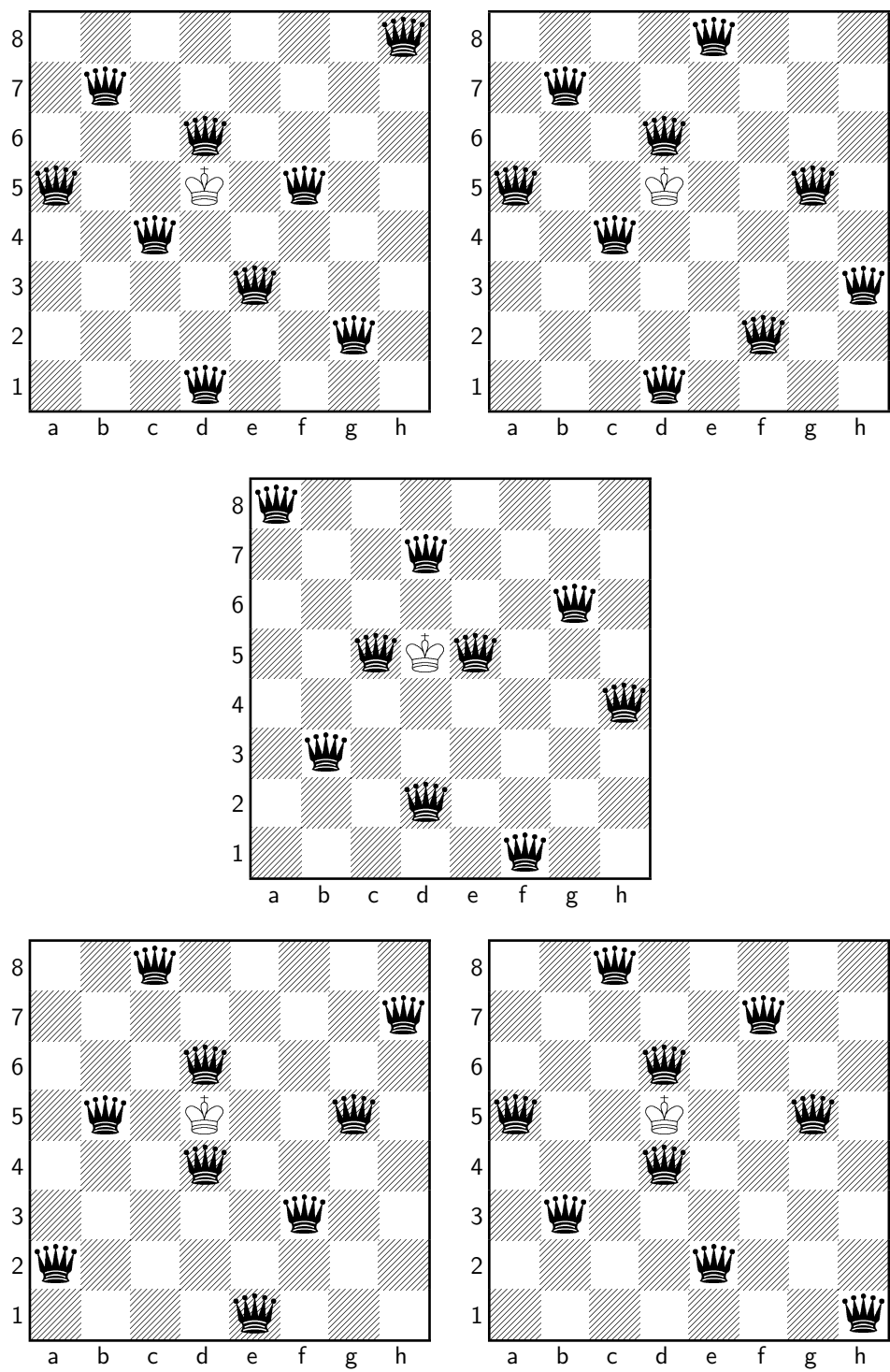
3.1.1 Lời giải

Có đến tổng cộng... 128 cách sắp thỏa mãn điều kiện đề bài! Nếu ta coi các cách sắp *tương đương* như một¹, thì khi đó có **16** cách. Để trình bày 16 cách sắp *cơ bản* này, ta có thể giả sử quân vua nằm bên trái, trên cao. Khi đó, ta sẽ có:

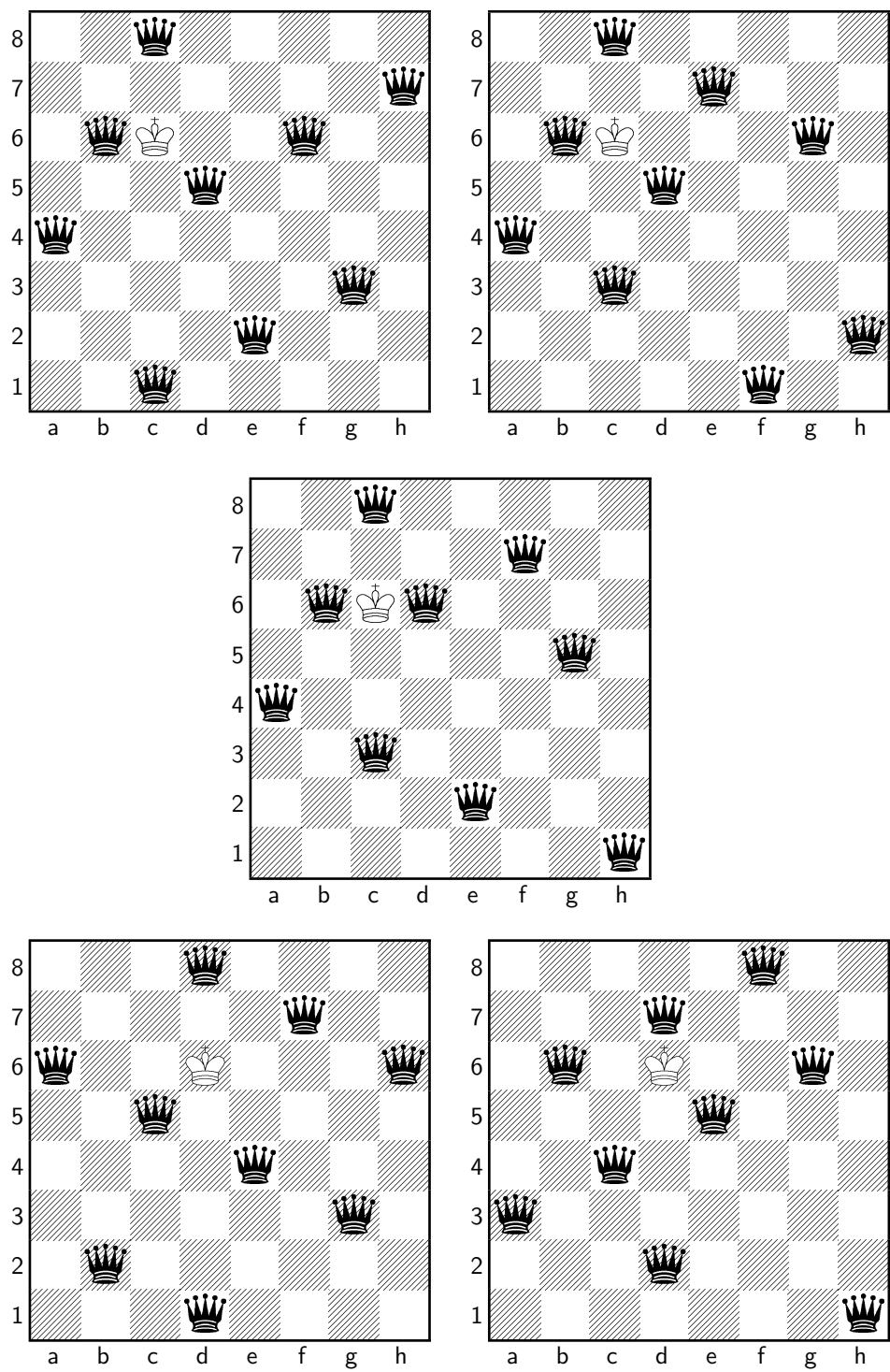
- 5 cách sắp có quân vua đứng tại trung tâm bàn cờ, ô d5. 5 cách này được thể hiện trên hình 3.1;
- 3 cách sắp có quân vua đứng trên đường chéo, ô c6, 2 cách sắp có quân vua đứng tại d6. 5 cách này được thể hiện trên hình 3.2;
- 4 cách sắp có quân vua đứng tại d7, 2 cách sắp có quân vua đứng tại c7. 6 cách này được thể hiện trên hình 3.3.

Đề bài chỉ đòi hỏi 1 cách. Ta có thể “mò mẫm” một chút, và nhận thấy phải khai thác đường chéo mã để có thể đặt nhiều quân hậu. Mặt khác, quân vua phải nằm giữa ít nhất 2 cặp quân hậu trên cùng hàng, cùng cột hoặc cùng đường chéo.

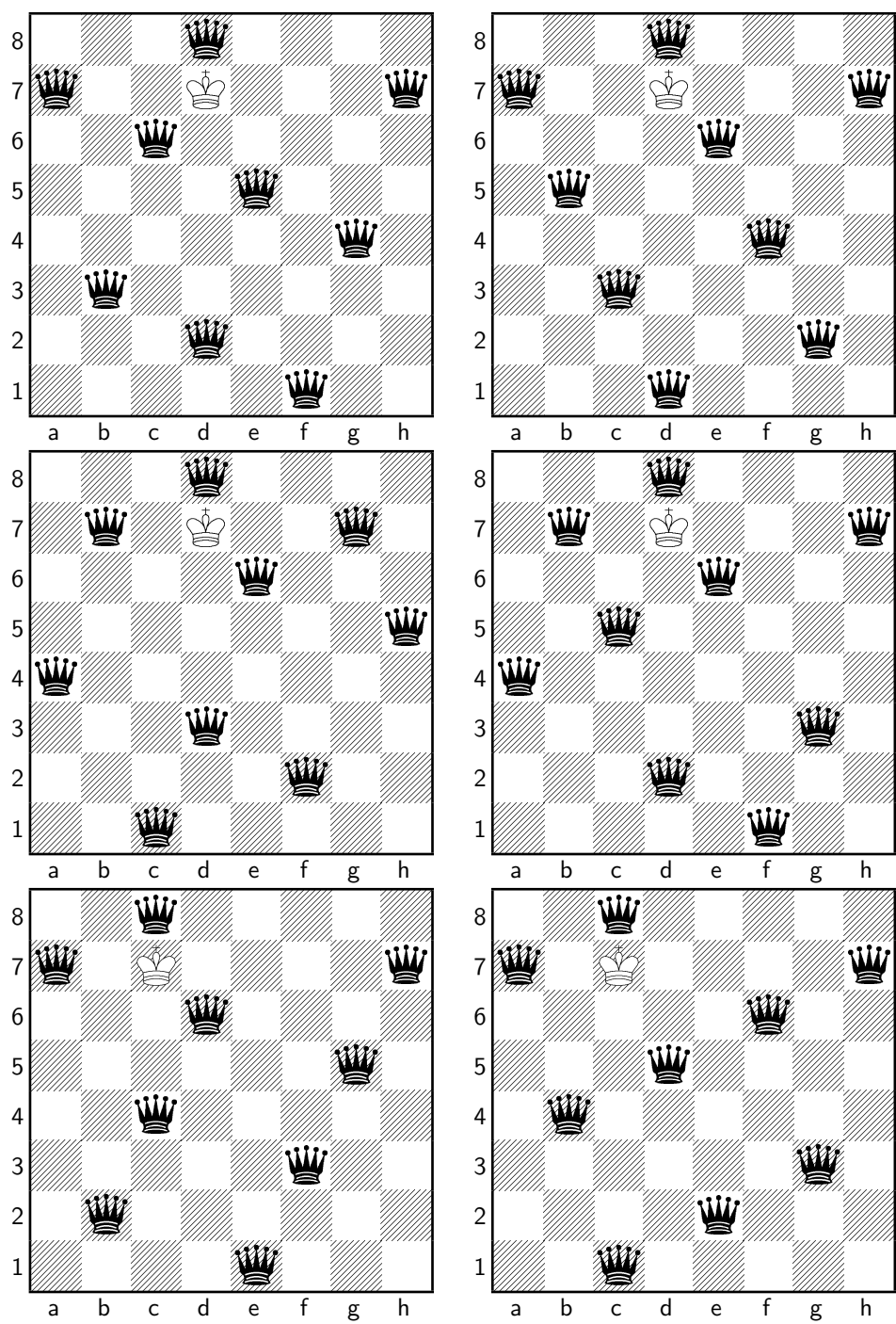
¹Hai cách sắp được gọi là *tương đương* nếu cách này có thể suy ra từ cách kia qua một phép đối xứng hoặc một phép quay trên bàn cờ.



Hình 3.1: 5 cách sắp không tương đương có quân vua tại d5



Hình 3.2: 5 cách sắp không tương đương có quân vua tại c6 hoặc d6



Hình 3.3: 6 cách sắp không tương đương có quân vua tại d7 hoặc c7

3.1.2 Nguồn gốc

Năm 1850, Gauss phát biểu bài toán sau: cho một bàn cờ vua gồm $n \times n$ ô, tìm tất cả cách sắp đặt n quân hậu trên bàn cờ đó sao cho các quân hậu không bắt được nhau. Đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về bài toán này, còn mang tên là *the Queens problem*. Đặc biệt, khi $n = 8$, thì ta có hết thảy 92 cách sắp đặt, gồm **12** cách cơ bản không tương đương.

Ta có thể nhận xét rằng n là số quân hậu lớn nhất có thể đặt lên bàn cờ $n \times n$ để chúng không bắt nhau được, nếu không có quân nào khác trên bàn cờ. Thật vậy, nếu có $n + 1$ quân hậu, theo nguyên lý Dirichlet, bắt buộc phải có ít nhất 2 quân hậu trên cùng một hàng. Khi đó, hai quân hậu này sẽ bắt nhau được, vì không có quân nào khác đứng giữa để cản.

Câu hỏi đặt ra là nếu ta cho phép sử dụng thêm một quân nào khác, có công dụng đứng cản, thì liệu có đặt được $n + 1$ quân hậu lên bàn cờ không. Câu trả lời là “có”, nếu $n \geq 6$. Chứng minh tuy không khó (qui nạp trên n), nhưng vì chi tiết cũng khá phiền phức, nên chúng tôi không trình bày nơi đây.

Gọi $C(n)$ là số cách sắp đặt cơ bản, không tương đương. Gọi $T(n)$ là số cách sắp đặt, trong đó đếm cả các cách tương đương. Các trị số đầu tiên của $C(n)$ và $T(n)$ là

n	$C(n)$	$T(n)$
5	0	0
6	2	16
7	3	20
8	16	128
9	52	396

3.1.3 Hai bài tương tự

Có rất nhiều bài về sắp quân trên bàn cờ vua. Để mở rộng bài 9, ta có thể xét thêm hai bài sau. Bài thứ nhất do MrMATH đề cử.

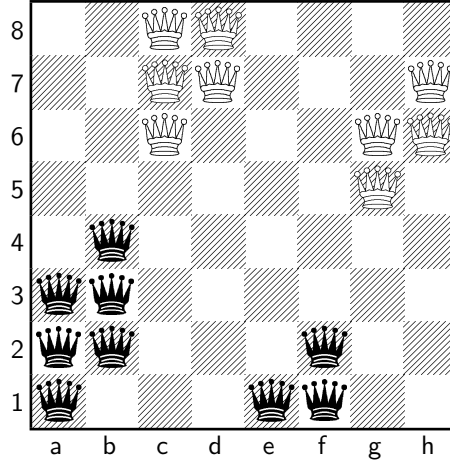
Trên bàn cờ vua châu Âu 8×8 ô, tìm cách sắp đặt 8 quân hậu cùng 1 quân vua đứng tại một ô bất kỳ sao cho các quân hậu không thể bắt nhau.

Thay vì 9 quân hậu, ta chỉ còn có 8 quân hậu. Nhưng đó là giá phải trả cho vị trí tự do của quân vua. Khi quân vua bắt đầu di chuyển vào góc a8 thì ta mới bắt đầu “kẹt”, vì khi đó, nó không còn công dụng cản hai quân hậu cùng hàng hoặc cùng cột nữa!

Bài thứ nhì cũng khá thú vị, vì nó sử dụng khái niệm màu của quân.

Trên bàn cờ vua châu Âu 8×8 ô, tìm cách sắp đặt 2 nhóm quân hậu trắng và đen, mỗi nhóm 9 quân cùng màu, sao cho hai quân hậu khác màu không thể bắt nhau.

Dưới đây là một cách giải. Mong bạn sẽ thành công trong việc tìm cách khác, không tương đương, hoặc chứng minh rằng không còn cách nào khác!



Hình 3.4: Một cách sắp đặt 2×9 quân hậu

3.2 Bài 10

- a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $m > 2$, phương trình

$$y^3 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_m^3$$

luôn có nghiệm nguyên dương.

- b) Cho số nguyên dương $n > 1$ và giả sử $n \neq 3$. Chứng minh rằng mọi số hữu tỉ $x > 0$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng

$$x = \frac{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3}{b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3}$$

trong đó a_i, b_i ($i = 1, \dots, n$) là những số nguyên dương.

K09

3.2.1 Lời giải

- a) Với $n = 3$, ta có

$$9^3 = 1^3 + 6^3 + 8^3. \quad (3.1)$$

Với $n = 4$, ta có

$$13^3 = 1^3 + 5^3 + 7^3 + 12^3. \quad (3.2)$$

Vậy, mệnh đề đưa ra đúng với 3 và 4. Giả sử nó đúng với tất cả các số nguyên từ 3 đến $n-1$ ($n \geq 5$). Ta muốn chứng minh nó cũng đúng với n . Theo giả thiết qui nạp cho $n-2$ (≥ 3), tồn tại các số nguyên dương $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ và y sao cho

$$y^3 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{n-2}^3. \quad (3.3)$$

Nhân hai vế của (3.3) cho 9^3 , ta có

$$(9y)^3 = (9x_1)^3 + (9x_2)^3 + \dots + (9x_{n-2})^3. \quad (3.4)$$

Dựa trên (3.1), ta phân tích $(9x_1)^3 = x_1^3 + (6x_1)^3 + (8x_1)^3$. Thế đẳng thức này vào (3.4) thì ta thấy $(9y)^3$ là tổng của n số lập phương. Vậy, mệnh đề đúng² với n . $\square$

b) Đề bài cho giả thiết $n > 1$ và $n \neq 3$. Vậy, dường như $n = 2$ là một trường hợp đặc biệt cần phải xét riêng. Hiện giờ thì ta chưa biết xử trường hợp này ra sao. Nhưng nếu ta tạm giả sử nó đúng, thì ta có thể dùng câu a) để giải quyết câu b) cho mọi $n > 3$. Thật vậy, cho số hữu tỉ x được biểu hiện dưới dạng

$$x = \frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}. \quad (3.5)$$

với a, b, c, d nguyên dương. Vì $n > 3$ nên $n - 1 > 2$, và theo câu a) thì phương trình

$$y^3 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{n-1}^3 \quad (3.6)$$

có nghiệm nguyên dương. Nhân mẫu số và tử số của (3.5) cho y^3 , rồi sử dụng phân tích (3.6), ta có

$$x = \frac{(ya)^3 + (yb)^3}{(yc)^3 + (yd)^3} = \frac{(x_1a)^3 + (x_2a)^3 + \dots + (x_{n-1}a)^3 + (yb)^3}{(x_1c)^3 + (x_2c)^3 + \dots + (x_{n-1}c)^3 + (yd)^3}. \quad (3.7)$$

Trong phân số chót, mẫu số và tử số đều là tổng của n lập phương. Vậy, khẳng định đề bài đúng với n .

Bây giờ ta chỉ còn phải xét trường hợp $n = 2$. Ta phải chứng minh rằng mọi số hữu tỉ đều có thể biểu hiện dưới dạng (3.5). Ta có

$$\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3} = \frac{a + b}{c + d} \times \frac{a^2 - ab + b^2}{c^2 - cd + d^2}. \quad (3.8)$$

Hãy xét vài trường hợp đặc biệt để thấy rõ hơn. Nếu ta chọn

$$b = d = a + c \quad (3.9)$$

thì khi đó $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$, và phân số trên trở thành

$$\frac{2a + c}{2c + a}. \quad (3.10)$$

Với dạng (3.10) này, ta có thể biểu hiện được tất cả các số hữu tỉ $r \in [\frac{1}{2}, 2]$. Thật vậy, nếu $r = \frac{p}{q}$ thì hệ

$$\begin{cases} 2a + c = 3p \\ a + 2c = 3q \end{cases} \quad (3.11)$$

²Nhận xét: nguyên lý qui nạp mà ta vừa áp dụng “nhảy” từ $n - 2$ lên n . Do đó, ta phải khởi đầu qui nạp với hai giá trị của n (ở đây là 3 và 4).

chỉ có nghiệm (nguyên) dương khi $r \in [\frac{1}{2}, 2]$. Bây giờ, với x hữu tỉ bất kỳ, luôn tồn tại u, v nguyên dương sao cho

$$\frac{u^3}{v^3}x \in [\frac{1}{2}, 2]. \quad (3.12)$$

Điều này phát nguồn từ tính chất: giữa hai số thực luôn tồn tại một số hữu tỉ. Do đó, tồn tại số hữu tỉ $\frac{u}{v}$ sao cho

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2x}} \leq \frac{u}{v} \leq \sqrt[3]{\frac{2}{x}}. \quad (3.13)$$

Khi đó, vì $\frac{u^3}{v^3}x$ có dạng (3.5), nên x cũng có dạng (3.5). Tóm lại, ta có điều phải chứng minh với mọi hữu tỉ dương. $\square$

3.2.2 Bình luận

Theo tác giả (K09), bài này là kết hợp của một số kết quả đã có sẵn trong các bài số học dự tuyển. Câu a) là một bài rất cổ điển. Các thủ thuật qui nạp trong hai câu a) và b) cũng là những phản xạ cần phải có.

3.3 Bài 11

Cho P một đa thức hệ số thực có bậc lớn hơn 1. Tìm tất cả các cặp (f, Q) gồm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và đa thức hệ số thực Q thỏa mãn hai điều kiện sau :

- i) với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $f(P(x) + f(y)) = y + Q(f(x))$;
- ii) tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(P(x_0)) = Q(f(x_0))$.

emvaanh

3.3.1 Lời giải

Cho $(x, y) = (x_0, v)$ vào i), với $v \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(P(x_0) + f(v)) = v + Q(f(x_0)). \quad (3.14)$$

Cho $(x, y) = (x, P(x_0) + f(v))$ vào i), ta có

$$f(P(x) + f(P(x_0) + f(v))) = P(x_0) + f(v) + Q(f(x)). \quad (3.15)$$

Thế (3.14) vào vế trái của (3.15), ta được

$$f(P(x) + v + Q(f(x_0))) = P(x_0) + f(v) + Q(f(x)). \quad (3.16)$$

Sử dụng giả thiết ii) để biến đổi vế trái,

$$f(P(x) + v + f(P(x_0))) = P(x_0) + f(v) + Q(f(x)). \quad (3.17)$$

Mặt khác, cho $(x, y) = (x, P(x_0))$ vào i), ta có $f(P(x) + f(P(x_0))) = P(x_0) + Q(f(x)) =$ vế phải của (3.17). Do đó, (3.17) trở thành

$$f(P(x) + f(P(x_0))) + v = f(P(x) + f(P(x_0))) + f(v). \quad (3.18)$$

Vậy, với mọi u có dạng $u = P(x) + f(P(x_0))$ và mọi $v \in \mathbb{R}$, ta có $f(u + v) = f(u) + f(v)$. Điều này rất hay, vì nó có nghĩa là f “gần như” có cộng tính. Chỉ là “gần như” thôi, vì hiện giờ miền xác định của u còn bị hạn chế bởi dạng $u = P(x) + f(P(x_0))$. Ta muốn chứng minh f có cộng tính “hoàn toàn”, tức là $f(u + v) = f(u) + f(v)$ với mọi $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Để thực hiện việc này, ta dùng hai bổ đề dưới đây.

Trước tiên, ta định nghĩa một tập hợp $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ là một tập hợp *tốt* nếu nó có dạng $(-\infty, t]$ hoặc $[t, +\infty)$, với $t \in \mathbb{R}$. Ta cũng ký hiệu

$$g(\Omega) = \{g(x), x \in \Omega\} \quad (3.19)$$

để chỉ ảnh của $\Omega (\subset \mathbb{R})$ qua một ánh xạ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nào đó.

Bổ đề 1 Nếu S là một đa thức hệ số thực có bậc $d^\circ S > 0$ thì $S(\mathbb{R})$ luôn chứa một tập hợp tốt. Chính $S(\mathbb{R})$ là một tập hợp tốt nếu $d^\circ S$ chẵn.

Thật vậy, nếu $d^\circ S$ lẻ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = -\varepsilon\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \varepsilon\infty \quad (3.20)$$

với $\varepsilon = 1$ (tương ứng $\varepsilon = -1$) nếu hệ số cao nhất của S dương (tương ứng âm). Tuy nhiên, S liên tục, nên $S(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, và cố nhiên chứa một tập hợp tốt. Nếu $d^\circ S$ chẵn, vì S không phải là một hằng số, nên

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = \varepsilon\infty \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \varepsilon\infty \quad (3.21)$$

với $\varepsilon = \pm 1$. Cũng vì S liên tục, tồn tại

$$t = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} S(x) & \text{nếu } \varepsilon = +1 \\ \max_{x \in \mathbb{R}} S(x) & \text{nếu } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

Khi đó, $S(\mathbb{R}) = [t, +\infty)$ hoặc $(-\infty, t]$ là một tập hợp tốt. ♦

Bổ đề 2 Cho f một hàm xác định trên $\mathbb{R}$, và $\mathcal{T}$ một tập hợp tốt. Nếu f có cộng tính trên $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$, thì f cũng có cộng tính trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tức là

$$\forall (u, v) \in \mathcal{T} \times \mathbb{R}, \quad f(u + v) = f(u) + f(v) \implies \forall (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Xét trường hợp $\mathcal{T} = [t, +\infty)$. Với $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bất kỳ, tồn tại $w \geq t$ sao cho $w + u \geq t$ (chọn $w = \max\{t, t - u\}$ chẳng hạn). Khi đó, $w \in \mathcal{T}$ và $w + u \in \mathcal{T}$, nên ta có thể tính $f(w + u + v)$ bằng hai cách:

$$\begin{aligned} 1. \quad & f(w + u + v) = f(w) + f(u + v); \\ 2. \quad & f(w + u + v) = f(w + u) + f(v) = f(w) + f(u) + f(v). \end{aligned} \quad (3.24)$$

So sánh hai kết quả thì ta suy ra $f(u+v) = f(u) + f(v)$. Trường hợp $\mathcal{T} = (-\infty, t]$ chứng minh tương tự. ♦

Theo giả thiết, đa thức $S(x) = P(x) + f(P(x_0))$ có bậc lớn hơn 1. Áp dụng Bổ đề 1 thì $S(\mathbb{R})$ chứa một tập hợp tốt $\mathcal{T}$. Từ đẳng thức (3.18) ta suy ra f có cộng tính trên $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$. Áp dụng Bổ đề 2, ta suy ra được cộng tính của f trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Vì f có cộng tính nên $f(0) = 0$ (xét $u = v = 0$). Cho $y = 0$ vào giả thiết i), ta có

$$f(P(x)) = Q(f(x)) \quad (3.25)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đẳng thức này tương đối “dễ thương” hơn i). Khởi hành từ (3.25), ta sẽ chứng minh rằng f có tuyến tính, tức là $f(x) = f(1)x$. Để thực hiện điều này, ta sẽ cần

Bổ đề 3 Cho một hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ có cộng tính, cùng hai tập hợp tốt $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ sao cho $f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Khi đó, f có tuyến tính, tức là

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(1)x.$$

Vì cộng tính, nên $f(nx) = nf(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$. Từ đó suy ra tuyến tính cho các số hữu tỉ, tức là

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \quad f(q) = qf(1) \quad (3.26)$$

Khẳng định trên tuy là một bài cổ điển, nhưng cũng xin nhắc lại vắn tắt cách giải: viết $q = \frac{m}{n}$, ta có

$$mf(1) = f(m) = f\left(\frac{nm}{n}\right) = nf\left(\frac{m}{n}\right), \quad (3.27)$$

rồi chia cho n thì được (3.26).

Để chứng minh tuyến tính trên toàn $\mathbb{R}$, ta xét trường hợp $\mathcal{A} = [a, +\infty)$ và $\mathcal{B} = [b, +\infty)$. Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Với mọi $z \geq 0$, theo cộng tính ta có $f(z) = f(b+z) - f(b)$. Nhưng vì $b+z \geq b$ nên $b+z \in \mathcal{B}$. Do đó, $f(b+z) \in f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Vậy, $f(b+z) \in \mathcal{A}$, tức là $f(b+z) \geq a$. Tóm lại,

$$z \geq 0 \Rightarrow f(z) \geq a - f(b) =: c. \quad (3.28)$$

Cho $x \in \mathbb{R}$ bất kỳ. Tồn tại hai dãy số hữu tỉ $\{r_n\}_{n \geq 1}$ và $\{s_n\}_{n \geq 1}$ hội tụ về x và thỏa mãn $r_n \leq x \leq s_n$. Áp dụng (3.28) với lần lượt $z = n(x - r_n)$ và $z = n(s_n - x)$, ta có

$$\forall n \geq 1, \quad f(nr_n) + c \leq f(nx) \leq f(ns_n) - c. \quad (3.29)$$

Vì đã biết $f(nx) = nf(x)$ và đã thiết lập tuyến tính (3.26) cho số hữu tỉ, ta có

$$\forall n \geq 1, \quad nr_nf(1) + c \leq nf(x) \leq ns_nf(1) - c. \quad (3.30)$$

Chia các vế cho n rồi cho $n \rightarrow +\infty$ thì ta được

$$\forall n \geq 1, \quad xf(1) \leq f(x) \leq xf(1). \quad (3.31)$$

Cuối cùng thì $f(x) = xf(1)$. ♦

Trở về bài toán. Dựa trên tính chất (3.25), ta hãy xét hai trường hợp.

① d°Q chẵn

Theo Bổ đề 1, $P(\mathbb{R})$ chứa một tập hợp tốt $\mathcal{B}$ và chính $Q(\mathbb{R})$ là một tập hợp tốt $\mathcal{A}$. Đẳng thức (3.25) kéo theo $f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Áp dụng Bổ đề 3, ta suy ra tuyến tính.

② d°Q lẻ

Đặt

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{và} \quad Q(x) = \sum_{\ell=0}^m b_\ell x^\ell \quad (3.32)$$

với $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, và m lẻ. Xét các đa thức hai biến

$$\begin{cases} \tilde{P}(x, y) = P(x + y) - P(x) - P(y) =: \sum_{k=0}^{n-1} R_k(y) x^k \\ \tilde{Q}(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y) =: \sum_{\ell=0}^{m-1} S_\ell(y) x^\ell \end{cases} \quad (3.33)$$

Từ định nghĩa này, dễ kiểm rằng

$$R_{n-1}(y) = na_n y \quad \text{và} \quad S_{m-1}(y) = mb_m y \quad \text{nếu } m > 1. \quad (3.34)$$

Hơn nữa, cũng dễ thấy rằng $R_k(0) = S_\ell(0) = 0$ với mọi $1 \leq k \leq n-1$, $1 \leq \ell \leq m-1$. Lợi ích của các đa thức hai biến (3.33) nằm trong phép biến đổi sau. Ta có

$$\begin{aligned} f(\tilde{P}(x, 1)) &= f(P(x+1) - P(x) - P(1)) \\ &= f(P(x+1)) - f(P(x)) - f(P(1)) \\ &= Q(f(x+1)) - Q(f(x)) - Q(f(1)) \\ &= Q(f(x) + f(1)) - Q(f(x)) - Q(f(1)) \\ &= \tilde{Q}(f(x), f(1)). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Thế dạng (3.33) vào (3.35), rồi dùng cộng tính của f , ta được

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(R_k(1)x^k) = \sum_{\ell=0}^{m-1} S_\ell(f(1))[f(x)]^\ell. \quad (3.36)$$

Để khai thác “triệt để” đẳng thức (3.36), ta xét $z \in \mathbb{R}$ bất kỳ, và đặt

$$c_k = f(R_k(1)z^k) \quad \text{và} \quad d_\ell = S_\ell(f(1))[f(z)]^\ell. \quad (3.37)$$

Thay $x = \lambda z$ vào (3.36), với $\lambda \in \mathbb{N}$, ta có

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^k = \sum_{\ell=0}^{m-1} d_\ell \lambda^\ell. \quad (3.38)$$

Đến đây thì ta phải phân biệt 3 trường hợp.

- $m < n$

Từ (3.37), ta suy ra $c_{n-1} = 0$ (hệ số của số hạng có bậc lớn nhất), hay $f(na_n z^{n-1}) = 0$. Vì lập luận này đúng với mọi $z \in \mathbb{R}$, nên $f \equiv 0$.

- $m > n$

Khi đó $m > 1$, và bắt buộc $d_{m-1} = 0$ (hệ số của số hạng có bậc lớn nhất), tức là

$$d_{m-1} = mb_m f(1)[f(z)]^{m-1} = 0. \quad (3.39)$$

Nếu $f(1) \neq 0$, thì $f(z) = 0$, nhưng điều này xảy ra với mọi $z \in \mathbb{R}$, nên ta cũng có $f \equiv 0$. Còn nếu $f(1) = 0$, thì theo (3.37), $d_\ell = 0$ với mọi $1 \leq \ell \leq m-1$. Từ (3.38), ta suy ra $c_{n-1} = 0$. Tương tự với trường hợp trên ($m < n$), $f \equiv 0$.

- $m = n$

Từ (3.38), so sánh các số hạng có bậc lớn nhất, ta suy ra $c_{m-1} = d_{m-1}$, hay

$$f(ma_m z^{m-1}) = mb_m f(1)[f(z)]^{m-1}. \quad (3.40)$$

Nếu $f(1) = 0$, ta có $f(ma_m z^{m-1}) = 0$ với mọi $z \in \mathbb{R}$, nên $f \equiv 0$. Còn nếu $f(1) \neq 0$, thì ảnh của $\mathbb{R}$ qua các ánh xạ $z \mapsto ma_m z^{m-1}$ và $z \mapsto mb_m f(1)z^{m-1}$ là hai tập hợp tốt $\mathcal{B}$ và $\mathcal{A}$ nào đó (do Bổ đề 1 và $m-1$ chẵn). Đẳng thức (3.40) kéo theo $f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Áp dụng Bổ đề 3 thì giải quyết được trường hợp này.

Tóm lại, trong cả 3 trường hợp trên, lúc nào ta cũng viết được $f(x) = f(1)x$. Như thế là chứng minh được tuyến tính cho f .

Một khi đã có tuyến tính thì bài toán gần như xong. Gọi $\mu = f(1)$. Thế $f(x) = \mu x$ vào giả thiết i) ban đầu, và khai thác cộng tính của f , ta có

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \mu P(x) + \mu^2 y = y + Q(\mu x). \quad (3.41)$$

Đồng nhất hóa các hệ số của y thì ta được $\mu = \pm 1$. Kết luận, bài toán có hai nghiệm

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(x) = x, \quad Q(x) = P(x); \\ 2) \quad & f(x) = -x, \quad Q(x) = -P(-x). \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.3.2 Bình luận

Có thể nói đây là bài khó nhất của tháng 12, đồng thời cũng là một trong những bài khó nhất của kỳ thi VMEO II. Bài này được tác giả (emvaanh) lấy cảm hứng từ bài dưới đây, của Rumani. Ta sẽ gọi nó là bài **A**.

Cho P một đa thức có bậc lớn hơn 1. Tìm mọi hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ có cộng tính thỏa

$$f(P(x)) = P(f(x))$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Trong bài **A**, cộng tính là một giả thiết phải được *cung cấp ngay từ đầu*, vì không có cách nào suy ra nó từ phương trình hàm. Hơn nữa, nếu không đòi hỏi cộng tính, bài **A** sẽ không có nghĩa (dù ta vẫn miêu tả được các nghiệm, nhưng cấu trúc của chúng không có gì đặc biệt).

Trong bài 11, cộng tính tuy không được liệt kê trong giả thiết, nhưng thật ra nó là *hậu quả* của hai điều kiện đưa ra. Phương pháp cổ tình “che giấu” cộng tính xuất phát từ một bài khác, của Trung Quốc, mà ta sẽ gọi là bài **B**.

Cho n một số nguyên dương lớn hơn 1. Tìm mọi hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa

$$f(x^n + f(y)) = y + [f(x)]^n$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Trong bài **B**, cộng tính được ngầm “lồng” vào phương trình hàm. Để chuyển từ bài **B** qua bài 11, đơn thức x^n đã được thế bằng đa thức bất kỳ $P(x)$ bên vế trái. Để vẫn có thể suy ra cộng tính, ta phải trả giá tính tổng quát của P bằng một giả thiết bổ sung, đó là là ii). Mặt khác, để tăng phần “rối rắm”, $[f(x)]^n$ đã được thế bằng $Q(f(x))$ bên vế phải, và bây giờ ta phải tìm một cặp (f, Q) chứ không phải một hàm f mà thôi. Tuy nhiên, điều này không thay đổi bản chất vấn đề và cũng không làm cho nó khó hơn.

Một số thành viên đã đặt câu hỏi vì sao cần giả sử bậc của P lớn hơn 1 trong bài 11 (hoặc $n > 1$ trong bài **B**). Hãy xét trường hợp $P(x) = x$ (hoặc $n = 1$ trong bài **B**). Khi đó, phương trình hàm phải giải là

$$f(x + f(y)) = y + f(x). \quad (3.43)$$

Ta cũng suy ra được cộng tính cho f . Từ đó, phương trình hàm trở thành $f(f(y)) = y$. Nhưng các nghiệm của phương trình này không “đẹp” (cho dù đã có cộng tính), cấu trúc của chúng không có ý nghĩa gì đáng kể (dù ta vẫn miêu tả được một lớp nghiệm).

3.4 Bài 12

a) Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại hằng số dương c_k thỏa mãn

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq c_k(x + y + z)^k$$

với mọi số thực dương.

b) Với các số k tìm được, hãy xác định số c_k lớn nhất.

Hatucdao

3.4.1 Lời giải

a) Ta sẽ thiết lập $k \in [0, 2]$ là điều kiện cần và đủ. Thật vậy, nếu $k < 0$ thì xét trường hợp đặc biệt $x = y = z = w$ và cho $w \rightarrow 0^+$. Khi đó

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) &= (w^2 + 1)^3 \rightarrow 1 \\ (x + y + z)^k &= (3w)^k \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Vì thế, không thể nào chọn c_k để cho vế phải bị chặn trên bởi vế trái.

Nếu $k > 2$ thì ta hãy xem x là một biến, còn y, z là hai tham số cố định, và cho $x \rightarrow +\infty$. Khi đó

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) &\sim (y^2 + 1)(z^2 + 1)x^2 \\ (x + y + z)^k &\sim x^k. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Vì thế, không thể nào chọn c_k để cho vế phải luôn nhỏ hơn vế trái. Kết luận, $k \in [0, 2]$ là điều kiện cần.

Muốn chứng minh $k \in [0, 2]$ cũng là điều kiện đủ, ta sẽ phô bày một số $c \geq 0$ nào đó thỏa mãn

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq c(x + y + z)^k \quad (3.46)$$

với mọi $k \in [0, 2]$, mặc dù tất nhiên hằng số c đó chưa phải là giá trị tối ưu c_k . Để đạt mục đích này, ta dùng phép đánh giá “thô bạo” sau:

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) &\geq (x^2 + y^2 + z^2) + 1 \\ &\geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 + 1 && \text{[trung bình lũy thừa]} \\ &> \frac{1}{3} \left[\frac{k}{2} \cdot (x + y + z)^2 + \left(1 - \frac{k}{2}\right) \cdot 1 \right] && [0 \leq k \leq 2] \\ &\geq \frac{1}{3}(x + y + z)^k && \text{[Cauchy suy rộng]} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Vậy, $c = \frac{1}{3}$ hoàn thành nhiệm vụ (3.46). Cho nên $k \in [0, 2]$ cũng là điều kiện đủ. $\square$

b) Dễ thấy rằng với $k = 0$ thì $c_0 = 1$. Xét $k \in (0, 2]$. Các biểu thức $x^2 + 1$, $y^2 + 1$ và $z^2 + 1$ gợi ý cho ta chuyển về lượng giác. Do đó, ta hãy đặt

$$x = \tan a, \quad y = \tan b, \quad z = \tan c, \quad \text{với } a, b, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.48)$$

Lúc đó,

$$\begin{aligned} \frac{(x + y + z)^k}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)} &= (\cos a \cos b \cos c)^2 (\tan a + \tan b + \tan c)^k \\ &= (\cos a \cos b \cos c)^{2-k} (\cos a \cos b \sin c + \cos b \cos c \sin a \\ &\quad + \cos c \cos a \sin b)^k \\ &= (\cos a \cos b \cos c)^{2-k} [\sin a \sin b \sin c + \sin(a + b + c)]^k \end{aligned} \quad (3.49)$$

Để tìm chặn trên tốt nhất cho vế phải của đẳng thức trên, ta đặt $t = \sin \frac{1}{3}(a + b + c)$. Vì hàm $\theta \mapsto \sin \theta$ lõm trên đoạn $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (đạo hàm bậc hai âm), nên

$$\sin \frac{1}{3}(a + b + c) \geq \frac{1}{3}(\sin a + \sin b + \sin c) \geq \sqrt[3]{\sin a \sin b \sin c} \quad (3.50)$$

(bất đẳng thức cuối cùng là do Cauchy cho 3 số). Từ đó suy ra

$$\sin a \sin b \sin c \leq t^3. \quad (3.51)$$

Tương tự, vì hàm $\theta \mapsto \cos \theta$ lõm trên đoạn $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (đạo hàm bậc hai âm), nên

$$\cos \frac{1}{3}(a + b + c) \geq \frac{1}{3}(\cos a + \sin b + \sin c) \geq \sqrt[3]{\cos a \cos b \cos c} \quad (3.52)$$

và vì thế

$$\cos a \cos b \cos c \leq (1 - t^2)^{3/2}. \quad (3.53)$$

Phối hợp (3.51), (3.53) với (3.49), ta có

$$\frac{(x + y + z)^k}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)} \leq (1 - t^2)^{3(1-k/2)}(t^3 + (3t - 4t^3))^k = 3^k t^k (1 - t^2)^{3-k/2}. \quad (3.54)$$

Xin lưu ý: chính ngay tại bước (3.54) này, ta mới cần điều kiện $k \in [0, 2]$. Thật vậy, ta phải nâng (3.51) lên lũy thừa bậc k và (3.53) lên lũy thừa bậc $2 - k$. Để cho các bất đẳng thức đó không đổi chiều, các số mũ k và $2 - k$ đều phải dương.

Để kết thúc, ta chỉ cần khảo sát hàm $g_k(t) = 3^k t^k (1 - t^2)^{3-k/2}$ trên miền $t \in [0, 1]$. Đạo hàm của nó,

$$g'_k(t) = 3^k t^{k-1} (1 - t^2)^{2-k/2} (k - 6t^2), \quad (3.55)$$

bằng 0 tại $t = 0$, $t = 1$ và $t = \sqrt{k/6}$. Đây là những điểm cực trị duy nhất của g_k trên $[0, 1]$. Nhưng dễ thấy rằng $t = 0$ và $t = 1$ tương ứng với những cực tiểu. Do đó, $t = \sqrt{k/6}$ phải tương ứng với cực đại. Giá trị của cực đại chính là $1/c_k$. Vậy,

$$c_k = \begin{cases} 3^{3-k} \left(3 - \frac{k}{2}\right)^{\frac{k}{2}-3} \left(\frac{k}{2}\right)^{-\frac{k}{2}} & \text{nếu } k \neq 0; \\ 1 & \text{nếu } k = 0. \quad \square \end{cases} \quad (3.56)$$

$$(3.57)$$

3.4.2 Một bài tương tự

a) Tìm tất cả các số thực k sao cho tồn tại hằng số dương c_k thỏa mãn

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq c_k(xy + yz + zx)^k$$

với mọi số thực dương.

b) Với các số k tìm được, hãy xác định số c_k lớn nhất.

Bài trên cũng do Hatucdao sáng tác và đã được đăng lên Diễn Đàn. Nó là một tổng quát từ bài APMO 2004

$$(x^2 + 2)(y^2 + 2)(z^2 + 2) \geq 9(xy + yz + zx). \quad (3.58)$$

Bản thân bài (3.58) tương đương với

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq \frac{9}{4}(xy + yz + zx), \quad (3.59)$$

tức là trường hợp $k = 1$ của bài tổng quát. Đáp số của bài tổng quát là

$$k \in [0, 2] \quad \text{và} \quad c_k = 3^{3-k}(3 - k)^{k-3}k^{-k}, \quad (3.60)$$

với $c_0 = 1$.