ĐỀ THI HỌC KỲ I NĂM HỌC 2009-2010

Môn học: Đại số tuyến tính.

Thời gian làm bài: 90 phút. Đề thi gồm 7 câu.

Sinh viên không được sử dụng tài liệu.

HÌNH THỨC THI: TỰ LUẬN

CA 3

Câu 1 : Trong không gian $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho không gian con $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \;\&\; 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \;\&\; 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0\}$
Tìm chiều và một cơ sở TRỰC CHUẨN của F.

Câu 2 : Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, biết ma trận của f trong cơ sở
$E = \{(1,2,1), (1,1,2); (1,1,1)\}$ là $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Chéo hoá ánh xạ tuyến tính f.

Câu 3 : Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, biết ma trận của f trong cơ sở
$E = \{(1,0,1), (1,1,0); (1,1,1)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.
Tìm cơ sở và số chiều của Imf.

Câu 4 : Cho A và B là hai ma trận đồng dạng. Chứng tỏ rằng A chéo hoá được khi và chỉ khi B chéo hoá được.

Câu 5 : Tìm m để ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & m & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ có ít nhất một trị riêng âm.

Câu 6 : Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, biết $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 + 2x_3, -2x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + x_3)$. Tìm m để véctơ $x = (2, 2, m)$ là véctơ riêng của f.

Câu 7 : Cho ánh xạ tuyến tính f là phép đối xứng trong hệ trục toạ độ Oxy qua đường thẳng $2x - 3y = 0$. Tìm tất cả các trị riêng và cơ sở của các không gian con riêng của f. Giải thích rõ.

Đáp án đề thi Đại số tuyến tính, năm 2009-2010, ca 3

Thang điểm: Câu 1, 2, 3, 5, 6, 7: 1.5 điểm; câu 4: 1.0 điểm.

Câu 1(1.5đ). Tìm một cơ sở tùy ý của F: $E = \{(2,-1,1,0), (3,-1,0,1)\}$

Dùng quá trình Gram-Schmidt đưa về cơ sở trực giao: $E_1 = \{(2,-1,1,0), (4,1,-7,6)\}$

Chuẩn hóa, có cơ sở trực chuẩn: $E_2 = \{\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1,0), \frac{1}{\sqrt{67}}(4,1,-7,1)\}$

Câu 2(1.5đ). Chéo hóa ma trận (1.0 đ) $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Cơ sở cần tìm là $B = \{(8,10,11), (3,4,4), (8,9,11)\}$. Ma trận của f trong B là D. Các cột của P là các VTR của A, phải đổi sang cơ sở chính tắc!!

Câu 3(1.5đ). Dim(Imf) $= r(A) = 3$; Im$(f) = < f(E) > = < f(1,0,1), f(1,1,0), f(1,1,1) > =$

$=<(6,5,4),(9,8,6),(-2,-4,-2)>$. Cơ sở của $\text{Im}(f)$ là $\{(6,5,4),(9,8,6)(-2,-4,-2)\}$. **Cách khác:** Vì Dim(Imf) $= r(A) = 3$, nên $\text{Im}(f)$ là $\mathbb{R}^3$ và cơ sở của $\text{Im}(f)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Câu 4(1.0đ). A đồng dạng $B \Leftrightarrow \exists Q : B = Q^{-1} \cdot A \cdot Q$. Giả sử A chéo hóa được $\Leftrightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Khi đó $B = Q^{-1} \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} \cdot Q \Leftrightarrow B = (P^{-1}Q)^{-1} \cdot D \cdot (P^{-1}Q) \Leftrightarrow B = G^{-1} \cdot D \cdot G \rightarrow$đpcm.

Câu 5 (1.5đ). Ma trận đối xứng thực. Dạng toàn phương tương ứng $f(x,x) = x_1^2 + mx_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$. Đưa về chính tắc bằng biến đổi Lagrange

$f(x,x) = (x_1 + 4x_2 - x_3)^2 + 3\,(x_3 + 2x_2)^2 + (m-28)x_2^2$. A có một TR âm $\Leftrightarrow m < 28$.

Câu 6 (1.5đ). x là VTR của $f \Leftrightarrow f(x) = \lambda \cdot x \Leftrightarrow (f(2,2,m) = \lambda \cdot (2,2,m)$

$\Leftrightarrow (-2+2m, -2+2m, m) = (2\lambda, 2\lambda, \lambda m) \Leftrightarrow m = 0 \vee m = 2$

Câu 7 (1.5đ).$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. VTR là véctơ qua phép biến đổi có ảnh cùng phương với véctơ ban đầu. Các véctơ cùng phương với véctơ chỉ phương $a = (3,2)$ của đường thẳng là tất cả các VTR tương ứng với TR $\lambda_1 = 1$; các véctơ cùng phương với véctơ pháp tuyến $n = (2,-3)$ của đường thẳng là tất cả các VTR tương ứng với $\lambda_2 = -1$. Vì f là axtt của không gian 2 chiều nên không còn VTR khác. Kluận: Cơ sở của $E_{\lambda_1} : (3,2)$ của $E_{\lambda_2} : (2,-3)$.