ĐỀ THI HỌC KỲ I NĂM HỌC 2009-2010

Môn học: Đại số tuyến tính.

Thời gian làm bài: 90 phút. Đề thi gồm 7 câu.

Sinh viên không được sử dụng tài liệu.

HÌNH THỨC THI: TỰ LUẬN

CA 2

Câu 1 : a/ Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$.

a/ Chéo hoá ma trận A.

b/ Áp dụng, tìm ma trận B sao cho $B^{20} = A$.

Câu 2 : Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, biết ma trận của f trong cơ sở $E = \{(1,2,1),(1,1,2);(1,1,1)\}$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc .

Câu 3 : Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng, cơ sở của các không gian con riêng của ma trận A^6.

Câu 4 : Tìm m để vectơ $X = (2,1,m)^T$ là véctơ riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Câu 5 : Tìm m để ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & m & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ có đúng hai trị riêng dương và một trị riêng âm.

Câu 6 : Cho ánh xạ tuyến tính f là phép quay trong hệ trục toạ độ Oxy quanh gốc tọa độ CÙNG chiều kim đồng hồ một góc 60^o. Tìm ánh xạ tuyến tính f. Giải thích rõ.

Câu 7 : Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng tỏ rằng A khả nghịch khi và chỉ khi $\lambda = 0$ KHÔNG là trị riêng của A.

Khi A khả nghịch chứng tỏ rằng nếu λ là trị riêng của A, thì $\dfrac{1}{\lambda}$ là trị riêng của A^{-1}.

Đáp án đề thi Đại số tuyến tính, năm 2009-2010, ca 2

Thang điểm: Câu 1, 2, 3, 4, 5, 6: 1.5 điểm; câu 7: 1.0 điểm.

Câu 1(1.5đ). Chéo hóa ma trận (0.5đ) $A = PDP^{-1}$; $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ta có $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$. Giả sử $B = Q \cdot D_1 \cdot Q^{-1}$, ta có $B^{20} = Q \cdot D_1^{20} \cdot Q^{-1} = A$. Chọn $Q = P$ và $D_1 = \begin{pmatrix} \sqrt[20]{2} & 0 \\ 0 & \sqrt[20]{1} \end{pmatrix}$. Vậy ma trận $B = P \cdot D_1 \cdot P^{-1}$

Câu 2 (1.5đ). Có nhiều cách làm. Gọi ma trận chuyển cơ sở từ E sang chính tắc làP. Khi đó ma trận chuyển cơ sở từ chính tắc sang E là : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cơ sở chính tắc là $B = P^{-1}AP$=$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 2 \\ -9 & 6 & 4 \\ -12 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Câu 3 (1.5đ). Giả sử λ_0 là trị riêng của $A \Leftrightarrow \exists x_0 : A \cdot x_0 = \lambda_0 \cdot x_0$. Khi đó

$A^6 \cdot x_0 = A^5 \cdot A \cdot x_0 = A^5 \cdot \lambda_0 \cdot x_0 = \lambda_0 \cdot A^5 \cdot x_0 = \cdots = \lambda_0^6 \cdot x_0$.

Lập ptrình đặc trưng, tìm được TR của A: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$,

Cơ sở của $E_{\lambda_1} : \{(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\}$, của $E_{\lambda_2} : \{(2,-3,2)^T\}$.

TR của A^6: $\delta_1 = 1^6, \delta_2 = 2^6$, Cơ sở của: $E_{\delta_1} : \{(-1,1,0)^T, (-1,0,1)^T\}$, của $E_{\delta_2} : \{(2,-3,2)^T\}$.

Câu 4 (1.5đ). x là VTR của $A \Leftrightarrow A \cdot x = \lambda \cdot x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \Leftrightarrow m = 1$

Câu 5 (1.5đ). Ma trận đối xứng thực. Dạng toàn phương tương ứng $f(x,x) = x_1^2 + mx_2^2 + 6x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$. Đưa về chính tắc bằng biến đổi Lagrange $f(x,x) = (x_1 + 3x_2 - 2x_3)^2 + 2\left(x_3 + x_2\right)^2 + (m-11)x_3^2$. Ma trận A có một TR dương, 1 TR âm $\Leftrightarrow m < 11$.

Câu 6 (1.5đ). $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. f được xác định hoàn toàn nếu biết ảnh của một cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Chọn cơ sở chính tắc $E = \{(1,0),(0,1)\}$.

Khi đó $f(1,0) = (\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2})$,$f(0,1) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. $f(x,y) = (\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}, \frac{-x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2})$

Câu 7 (1.0đ). A khả nghịch $\Leftrightarrow det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ không là TR của A. Giả sử λ_0 là TR của A $\Leftrightarrow \exists x_0 : A \cdot x_0 = \lambda_0 \cdot x_0 \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot x_0 = A^{-1} \cdot \lambda_0 \cdot x_0 \Leftrightarrow A^{-1} \cdot x_0 = \frac{1}{\lambda_0} \cdot x_0$ (vì $\lambda_0 \neq 0$) $\rightarrow$ đpcm.