

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG NAI
Đơn vị Trường THPT Ngô Quyền

Mã số:

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

ÁP DỤNG
BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ ĐỂ TÌM
GTNN, GTLN VÀ CHỨNG MINH
BẤT ĐẲNG THỨC

Người thực hiện: **ĐỖ TẤT THẮNG.**

Lĩnh vực nghiên cứu:

Quản lý giáo dục ☐

Phương pháp dạy học bộ môn: TOÁN ☐

Phương pháp giáo dục ☐

Lĩnh vực khác: ☐

Có đính kèm:

☐ Mô hình ☐ Phần mềm ☐ Phim ảnh ☐ Hiện vật khác

Năm học: 2011-2012

SƠ LƯỢC LÝ LỊCH KHOA HỌC

I. THÔNG TIN CHUNG VỀ CÁ NHÂN

1. Họ và tên: ĐỖ TẤT THẮNG
2. Ngày tháng năm sinh: 06/09/1981
3. Nam, nữ: Nam
4. Địa chỉ: 149/7 Khu phố 2 phường Trung Dũng, BH-Đồng Nai.
5. Điện thoại: 0918.306.113
6. E-mail: thangtatdo@yahoo.com
7. Chức vụ: Giáo viên Toán
8. Đơn vị công tác: Trường THPT Ngô Quyền

II. TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO

- Học vị (hoặc trình độ chuyên môn, nghiệp vụ) cao nhất: Thạc sĩ Toán
- Năm nhận bằng: 2010
- Chuyên ngành đào tạo: Lý luận và phương pháp dạy học môn Toán.

ÁP DỤNG

BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ ĐỂ TÌM GTNN, GTLN VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

- Ngày nay, bất đẳng thức(BĐT) được đề cập đến nhiều hơn trong chương trình do tầm quan trọng và cách giải độc đáo của chúng. BĐT là kiến thức không thể thiếu trong các kì thi đại học, cao đẳng, thi học sinh giỏi. BĐT áp dụng rất nhiều trong cuộc sống nói chung và toán học nói riêng chẳng hạn: giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình, các bài toán cực trị . . .
- Đa số học sinh khi gặp BĐT thường hay lúng túng, không biết nên xuất phát từ đâu? Phương pháp giải như thế nào? Với vai trò là giáo viên dạy môn Toán, tôi muốn học sinh lớp 10 được tiếp cận một số đề thi cao đẳng, đại học, bài BĐT hay từ những kiến thức bình thường, dễ hiểu nhất.
- Áp dụng bất đẳng thức phụ để tìm GTLN, GTNN và chứng minh các BĐT là một trong các phương pháp đơn giản, dễ hiểu hơn so với đa số các phương pháp khác, phù hợp với học sinh lớp 10.

II. THỰC TRẠNG TRƯỚC KHI THỰC HIỆN CÁC GIẢI PHÁP CỦA ĐỀ TÀI

Qua thực tế dạy học và từ ghi nhận trên chúng tôi nhận thấy trong chương trình lớp 10 phần BĐT, số bài tập trong sách giáo khoa hạn chế và thời lượng dành cho nó rất ít. Do đó, tôi mạnh dạn làm SKKN này với mong muốn là một tài liệu nhỏ giúp học sinh đỡ khó khăn hơn khi gặp một số bài BĐT có dạng trên.

III. NỘI DUNG ĐỀ TÀI

A) Sử dụng bất đẳng thức phụ chứng minh bất đẳng thức

Bất đẳng thức phụ:

Cho 2 số dương a, b ta có:

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad \textcircled{1} \quad \text{Hay} \quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{4}{a+b} \quad \textcircled{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Khi gặp một số bài toán BĐT mà ta áp dụng được BĐT phụ, lời giải sẽ trở nên **ngắn gọn, dễ hiểu hơn so với các cách làm khác**. Để khách quan hơn chúng ta cùng xét bài toán sau:

Ví dụ 1. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Chúng minh rằng: $\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq 16$

Lời giải 1: (Không dùng BĐT phụ)

Áp dụng BĐT Bunnhiacôpski ta được

$$\left(\sqrt{(ac)^2} + \sqrt{(bc)^2} \right) \left(\sqrt{\left(\frac{1}{ac}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{bc}\right)^2} \right) \geq \left(\sqrt{(ac)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{ac}\right)} + \sqrt{(bc)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{bc}\right)} \right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq \frac{4}{ac+bc} = \frac{4}{(a+b)c} = \frac{4}{(1-c)c}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\frac{4}{(1-c)c} \geq 16$

$$\Leftrightarrow 4 \geq 16(1-c)c$$

$$\Leftrightarrow 4(2c-1)^2 \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

Vậy $\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \geq 16$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{4} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$

Lời giải 2: (Áp dụng BĐT phụ)

Áp dụng BĐT ② ta có: $\frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{4}{c(a+b)} \geq \frac{4}{\left(\frac{c+a+b}{2} \right)^2} = 16$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow c = \frac{1}{2}, a = b = \frac{1}{4}$.

Bảng so sánh các ưu, nhược điểm của Lời giải 1 và Lời giải 2:

	Kiến thức sử dụng	Phạm vi kiến thức	Khó khăn hay thuận lợi đối với HS 10
LG1	BĐT Bunnhiacôpski	Ngoài chương trình SGK phổ thông.	Khó khăn
	Biến đổi tương đương	Lớp 10	
	Hàng đẳng thức đáng nhớ	Lớp 8	
LG2	BĐT phụ	Lớp 8,9,10	Thuận lợi

Qua bảng so sánh trên ta thấy :

- + Áp dụng LG1 phải dùng tới các kiến thức **ngoài chương trình**(BĐT Bunnhiacôpski), lời giải khá **dài dòng**, do đó gây **khó hiểu** đối với HS lớp 10.
- + Áp dụng LG2 chỉ dùng BĐT phụ **trong chương trình**, lời giải **ngắn gọn**, do đó rất **dễ hiểu** đối với HS lớp 10.

Từ BĐT phụ trên chúng ta cũng có thể chứng minh được các bài toán BĐT khó hơn . Sau đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 2. Cho ba số dương a, b, c, ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Lời giải:

Áp dụng BĐT① ta có

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \quad (3)$$

Cộng (1)+(2)+(3) ta được $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Ví dụ 3. Với a, b, c là các số dương Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Lời giải:

Áp dụng BĐT① ta có

$$\frac{1}{a+2b+c} = \frac{1}{(a+b)+(b+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+2b+c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (1)$$

tương tự: $\frac{1}{b+2c+a} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} \right) \quad (2)$

$$\frac{1}{c+2a+b} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (3)$$

Cộng (1)+(2)+(3) ta được: $\frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ (đpcm)

Giáo viên: Đỗ Tất Thắng
 Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Trường THPT Ngô Quyền Biên Hoà-Đồng Nai

Nhận xét:

+ Trong **Ví dụ 3** cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$ và đổi biến a, b, c lần lượt thành x, y, z thì bài toán trở thành đề thi đại học năm 2005 khối A.

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

+ Cho ba số dương a, b, c theo **Ví dụ 2** ta có: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)$

Nếu áp dụng liên tiếp BĐT trên $2n$ lần thì

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &\geq 2^1 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \\ &\geq 2^2 \left(\frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} + \frac{1}{2a+b+c}\right) \\ &\geq 2^3 \left(\frac{1}{2a+3b+3c} + \frac{1}{3a+2b+3c} + \frac{1}{3a+3b+2c}\right) \\ &\geq 2^4 \left(\frac{1}{5a+5b+6c} + \frac{1}{6a+5b+5c} + \frac{1}{5a+6b+5c}\right) \\ &\geq 2^5 \left(\frac{1}{11a+10b+11c} + \frac{1}{11a+11b+10c} + \frac{1}{10a+11b+11c}\right) \\ &\geq 2^6 \left(\frac{1}{22a+21b+21c} + \frac{1}{21a+22b+21c} + \frac{1}{21a+21b+22c}\right) \\ &\geq \dots \\ &\geq 2^{2n} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n}+2}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}+2}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}+2}{3}c}\right) \end{aligned}$$

đây quan sát và tổng quát hóa ta có **BĐT mở rộng 1** :

Cho ba số dương a, b, c , $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2^{2n} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n}+2}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}+2}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}+2}{3}c}\right)$$

Có thể chứng minh BĐT trên bằng BDT VD2 kết hợp với phương pháp chứng minh qui nạp.

+ Cho ba số dương a, b, c theo **Ví dụ 2** ta có: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Nếu áp dụng liên tiếp BDT trên $2n+1$ lần thì

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) &\geq 2^1 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \\ &\geq 2^2 \left(\frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} + \frac{1}{2a+b+c} \right) \\ &\geq 2^3 \left(\frac{1}{2a+3b+3c} + \frac{1}{3a+2b+3c} + \frac{1}{3a+3b+2c} \right) \\ &\geq 2^4 \left(\frac{1}{5a+5b+6c} + \frac{1}{6a+5b+5c} + \frac{1}{5a+6b+5c} \right) \\ &\geq 2^5 \left(\frac{1}{11a+10b+11c} + \frac{1}{11a+11b+10c} + \frac{1}{10a+11b+11c} \right) \\ &\geq \dots \\ &\geq 2^{2n+1} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n+1}-2}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}-2}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}-2}{3}c} \right) \end{aligned}$$

BDT mở rộng 2:

Cho ba số dương a, b, c, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2^{2n+1} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n+1}-2}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}-2}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}-2}{3}c} \right)$$

Từ BDT mở rộng 1 và 2 ta nhận thấy, càng **áp dụng** BDT trong VD2 nhiều lần thì về phải càng **nhỏ dần**. Bằng cách áp dụng BDT trong VD2 và phương pháp qui nạp chúng ta thu được các BDT mở rộng 3, theo tôi là **rất mới** và **hay** sau.

BDT mở rộng 3a:

Cho ba số dương a, b, c , $\forall n, k \in \mathbb{N}^* : k \leq n$, ta có:

$$2^{2k} \left(\frac{1}{\frac{2^{2k}+2}{3}a + \frac{2^{2k}-1}{3}b + \frac{2^{2k}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2k}-1}{3}a + \frac{2^{2k}+2}{3}b + \frac{2^{2k}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2k}-1}{3}a + \frac{2^{2k}-1}{3}b + \frac{2^{2k}+2}{3}c} \right) \\ \geq 2^{2n} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n}+2}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}+2}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}+2}{3}c} \right)$$

BĐT mở rộng 3b:

Cho ba số dương a, b, c , $\forall n, k \in \mathbb{N}^* : k \leq n$, ta có:

$$2^{2k+1} \left(\frac{1}{\frac{2^{2k+1}-2}{3}a + \frac{2^{2k+1}+1}{3}b + \frac{2^{2k+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2k+1}+1}{3}a + \frac{2^{2k+1}-2}{3}b + \frac{2^{2k+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2k+1}+1}{3}a + \frac{2^{2k+1}+1}{3}b + \frac{2^{2k+1}-2}{3}c} \right) \\ \geq 2^{2n+1} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n+1}-2}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}-2}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}-2}{3}c} \right)$$

BĐT mở rộng 3c:

Cho ba số dương a, b, c , $\forall n, k \in \mathbb{N}^* : k \leq n$, ta có:

$$2^{2k} \left(\frac{1}{\frac{2^{2k}+2}{3}a + \frac{2^{2k}-1}{3}b + \frac{2^{2k}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2k}-1}{3}a + \frac{2^{2k}+2}{3}b + \frac{2^{2k}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2k}-1}{3}a + \frac{2^{2k}-1}{3}b + \frac{2^{2k}+2}{3}c} \right) \\ \geq 2^{2n+1} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n+1}-2}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}-2}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}-2}{3}c} \right)$$

BĐT mở rộng 3d:

Cho ba số dương a, b, c , $\forall n, k \in \mathbb{N}^* : k < n$, ta có:

$$2^{2k+1} \left(\frac{1}{\frac{2^{2k+1}-2}{3}a + \frac{2^{2k+1}+1}{3}b + \frac{2^{2k+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2k+1}+1}{3}a + \frac{2^{2k+1}-2}{3}b + \frac{2^{2k+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2k+1}+1}{3}a + \frac{2^{2k+1}+1}{3}b + \frac{2^{2k+1}-2}{3}c} \right) \\ \geq 2^{2n} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n}+2}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}+2}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}+2}{3}c} \right)$$

Tất cả các BĐT mở rộng 1,2,3a,3b,3c,3d đều chứng minh được bằng BĐT trong VD2 kết hợp với phương pháp qui nạp.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với a, b, c dương:

$$\frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b} \leq \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a}$$

Lời giải:

Vận dụng BĐT ② ta có:

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+2c+a} \geq \frac{4}{(a+3b) + (b+2c+a)} = \frac{2}{a+2b+c} \\ \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+2a+b} \geq \frac{4}{(b+3c) + (c+2a+b)} = \frac{2}{b+2c+a} \\ \frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} \geq \frac{4}{(c+3a) + (a+2b+c)} = \frac{2}{c+2a+b}$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên và rút gọn ta có BĐT cần phải chứng minh

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} a+3b = b+2c+a \\ b+3c = c+2a+b \\ c+3a = a+2b+c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

 Sau đây là một số bài tập tương tự để luyện tập:

Bài 1. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác (p là nửa chu vi). Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

(Đề HK2 Khối 10A Trường Ngô Quyền 2007-2008)

Bài 2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{2b+a+c} + \frac{1}{2c+a+b} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}$$

Bài 3. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực dương thỏa $abc = ab + bc + ca$ thì:

$$\frac{1}{a+2b+3c} + \frac{1}{b+2c+3a} + \frac{1}{c+2a+3b} < \frac{17}{96}$$

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2a+3(b+c)} + \frac{1}{2b+3(c+a)} + \frac{1}{2c+3(a+b)} \geq 4 \left(\frac{1}{10a+11b+11c} + \frac{1}{11a+10b+11c} + \frac{1}{11a+11b+10c} \right)$$

Bài 5. Cho ba số dương a, b, c , $\forall n \in \mathbb{N}^*$. cmr

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2^{2n} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n}+2}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}+2}{3}b + \frac{2^{2n}-1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n}-1}{3}a + \frac{2^{2n}-1}{3}b + \frac{2^{2n}+2}{3}c} \right)$$

Bài 6. Cho ba số dương a, b, c , $\forall n \in \mathbb{N}^*$. cmr

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2^{2n+1} \left(\frac{1}{\frac{2^{2n+1}-2}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}-2}{3}b + \frac{2^{2n+1}+1}{3}c} + \frac{1}{\frac{2^{2n+1}+1}{3}a + \frac{2^{2n+1}+1}{3}b + \frac{2^{2n+1}-2}{3}c} \right)$$

Bài 7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} \leq \frac{a+b+c}{2}$

Bài 8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$.

Bài 9. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x+2y+4z=12$. Chứng minh: $\frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4xz}{4z+x} \leq 6$.

Bài 10. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4$

B) Sử dụng bất đẳng thức cơ bản tìm GTLN, GTNN của biểu thức

Trong nhiều trường hợp áp dụng BĐT phụ để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một biểu thức đem lại hiệu quả cao, lời giải ngắn gọn, xúc tích, phù hợp với học sinh lớp 10 và THCS.

Ví dụ 1. Cho hai số thực dương thay đổi x, y thỏa mãn điều kiện $3x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

(Đề Cao Đẳng 2010)

Lời giải 1: (Không dùng BĐT phụ)

Ta có $\begin{cases} 3x + y \leq 1 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq 1 - 3x \\ 0 < x < \frac{1}{3} \end{cases}$. Do đó $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x(1-3x)}}$

Áp dụng BĐT Côsi 2 số $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x(1-3x)}} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{x+1-3x}{2}} = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-2x}, x \in (0; \frac{1}{3})$

Ta có $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(1-2x)^2} = \frac{4x-1}{x^2(1-2x)^2}$

Lập BBT

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$		$+\infty$	8	9	

Ta có Min $f(x)=8$ khi $x = \frac{1}{4}$. Vậy Min $A=8$ khi $x = y = \frac{1}{4}$

Lời giải 2:(Áp dụng BĐT phụ)

Áp dụng BĐT ② ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{4}{x+\sqrt{xy}} \geq \frac{4}{x+\frac{x+y}{2}} \geq \frac{8}{3x+y} \geq 8$

Vậy Min $A=8$ khi $x = y = \frac{1}{4}$.

Bảng so sánh các ưu, nhược điểm của Lời giải 1 và Lời giải 2

	Kiến thức sử dụng	Phạm vi kiến thức	Khó khăn hay thuận lợi đối với HS 10
LG1	BĐT Côsi 2 số	Lớp 10	Khó khăn
	Điểm rơi BĐT Côsi	Ngoài chương trình. Đòi hỏi khả năng phân tích tổng hợp của HS.	
	Ứng dụng đạo hàm	Lớp 12	
LG2	BĐT phụ	Lớp 8,9,10	Thuận lợi

Qua bảng so sánh trên ta thấy rằng đối với bài toán trên:

Giáo viên: Đỗ Tất Thắng

Trường THPT Ngô Quyền Biên Hoà-Đồng Nai

+ Áp dụng LG1 phải dùng tới các kiến thức **lớp 12**(Ứng dụng đạo hàm) và kiến thức **ngoài chương trình**(Điểm rơi BĐT Cô si đòi hỏi khả năng phân tích và tổng hợp khá cao của học sinh khi dự đoán điểm rơi), **dài dòng**. Do đó gây **khó hiểu** đối với HS lớp 10.

+ Áp dụng LG2 chỉ dùng BĐT phụ **trong chương trình**, lời giải **ngắn gọn**. Do đó, rất **dễ hiểu** đối với HS lớp 10.

Ví dụ 2. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0, x + 1 > 0, y + 1 > 0, z + 4 > 0$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của $Q = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+4}$

Lời giải:

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x + 1 > 0 \\ b = y + 1 > 0 \\ c = z + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a - 1 \\ y = b - 1 \\ z = c - 4 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } a + b + c = 6 \text{ và } Q = \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-4}{c} = 3 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \right)$$

Theo bất đẳng thức ② ta có:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{4}{c} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{a+b+c} = \frac{8}{3} \Rightarrow Q \leq 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } \text{Max} Q = \frac{1}{3} \text{ khi } \begin{cases} x = y = \frac{1}{2} \\ z = -1 \end{cases}$$

 **Sau đây là một số bài tập tương tự để luyện tập:**

Bài 1. Cho $x > 0, y > 0$ thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2}{xy} + 4xy$$

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{x-1}{t+y} + \frac{1-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t}$$

Bài 3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa: $a+b+c=6$.

Tìm GTLN của biểu thức: $C = \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}$.

Bài 4. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x+2y+4z=12$.

Tìm GTLN của biểu thức: $D = \frac{2xy}{x+2y} + \frac{8yz}{2y+4z} + \frac{4xz}{4z+x}$.

Bài 5. Cho $a, b, c, d > 0$.

Tìm GTLN của biểu thức: $E = \frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a}$

IV. KẾT QUẢ

Khi áp dụng chuyên đề trên cho HS 10 thì tôi thấy HS rất thích thú, đồng thời các em cũng đỡ lúng túng hơn khi gặp các dạng bài tập trên.

V. BÀI HỌC KINH NGHIỆM

Nếu có thêm thời gian mở rộng thì tôi nghĩ rằng đề tài có thể trở nên có nhiều tác dụng hỗ trợ thiết thực trong việc rèn luyện và phát triển tư duy góp phần giải được khá nhiều dạng toán trong quá trình dạy học sinh nói chung và bồi dưỡng học sinh khá, giỏi nói riêng.

VI. KẾT LUẬN

- Sử dụng BĐT phụ, đổi biến là phương pháp ngắn gọn, dễ hiểu, hiệu quả cho lớp bài toán khá rộng của BĐT, phù hợp với các học sinh lớp 10 và thi đại học.
- Phương pháp giải trên cho HS một cách giải khác tư duy, sáng tạo hơn. Tạo động lực cho HS đam mê Toán.
- Tuy nhiên, các dạng và phương pháp tôi lựa chọn chưa hẳn tối ưu và đầy đủ, chắc chắn còn phải bổ sung thêm cho việc giảng dạy tốt hơn. Rất mong có sự đóng góp của quý đồng nghiệp.

VII. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Một số trang web như: www.maths.vn , www.nxbgd.vn/toanhocuoitre
2. Nguyễn Minh Nhiên, Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức có chứa biến ở mẫu, trang 1 số 393 tháng 3 năm 2010, Báo Toán học với tuổi trẻ.

VIII. LỜI KẾT

Để hoàn tất được chuyên đề này. Ngoài sự nỗ lực của bản thân còn phải kể đến sự góp ý của các thầy cô Tổ Toán Trường THPT Ngô Quyền. Đặc biệt, cô Lê Thanh Hà tổ trưởng cùng Thầy Lê Văn Đắc Mai tổ phó đã rất nhiệt tình giúp đỡ, tư vấn để tôi hoàn thiện sáng kiến kinh nghiệm.

NGƯỜI THỰC HIỆN

ĐỖ TẤT THẮNG