

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. Các hệ phương trình cơ bản

A. Hệ phương trình đối xứng :

Dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ mà ở đó vai trò của x, y như nhau.

Tức là $\begin{cases} f(x, y) = f(y, x). \\ g(x, y) = g(y, x). \end{cases}$

Cách giải:

- Thông thường người ta đặt ẩn phụ:

$$S = x + y \text{ hay } S = x - y$$

$$P = xy$$

$\Rightarrow \begin{cases} f(S, P) = 0 \\ g(S, P) = 0 \end{cases}$ sau đó tìm được S, P và tìm được các nghiệm (x, y)

Ví dụ: Giải hệ

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$$

Như đã nói ở trên, ta hãy đặt $S = x + y; P = xy$ và hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} SP = 6 \\ S + P = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

Từ đây ta dễ dàng tìm được các nghiệm (x, y) sau:

$$(x, y) = (1, 2); (2, 1)$$

- Nhưng để phương pháp trên áp dụng hữu hiệu thì ta nên biến đổi một chút các ẩn số để sau khi đặt ẩn phụ, ta được những phương trình nhẹ nhàng hơn

Ví dụ 1: $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 35 \end{cases}$

Đặt $S = (x+1) + (y+1); P = (x+1)(y+1)$ ta sẽ có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} P = 6 \\ S(S^2 - 3P) = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 2: $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$

Ở đây theo thông lệ chúng ta hãy thử đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, ta thu được hệ sau:

$$\begin{cases} S^2 + S - 2P = 8 \\ P(P + S + 1) = 12 \end{cases}$$

Rõ ràng mọi chuyện không đơn giản chút nào. Tuy nhiên có lẽ các bạn cũng sẽ nhận ra sự tinh tế trong bài toán, đó là ở bậc của mỗi phương trình. Phương trình đầu tiên bậc 2 có lẽ chứa P. Thế nhưng nó không ở một dạng tích thuận tiện nào, trong khi phương trình thứ hai lại ở dạng tích và bậc 4, gấp đôi bậc 2. Nếu các bạn nhìn trong biểu thức S và P, bậc của P gấp đôi bậc của S, như vậy phải chăng phương trình thứ nhất là S, thứ hai là P. Nếu vậy thì các giá trị x và y trong P là gì. Quan sát phương trình thứ hai các bạn có thể dễ dàng nhận ra sự tinh tế này, đó là $x(x+1)$ và $y(y+1)$.

Từ ý tưởng này ta đặt:

$$a = x(x+1)$$

$$b = y(y+1)$$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} a+b=8 \\ ab=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$$

Như vậy (x, y) là nghiệm của các phương trình sau:

$$i) t^2 + t = 2 \Rightarrow t_1 = 1 \vee t_2 = -2$$

$$ii) t^2 + t = 6 \Rightarrow t_3 = 2 \vee t_4 = -3$$

Tóm lại nghiệm của hệ đã cho là:

$$(x, y) = (1, -2); (-2, 1); (2, -3); (-3, 2)$$

B. Phương trình đối xứng loại 2:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0. \\ f(y, x) = 0. \end{cases}$$

Đối với dạng hệ phương trình này, ta có thể đưa về một dạng hệ tương đương sau:

$$\begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 \\ f(x, y) + f(y, x) = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình mới mà các bạn thu được là một hệ đối xứng hay nửa đối xứng mà ta đã xét ở phần trên. Thật vậy nếu đặt $\begin{cases} h(x, y) = f(x, y) - f(y, x) \\ g(x, y) = f(x, y) + f(y, x) \end{cases}$. Ta sẽ đưa hệ về

dạng:

$$\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \text{ Ở đó } \begin{cases} h(x, y) = -h(y, x) \\ g(x, y) = g(y, x). \end{cases}$$

Có thể các bạn thấy rằng $h(x, y)$ không đối xứng hoàn toàn (nửa đối xứng). Tuy nhiên ở đây có thể chấp nhận được bởi lẽ hệ ta ở dạng $h(x, y) = 0$. (Nếu các bạn vẫn thấy ray rứt vì điều này thì các bạn hãy viết dưới dạng $h^2(x, y) = 0$, chẳng phải $h^2(x, y)$ đối xứng đó sao. Chú ý thêm là tác giả chỉ muốn các bạn nắm bắt mối quan hệ của sự đối xứng và nửa đối xứng một cách rõ ràng hơn, chứ trong lúc giải bài tập các bạn chớ bình phương lên nhé. **J**)

C. Phương trình đẳng cấp.

$$\begin{cases} f(x, y) = a(1) \\ g(x, y) = b(2) \end{cases} \text{ mà ở đó : } \begin{cases} f(tx, ty) = t^k f(x, y) \\ g(tx, ty) = t^k g(x, y) \end{cases}$$

Ở đây điều kiện thứ hai các bạn có thể hiểu một cách đơn giản là các đơn thức trong các hàm f và g là đồng bậc (bậc của đơn thức hai biến x, y là tổng các bậc của x và y). Nhận xét này sẽ giúp cho các bạn nhận biết được phương trình đẳng cấp một cách dễ dàng hơn.

Cách giải tổng quát ở đây là đưa về phương trình:

$$bf(x, y) - ag(x, y) = 0, \text{ ở đó } a, b \text{ không đồng thời bằng } 0.$$

Nếu a, b đồng thời bằng 0. Ta giải riêng các phương trình $f(x, y) = 0; g(x, y) = 0$ và so sánh nghiệm.

Cách giải tương tự như phương trình $bf(x, y) - ag(x, y) = 0$ nên các bạn có thể tham khảo bên dưới.

Ta xét 2 trường hợp.

i) $x = 0$ là nghiệm của hệ phương trình. Điều này thì các bạn chỉ cần thế $x = 0$ và giải phương trình một biến theo y .

Trường hợp này ta thu được nghiệm $(x, y) = (0, y_1) \dots$

ii) Trường hợp này ta sẽ tìm các nghiệm khác $(0, y_1) \dots$. Chia hai vế cho x^k trong đó k là bậc của f . Đặt $t = \frac{y}{x}$. Ta đưa về phương trình theo ẩn t . Giải phương trình này ta tìm được tỉ số $\frac{y}{x}$. Sau đó thay x thành ty trong (1). Giải phương trình này theo ẩn y , ta sẽ rút ra được các nghiệm của bài toán (ty_0, y_0) .

Ví dụ:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 2y^2 = 7 \\ x^2 + 6xy - 3y^2 = -8 \end{cases}$$

Giải:

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 24x^2 - 16xy + 16y^2 = 56 \\ 7x^2 + 42xy - 21y^2 = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x^2 - 16xy + 16y^2 = 56 \\ 31x^2 + 26xy - 5y^2 = 0(*) \end{cases}$$

Ta giải (*).

$$\begin{aligned} 31x^2 + 26xy - 5y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (31x - 5y)(x + y) &= 0(**) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 31x - 5y = 0(1) \\ x + y = 0(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đây ta có thể dễ dàng giải được bằng cách thế vào hệ phương trình ban đầu

II. Các phương pháp giải hệ không mẫu mực:

A. Dùng bất đẳng thức :

Dấu hiệu cho phép ta sử dụng phương pháp này là ta sẽ thấy số phương trình trong hệ ít hơn số ẩn .

Ví dụ 1 Giải hệ phương trình nghiệm dương :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ (1+x)(1+y)(1+z) = \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3 \end{cases}$$

Giải:

$$VT = 1 + x + y + z + (xy + yz + zx) + xyz \geq 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2} + xyz = \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3$$

Suy ra dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 80 \end{cases}$$

Giải: Đk: $x \geq -1; y \geq 5$

Giả sử

$$x > y - 6 \Rightarrow VT > VP$$

$$x < y - 6 \Rightarrow VT < VP$$

Suy ra $x = y - 6$

Đến đây bạn đọc có thể tự giải

Ví dụ 3: Giải hệ :

$$\begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} = 1 \\ 8^9 \cdot x^3 y^4 z^2 = 1 \end{cases}$$

Giải:

-Bài toán này có số ẩn nhiều hơn số phương trình vì vậy ta sẽ sử dụng bất đẳng thức

-Nhận xét : bậc của x,y,z khác nhau nên ta sử dụng Cauchy sao cho xuất hiện bậc giống hệ

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1}$$

Áp dụng Cauchy 8 số:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} + \frac{z}{z+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^2 y^4 z^2}{(x+1)^2 (y+1)^4 (z+1)^2}}$$

Hoàn toàn tương tự :

$$\frac{1}{y+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^3 z^2}{(x+1)^3 (y+1)^3 (z+1)^2}}$$

$$\frac{1}{z+1} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^4 z^1}{(x+1)^3 (y+1)^4 (z+1)^1}}$$

Từ các bất đẳng thức thu được ta có:

$$\frac{1}{(1+x)^3} \frac{1}{(1+y)^4} \frac{1}{(1+z)^2} \geq 8^9 \sqrt[8]{\frac{x^{24} y^{32} z^{16}}{(1+x)^{24} (1+y)^{32} (1+z)^{16}}}$$

$$\Rightarrow 8^9 x^3 y^4 z^2 \leq 1$$

$$\text{dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} = \frac{z}{z+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{8}$$

Ví dụ 4: giải hệ:
$$\begin{cases} x^4 + y^2 = \frac{697}{81} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Giải:

-Ví dụ này chúng tôi muốn giới thiệu công cụ xác định miền giá trị của x,y nhờ điều kiện có nghiệm của tam thức bậc hai

-Xét phương trình bậc hai theo x:

$$x^2 + x(y-3) + y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$= (y-3)^2 - 4(y-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (y-1)(3y-7) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}$$

Tương tự xét phương trình bậc hai theo y thì ta có $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$

$$\text{Suy ra: } x^4 + y^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{697}{81}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3} \text{ và } y = \frac{7}{3}. \text{ Tuy nhiên thế vào hệ thì bộ nghiệm này không thỏa}$$

Vì vậy hệ phương trình vô nghiệm

Ví dụ 5: Giải hệ:

$$\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2 y = 2 \\ y^5 - y^4 + 2y^2 z = 2 \\ z^5 - z^4 + 2z^2 x = 2 \end{cases}$$

Ý tưởng của bài toán này là ta phải đoán nghiệm của hệ là $x = y = z = 1$, sau đó chứng minh là $x > 1$ hay $x < 1$ đều vô nghiệm

$$\text{Nếu } x > 1 \Rightarrow 2 = z^5 - z^4 + 2z^2x > z^5 - z^4 + 2z^2 \Rightarrow 0 > (z-1)(z^4 + 2z + 2)$$

Do $z^4 + 2z + 2$ luôn dương nên $1 > z$

Tương tự $\Rightarrow y > 1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow$ Vô lí

Tương tự $x < 1 \Rightarrow$ vô lí. Vậy $x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 1$

Bài tập luyện tập

Giải các hệ:

$$\begin{array}{lll} 1) \quad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases} & 2) \quad \begin{cases} x^2 = (y-1)(z+2) \\ y^2 = (z-1)(x+2) \\ z^2 = (x-1)(y+2) \end{cases} & 3) \quad \begin{cases} 21\frac{y}{x^2} + 6y = 1988 \\ 21\frac{z}{y^2} + 6z = 1988 \\ 21\frac{x}{z^2} + 6x = 1988 \end{cases} \\ 4) \quad \begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \frac{2y^2}{y^2+1} = z \\ \frac{2z^2}{z^2+1} = x \end{cases} & 5) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = 9 \end{cases} & \end{array}$$

B. Đặt ẩn phụ:

Đôi khi bài toán sẽ phức tạp nếu ta giải hệ với ẩn $(x, y, z, \dots)$ nhưng chỉ sau một phép đặt $a = f(x), b = f(y), c = f(z), \dots$

Ví dụ 1: Giải hệ

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{12}{5} \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{18}{5} \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{36}{13} \end{cases}$$

Hướng dẫn: Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$.

Ví dụ 2: Giải hệ:

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(x+z)^2 = (4y^2+y+1)x^2z^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$$

Nếu $x=0$ dễ dàng suy ra được: $y=z=0$. Như vậy $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ là một nghiệm của hệ.

Ta tìm các nghiệm khác $(0, 0, 0)$

Chia hai vế cho $x^2y^2z^2$ ta thu được hệ tương đương:

$$\begin{cases} \left(\frac{y+z}{yz}\right)^2 = 3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ \left(\frac{x+z}{xz}\right)^2 = 4 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \\ \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = 5 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \end{cases}$$

Ta lại đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$ ta nhận được:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = c^2 + c + 5(1) \\ (b+c)^2 = a^2 + a + 3(2) \\ (a+c)^2 = b^2 + b + 4(3) \end{cases}$$

Lấy $(2)-(3) \Rightarrow (a-b)(2(a+b+c)+1) = 1$

$(1)-(2) \Rightarrow (b-c)(2(a+b+c)+1) = 1$

Từ đây suy ra $a-b = b-c \Rightarrow a+c = 2b$

Thay vào (2) ta được $3b^2 - b + 4 = 0$.

Từ đây các bạn có thể dễ dàng giải tiếp bài toán.

Ví dụ 3: Giải hệ

$$\begin{cases} x^3(6+21y) = 1 \\ x(y^3-6) = 21 \end{cases}$$

Nếu giải hệ với ẩn (x, y) thì ở đây ta thật khó để thấy được hướng giải.

Nhưng mọi chuyện sẽ rõ ràng khi ta đặt $x = \frac{1}{z}$.

$$\begin{cases} z^3 = 21y + 6 \\ y^3 = 21z + 6 \end{cases}$$

Đây là hệ đối xứng mà ta có thể dễ dàng tìm ra được hướng giải. **J**

Sau đây là bài tập áp dụng dành cho bạn đọc:

Bài tập luyện tập.

Bài 1: Giải hệ:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + y^2 + 2 = 6 \\ xy(xy + x + y + 1) = 4 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ:

$$\begin{cases} (x + y + z)^3 = 12t^3 \\ (y + z + t)^3 = 12x^3 \\ (z + t + x)^3 = 12y^3 \\ (t + x + y)^3 = 12z^3 \end{cases}$$

C. Tính các đại lượng chung

Ý tưởng của phương pháp này là tính các đại lượng trong đó.

Ví dụ 1: Giải hệ:

$$\begin{cases} xy + y + 2x + 2 = 4 \\ yz + 2z + 3y = 6 \quad (*) \\ xz + z + 3x = 5 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+2) = 6 \\ (y+2)(z+3) = 12 \Rightarrow (x+1)(y+2)(z+3) = \pm 24 \\ (z+3)(x+1) = 8 \end{cases}$$

Từ đây các bạn có thể có thể giải tiếp một cách dễ dàng.

Ví dụ 2: Giải hệ:

$$\begin{cases} u + v = 2(1) \\ ux + vy = 3(2) \\ ux^2 + vy^2 = 5(3) \\ ux^3 + vy^3 = 9(4) \end{cases}$$

Giải:

Nhân $x + y$ vào (3)

$$\Rightarrow ux^3 + vy^3 + ux^2y + vxy^2 = 5(x + y)$$

$$\Rightarrow 9 + 3xy = 5(x + y)$$

Nhân $x + y$ vào (2)

$$\Rightarrow uy + vx = 2(x + y) - 3$$

Nhân $x^2 + y^2$ vào (2)

$$3(x^2 + y^2) = 9 + xy(uy + vx) = 9 + xy[2(x + y) - 3]$$

Đặt $a = x + y; b = xy$.

Đến đây các bạn có thể dễ dàng giải tiếp **J**.

Bài tập luyện tập

Bài 1: Giải hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 50 \\ x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = -24 \\ xz = yt \\ x - y + z + t = 0. \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ

$$\begin{cases} y^2 - xz = b \\ z^2 - xy = c \\ x^2 - yz = a \end{cases} \quad (a, b, c \text{ là những hằng số})$$

Bài 3: Giải hệ

$$\begin{cases} ax + by = (x - y)^2 \\ by + cz = (y - z)^2 \\ cz + ax = (z - x)^2 \end{cases} \quad (a, b, c \text{ là những hằng số})$$

Bài 4: Giải hệ.

$$\begin{cases} x^3 + x(y - z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z - x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x - y)^2 = 16 \end{cases}$$

D. Nhân liên hợp.

Phương pháp này chủ yếu bỏ dấu căn thức để dễ tính toán hay để xuất hiện những đại lượng có thể đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1: Giải hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+5} = 6 \end{cases} \quad (1)$$

Giải:

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{x} + \sqrt{y+5} + \sqrt{y} = 13 \\ \sqrt{x+5} - \sqrt{x} + \sqrt{y+5} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+5} + \sqrt{y} + \sqrt{y+5} = 13 \\ \frac{5}{\sqrt{x} + \sqrt{x+5}} + \frac{5}{\sqrt{y+5} + \sqrt{y}} = 2 \end{cases}$$

Đặt

$$u = \sqrt{x} + \sqrt{x+5}$$

$$v = \sqrt{y} + \sqrt{y+5}$$

Ta suy ra:

$$\begin{cases} u+v=10 \\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+v=10 \\ uv=25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u=v=5 \Rightarrow x=y=2.$$

Ví dụ 2: Giải hệ:

$$\begin{cases} \left(3-\frac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y}=4 \\ \left(3+\frac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x}=2 \end{cases}$$

Giải:

Từ hệ ta suy ra điều kiện:

$$x, y > 0$$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2y}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 6 \\ \frac{10}{y+42x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{2y}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{y+42x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{y}$$

$$\Rightarrow 15xy = (y-2x)(y+42x)$$

$$\Rightarrow y^2 + 25xy - 84x^2 = 0$$

$$\Rightarrow (3x-y)(y+28x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = y \\ y + 28x = 0 \end{cases}$$

Trường hợp thứ hai ta loại do không thỏa điều kiện $x, y > 0$.

Thay vào hệ ban đầu ta thu được nghiệm sau:

$$(x, y) = \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{27}, \frac{5+2\sqrt{6}}{9} \right)$$

Bài tập luyện tập

Bài 1: Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} + \sqrt{y+1} = 5 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+6} = 5 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ

$$\begin{cases} -\sqrt{x+y} + \sqrt{xy+1} = 5 - \sqrt{2} \\ (x-1)(y-1) = 1 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{y+1} + \sqrt{y} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ y + x + 2\sqrt{(x+1)(y+1)} = 0 \end{cases}$$

Kết thúc bài viết là phần bài tập tổng hợp các mục về hệ phương trình mà ta đã xem xét:

III) Bài tập tổng hợp.

Bài 1: Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{cases} x^2y + xy^2 = 6. \\ xy + x + y = 5. \end{cases} \\ \text{b)} & \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ x(x+1) + y(y+1) = 12 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x + |y| + x^3 + 2x^2|y| + 2xy^2 + |y^3| = 0 \\ x|y| = -2. \end{cases}$$

Bài 4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ 2xy + 1 = 2a \end{cases}$$