

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH (U.C.T)

Hoàng Quốc Việt (viet 1846)
Tư Mã Trọng Đạt (WhjteShadow)
LzuTao

11/08/2015

Tóm tắt nội dung

Chắc hẳn chúng ta đều đã từng nghe thấy, hay đã từng sử dụng phương pháp ẩn tượng này để chứng minh các bất đẳng thức từ đơn giản đến phức tạp. Hôm nay (nhân dịp nông nhàn), mình cũng xin phép được trình bày một số hiểu biết nho nhỏ của mình về phương pháp này.

Nói đến *U.C.T* thì chúng ta đang nói đến phương pháp chứng minh bất đẳng thức bằng các bất đẳng thức phụ. Đối với những bạn chưa từng biết về phương pháp này thì việc đưa ra các bất đẳng thức phụ thật sự là một câu hỏi khó. Phương pháp này cũng khá rộng nên hôm nay mình cũng chia sẻ cách mà chúng ta sử dụng phương pháp này để giải một dạng bài quen thuộc.

1 Bài toán 1:

Cho $a; b; c \geq 0$ thỏa mãn $f(a) + f(b) + f(c) = 3k$. Chứng minh rằng:

$$g(a) + g(b) + g(c) \geq 3k'$$

(Bài toán có cực trị (dấu bằng xảy ra) tại tâm nghĩa là $a = b = c = x_0$)

1.1 Các kiến thức cần sử dụng:

Định lý *Fermat*: Cho hàm $f : (a; b) \rightarrow R$ nếu hàm f đạt cực trị tại $c \in (a; b)$ thì $f'(c) = 0$

Các công thức *logarit*: $\ln abc = \ln a + \ln b + \ln c$ với $a; b; c > 0$ Công thức này giúp ta chuyển BĐT có điều kiện dạng tích về dạng tổng.

Đạo hàm của hàm Logarit:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Bất đẳng thức *Jensen*

*) Cho f là hàm lồi trên $(a; b)$ với $x_i \in (a; b)$ $i = \overline{1; n}$ ta có:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

**) Cho f là hàm lõm trên $(a; b)$ với $x_i \in (a; b)$ $i = \overline{1; n}$ ta có:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$$

Ví dụ: $y = x^2$ là hàm lồi

Để đơn giản hơn thì các bạn chỉ cần nhớ rằng $f''(x) > 0$ với $x \in (a; b)$ thì f lồi trên $(a; b)$ và ngược lại.

Nguồn: <http://mathworld.wolfram.com/JensensInequality.html>

1.2 Cách xây dựng các bất đẳng thức phụ. (Với bài toán tôi đã nêu ở trên)

Chúng ta sẽ hệ số bất định như sau.

$$g(x) \geq k' + \alpha [f(x) - k]$$

Vấn đề là ta cần tìm α (gọi là hệ số bất định)

Ta có bất đẳng thức mà ta giả sử sẽ tương đương với:

$$h(x) = g(x) - k' - \alpha [f(x) - k]$$

Sẽ đạt cực trị tại $x = x_0$ hay theo định lý *Fermat* là $h'(x_0) = 0$

Hay

$$\alpha = \frac{g'(x_0)}{f'(x_0)}$$

Vậy bất đẳng thức của ta cần tìm sẽ có dạng:

$$g(x) \geq k' + \frac{g'(x_0)}{f'(x_0)} [f(x) - k]$$

Bây giờ sẽ lại nảy sinh ra vấn đề mới, bất đẳng thức trên luôn đúng hay không? Nếu nó không phải luôn đúng thì ta sẽ xử lý chúng ra làm sao?

Có thể trả lời luôn, bất đẳng thức trên không phải luôn đúng, và công việc của ta sau khi xây dựng bất đẳng thức trên xong là kiểm tra lại bất đẳng thức đó (có thể khảo sát hàm số, hay biến đổi tương đương). Nếu bất đẳng thức của ta là luôn đúng thì xong luôn (đi ngủ), nếu không phải luôn đúng (cái này mệt rồi đây) thì ta khoanh vùng những điểm nhạy cảm (thường là những điểm làm cho BĐT đổi chiều, hay các điểm là cho hàm số chuyển từ lồi sang lõm ...) và cuối cùng là chia trường hợp để xử lý.

Chỉ đơn giản là có vậy thôi, nhưng sức mạnh của nó thì đã được kiểm chứng. Nó có thể chứng minh những bất đẳng thức khó mà không cần động đến những phương pháp trâu bò như $EV, LCF - RCF...$

Ví dụ: (để tối mình sẽ lấy, giờ phải đi nấu cơm đã) :D

2 Ví dụ 1: Bất đẳng thức $AM - GM$

Cho n số không âm $a_1; a_2; \dots; a_n$ chứng minh rằng:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

2.1 Chứng minh:

*) Nếu tồn tại $x_i = 0$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

**) Nếu $x_i > 0$

Ta đặt $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}$ khi đó ta có BĐT đã cho theo biến mới là:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Với $x_1 x_2 \dots x_n = 1 \Leftrightarrow \ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_n) = 0$

Bất đẳng thức được viết lại là:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$$

Bây giờ bất đẳng thức đã cho đã trở về đúng dạng của bài toán ta đang xét. :D

Hệ số bất định:

$$x \geq 1 + \alpha \cdot \ln x$$

Đạo hàm hai vế và cho $x = 1$ ta được $\alpha = 1$

Vậy ta gia cát dự được bất đẳng thức sau:

$$x \geq 1 + \ln x$$

Tiếp theo là kiểm tra bất đẳng thức này: Xét hàm số $f(x) = x - \ln x - 1$ với $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Dễ thấy $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua 1

Từ đó suy ra $f(x) \geq f(1) = 0$

Như vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh. :D

PS: *) Lời giải trên tôi đã sử dụng khá nhiều kĩ thuật cần thiết khi sử dụng phương pháp này. Ban đầu là chuẩn hóa bất đẳng thức để có điều kiện ở dạng tích, tiếp theo sử dụng công thức hàm *Logarit* để đưa điều kiện dạng tích về dạng tổng giống như bài toán ban đầu. Với cách này thì chắc hẳn các bạn sẽ hiểu vì sao tôi không chia ra làm nhiều bài toán con với điều kiện dạng tích hay bất đẳng thức cần chứng minh có dạng tích. Thứ ba, khi bất đẳng thức của ta có dính đến hàm siêu việt thì việc sử dụng hàm số là điều bắt buộc phải làm (không thể dùng biến đổi tương đương ở đây được). :D

**) Ngoài cách chuẩn hóa như trên thì chúng ta có thể chuẩn hóa điều kiện theo dạng tổng bằng cách đặt $x_i = \frac{na_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ các bạn có thể làm thử cách này. :D

3 Bài toán 2: Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng

$$10(x^3 + y^3 + z^3) - 9(x^5 + y^5 + z^5) \geq 1$$

3.1 Chứng minh:

Nhận xét bất đẳng thức này có dấu bằng tại 2 điểm là $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = b = 0; c = 1$ nhưng ta cứ giả vờ là mình không biết bất đẳng thức này có cực trị tại biên đi xem thế nào?

3.2 Phân tích:

Bằng phương pháp *U.C.T* ta dễ đoán có bất:

$$10x^3 - 9x^5 \geq \frac{25}{9}x - \frac{16}{27} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^2 (27x^3 + 18x^2 - 21x - 16) \leq 0$$

Rõ ràng bất đẳng thức này không phải là luôn đúng, nó phụ thuộc vào dấu của $f(x) = 27x^3 + 18x^2 - 21x - 16$

Ta có

$$\begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \approx 0.9 \dots \approx \frac{9}{10} \\ f(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_0 \approx 0.9 \dots \approx \frac{9}{10} \Rightarrow (1) \text{ True} \\ f(x) > 0 \Leftrightarrow x > x_0 \approx 0.9 \dots \approx \frac{9}{10} \Rightarrow (1) \text{ False} \end{cases}$$

Đến đây ta sẽ tiến hành giải bằng cách chia trường hợp.

-) TH1: Trong ba số có 1 số $\in \left[\frac{9}{10}; 1\right]$

Giả sử $x \in \left[\frac{9}{10}; 1\right] \Rightarrow y, z \in \left[0; \frac{1}{10}\right]$

Ta có:

$$\begin{cases} 10x^3 - 5x^5 \geq 1 \\ 10y^3 - 5y^5 \geq 0 \\ 10z^3 - 5z^5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow True$$

-) TH2: cả ba số cùng $\in \left[0; \frac{9}{10}\right]$

Khi đó

$$\begin{cases} 10x^3 - 9x^5 \geq \frac{25}{9}x - \frac{16}{27} \\ 10y^3 - 9y^5 \geq \frac{25}{9}y - \frac{16}{27} \\ 10z^3 - 9z^5 \geq \frac{25}{9}z - \frac{16}{27} \end{cases} \Rightarrow true$$

BDT đã đc chứng minh.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c = \frac{1}{3} \\ a = b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$. Cùng các hoán vị.

PS: Như vậy ta có thể thấy rằng phương pháp này cũng có thể giải quyết những bất đẳng thức có cực trị không chỉ tại tâm, :D

4 Ví dụ 3:

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $abc = 1$. CMR:

$$\frac{1}{(1+2a)^2} + \frac{1}{(1+2b)^2} + \frac{1}{(1+2c)^2} \geq \frac{1}{3}$$

Lời giải:

TH1: trong ba số a, b, c có ít nhất một số $\in \left(0; \frac{1}{20}\right]$ giả sử $a \in \left(0; \frac{1}{20}\right]$

Khi đó ta có:

$$\frac{1}{(2a+1)^2} \geq \frac{100}{121} > \frac{1}{3}$$

TH2: cả ba số đều $\in \left(\frac{1}{20}; +\infty\right)$ khi đó không mấy khó khăn ta chứng minh được rằng

$$\begin{cases} \frac{1}{(2a+1)^2} \geq \frac{1}{9} - \frac{4}{27} \ln a \\ \frac{1}{(2b+1)^2} \geq \frac{1}{9} - \frac{4}{27} \ln b \\ \frac{1}{(2c+1)^2} \geq \frac{1}{9} - \frac{4}{27} \ln c \end{cases} \Rightarrow true$$

BDT được chứng minh. Dấu " = " xảy ra khi $a = b = c = 1$

5 Ví dụ 4:

(Trâu bò húc) Cho $a; b; c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 3a + 3}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - 3b + 3}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - 3c + 3}} \leq 3$$

Lời giải:

Mình xin được nguyên văn lời giải trong sách mình:

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

Với mọi $x \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, ta có

$$\frac{2}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}} \leq x + 1$$

Thật vậy, BĐT tương đương $(x - 1)^2(x^2 + x - 1) \geq 0$.

Suy ra

* Nếu $c \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, sử dụng BDT trên với a, b, c rồi cộng lại ta dễ có đpcm.

* Nếu $c \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, ta xét 2 khả năng

-TH1: $b \leq 1$, ta có

$$a^2 - 3a + 3 = (a - 1,5)^2 + 0,75 \geq 0,75$$

$$b^2 - 3b + 3 = (b - 1)^2 + 2 - b \geq 1$$

$$c^2 - 3c + 3 = (c - 1)^2 + 2 - c \geq (1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2})^2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2 = \frac{16}{(\sqrt{5} + 1)^2}$$

$$\text{Do đó } VT \leq \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + 1 < 3$$

-TH2: $b \geq 1$ suy ra $2 \geq a \geq b \geq 1$ xét $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$ trên $[1; 2]$, ta có

$$f''(x) = \frac{8x^2 - 24x + 15}{4(x^2 - 3x + 3)^{2,5}} < 0$$

Do đó theo BDT *Jensen* ta có

$$f(a) + f(b) \leq 2f(\frac{a+b}{2}) = 2f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}}$$

Vậy ta cần có

$$\frac{2}{\sqrt{t^2 - 3t + 3}} + \frac{1}{\sqrt{(3 - 2t)^2 - 3(3 - 2t) + 3}} \leq 3$$

$$\text{Hay } \frac{(t - 1)^2(36t^6 - 252t^5 + 749t^4 - 1202t^3 + 1099t^2 - 546t + 117)}{(t^2 - 3t + 3)^2(4t^2 - 6t + 3)^2} \geq 0$$

BDT trên đúng, vậy ta có đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

WhiteShadow đã nói:

Ta xét hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^3 - 3a + 3}}$ thì ta có hàm này lõm trên khoảng $[0, \frac{7}{4}]$

Ta có $0 \geq 1 \leq \frac{7}{4}$. do đó theo định lý LCF thì ta chỉ cần cm

$$2f(x) + f(y) \leq 3f(1) \forall x, y \geq 0 \text{ và } 2x + y = 3$$

cái m= này thì cm giống anh Việt thui :))

6 Kết hợp bất Vacs và phương pháp UCT

Trước tiên ta nói về bất đẳng thức Vacs

Cho $a; b; c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1$$

Chứng minh:

Bài này ta hoàn toàn có thể dùng kĩ thuật ở trên để chứng minh, nhưng mình sẽ chứng minh nó bằng bất đẳng thức *Cauchy - Schwarz*.

Do $abc = 1$ nên sẽ tồn tại $x; y; z > 0$ sao cho $a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{cyc} \frac{1}{\frac{yz}{x^2} + \frac{y^2z^2}{x^4} + 1} = \sum_{cyc} \frac{x^4}{x^4 + x^2yz + y^2z^2} \\ &\geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} \geq 1 \end{aligned}$$

Thật vậy BDT cuối tương đương:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x \geq xyz(x + y + z)$$

Đây là bất quen thuộc. Nên ta có điều phải chứng minh. :D

Áp dụng của bất này thì mình sẽ post sau. :D giờ có việc bận rồi.

7 Ứng Dụng Của Vacs

Như chúng ta đã nói ở trên là ta có bdt:

$$\frac{1}{a^{2k} + a^k + 1} + \frac{1}{b^{2k} + b^k + 1} + \frac{1}{c^{2k} + c^k + 1} \geq 1$$

Với điều kiện $abc = 1$

Ngoài ra ta có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng khác:

$$\frac{a^k + 1}{a^{2k} + a^k + 1} + \frac{b^k + 1}{b^{2k} + b^k + 1} + \frac{c^k + 1}{c^{2k} + c^k + 1} \leq 2$$

Với cùng điều kiện trên.

Thật vậy bất đẳng thức này được viết lại:

$$\sum_{cyc} \left(1 - \frac{a^k + 1}{a^{2k} + a^k + 1} \right) \geq 1$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{\frac{1}{a^{2k}} + \frac{1}{a^k} + 1} \geq 1$$

Đây là bất đẳng thức đã chứng minh trên. :D

Hai dạng này là tương đương với nhau, nhưng ở những bài toán khác nhau thì ta có thể áp dụng chúng một cách linh hoạt.

Ví dụ 1: Cho các số dương $a; b; c$ thỏa mãn $abc = 1$ chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{4a^2 - 2a + 1} \geq 1$$

Bài giải:

Phân tích: Thứ nhất bài toán yêu cầu chứng minh theo chiều $\geq$ nghĩa là ta cần đánh giá:

$$\frac{1}{4a^2 - 2a + 1} \geq \frac{1}{a^{2k} + a^k + 1}$$

với k là hệ số bất định.

Và yêu cầu của chúng ta bây giờ là tìm k thích hợp. Cách làm thì không khác gì đối với loại bài trên.

Ta có BDT vừa rồi tương đương:

$$a^{2k} + a^k \geq 4a^2 - 2a$$

đạo hàm hai vế và cho $a = 1$ ta có $k = 2$

Như vậy ta có bất:

$$\frac{1}{4a^2 - 2a + 1} \geq \frac{1}{a^4 + a^2 + 1}$$
$$\Leftrightarrow a(a^3 - 3a + 2) \geq 0$$

luôn đúng theo $AM - GM$.

Vậy BDT của ta được chứng minh. :D

Ví dụ 2: Cho các số dương $a; b; c$ thỏa mãn $abc = 1$ chứng minh rằng:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2 - a + 1} \leq 3$$

Lời giải:

Bây giờ bài toán cần chứng minh với chiều $\leq$ khi đó ta sẽ cần đánh giá như sau:

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} \leq \frac{3}{2} \frac{a^k + 1}{a^{2k} + a^k + 1}$$

Việc tìm k tương tự như những bài toán từ đầu đến giờ, xin nhường bạn đọc. :D
 Nhận xét: BDT $Vacs$ là một BDT khá chặt, vì thế nên nó có ứng dụng khá lớn trong chứng minh các bất đẳng thức cùng loại. Các bạn có thể áp dụng những phương pháp này để chứng minh các bất đẳng thức khác. Việc tự nhiên cho ra các bất đẳng thức phụ và kết hợp nó với một bổ đề trên trời rơi xuống sẽ làm cho cách giải của ta trở nên độc đáo (đối với những người chưa biết đến pp này) :D

8 Ví dụ 5. Cho $a; b; c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{2b^2 + bc + c^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{2c^2 + ca + a^2}} \geq \frac{a + b + c}{2}$$

WhiteShadow đã nói: Ủng hộ anh Việt 1 bài khá hay dùng hệ số bất định :-?
 Xét 1 bất đẳng thức phụ sau:

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} \geq \frac{11a - 3b}{16}, \quad \forall a, b > 0$$

*TH1: Nếu $11a - 3b \leq 0$ Thì lúc đó hiển nhiên có

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} \geq 0 \geq \frac{11a - 3b}{16}$$

*TH2: Nếu $11a - 3b > 0$ Ta thực hiện phép biến đổi:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} - \frac{11a - 3b}{16} &= \frac{16a^2 - (11a - 3b)\sqrt{2a^2 + ab + b^2}}{16\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} \\ &= \frac{256a^2 - (11a - 3b)(2a^2 + ab + b^2)}{[16a^2 + (11a - 3b)\sqrt{2a^2 + ab + b^2}].16\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} \\ &= \frac{(a - b)^2(14a - 3b)(a + 3b)}{[16a^2 + (11a - 3b)\sqrt{2a^2 + ab + b^2}].16\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} \end{aligned}$$

Nhưng do $11a - 3b > 0$ nên $14a - 3b > 0$ Hay bất đẳng thức này đúng. Vậy ta có $\forall a, b > 0$ thì:

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} \geq \frac{11a - 3b}{16}$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự và cộng lại ta dễ dàng có $Q.e.D$ Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

**Cách để tìm ra bất đẳng thức phụ trên:

Ta nghĩ đến việc phải tìm m, n sao cho $\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} \geq ma + nb \quad \forall a, b > 0$

+Ch0 $a = b = 1$ ta có $m + n = \frac{1}{2}$

+Ch0 $b = 1$ rồi đạo hàm 2 vế ta được:

$$\frac{4a(2a^2 + a + 1) - a(4a + 1)}{2\sqrt{2a^2 + a + 1} \cdot (2a^2 + a + 1)} = m$$

Cho $a = 1$ ta sẽ tìm ra được $m = \frac{11}{16} \rightarrow n = -\frac{3}{16}$

P/s: Em nhớ a có 1 topic bên toanphothong về cái bất Vacs đó. Anh thử tìm + cop lại xem :-?

Ngoài cách như của Đạt thì ta có thể làm như sau:

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 + ab + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \stackrel{t=\frac{b}{a}}{=} \frac{a}{\sqrt{1 + t + t^2}}$$

Bằng phương pháp hệ số bất định ta có dự đoán:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + t + t^2}} \geq \frac{11}{16} - \frac{3}{16}t$$

Thay ngược lại sẽ có kết quả như của Đạt. :D