SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TUYÊN QUANG

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2014 – 2015
Môn thi: Toán
Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*)
(Đề này có 01 trang)

Câu 1 (*6 điểm*). Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2(x^2+1)+1}+\sqrt{3}\left(x^2+1\right)=3\sqrt{3}\,x \quad (x\in\mathbb{R})$.

b) $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4} \\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$.

Câu 2 (*5 điểm*).

a) Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$4\sin A+3\sin B+5\sin C\le 4\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{C}{2}+6\cos\frac{B}{2}.$$

b) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho trong khai triển của nhị thức Niuton $(1+x)^n$ có hai số hạng liên tiếp mà tỉ số các hệ số của nó bằng $\frac{7}{15}$.

Câu 3 (*2 điểm*). Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2u_n+\frac{8}{u_n^2}\right),\forall n\ge 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $u_n\ge 2$ và $u_{n+1}\le u_n$ với mọi n nguyên dương.

Câu 4 (*5 điểm*).

a) Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, D là trung điểm AB, E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh IE vuông góc CD.

b) Cho hình chóp S.ABC có $\widehat{SAC}=\widehat{SCB}=\widehat{ABC}=90^0$ và SA=$\frac{25}{4}$ cm, AB = 4cm, BC = 3cm. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

Câu 5 (*2 điểm*). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $2\sqrt{xy}+\sqrt{xz}=1$

Chứng minh rằng: $\frac{3yz}{x}+\frac{4zx}{y}+\frac{5xy}{z}\ge 4$.

Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

---Hết---

ĐÁP ÁN

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 THPT

Môn: Toán lớp 12

Câu 1 (6 *điểm*) a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2(x^2+1)+1}+\sqrt{3}\left(x^2+1\right)=3\sqrt{3}x$,với $x\in\mathbb{R}$

Hướng dẫn chấm	Điểm
Phương trình $\sqrt{x^2(x^2+1)+1}+\sqrt{3}\left(x^2+1\right)=3\sqrt{3}x$ *(1)*	**3.0 điểm**
Từ pt ta thấy $x\rangle 0$ (1) $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\sqrt{3}\left(x+\frac{1}{x}\right)=3\sqrt{3}$	0,25 0,5
Đặt: $t=x+\frac{1}{x}, t\geq 2$	0,5
Pt trở thành: $\sqrt{t^2-1}=\sqrt{3}\left(3-t\right)$	0,5
$\Leftrightarrow\begin{cases}t\leq 3\\ t^2-9t+14=0\end{cases}\Leftrightarrow t=2$	0,75
$x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x=1$	0,5

b) Giải HPT $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4} & (1)\\ x^2-y^2-3x+3y+1=0 & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn chấm	Điểm
b) Ta có: $x+\sqrt{x^2-2x+5}=3y+\sqrt{y^2+4}$ (1) $\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{y^2+4}=3y-x$ (Trục căn thức ta được) $\Leftrightarrow\frac{x^2-y^2-2x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{y^2+4}}=3y-x$.	 0,5 0,5
Thay (2) vào ta được $(x-3y)(\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{y^2+4}}+1)=0$ $\Leftrightarrow x=3y$.	0,5 0,5
Với $x=3y$ thay vào (2) và giải ta được nghiệm của hệ là $(x,y)=\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4}\right)$.	1,0

Câu 2 (5 *điểm*)

a) Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$4\sin A+3\sin B+5\sin C\le 4\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{C}{2}+6\cos\frac{B}{2}.$$

Hướng dẫn chấm	**Điểm**
Ta có $VT=(\sin A+\sin B)+2(\sin B+\sin C)+3(\sin C+\sin A)$.	0,5
Mặt khác $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}\le 2\sin\frac{A+B}{2}=2\cos\frac{C}{2}$.	1,0
Tương tự: $2(\sin B+\sin C)\le 4\cos\frac{A}{2}$; $3(\sin C+\sin A)\le 6\cos\frac{B}{2}$.	0,5
Cộng các BĐT trên suy ra điều cần chứng minh.	0,5

b) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho trong khai triển của nhị thức Niuton $(1+x)^n$ có hai số hạng liên tiếp mà tỉ số các hệ số của nó bằng $\frac{7}{15}$.

	2,5đ
Hai số hạng liên tiếp của khai triển là: C_n^k và C_n^{k+1} theo giả thiết ta có: $\dfrac{C_n^k}{C_n^{k+1}}=\dfrac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}=\dfrac{k+1}{n-k}=\dfrac{7}{15}$	0,5
$\Rightarrow n=\dfrac{22k+15}{7}=3k+2+\dfrac{k+1}{7}$	0,5
Để $n\in Z_+^*$ là số nguyên dương nhỏ nhất khi $k\in Z_+^*$ thì số nguyên dương k nhỏ nhất để $\frac{k+1}{7}\in Z_+^*$, là k = 6	1,0
Từ đó tìm được n = 21	0,5

Câu 3 (2 *điểm*). Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2u_n+\dfrac{8}{u_n^2}\right),\forall n\ge 1\end{cases}$$

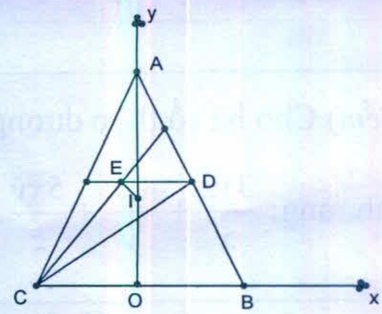
Chứng minh rằng $u_n\ge 2$ và $u_{n+1}\le u_n$ với mọi n nguyên dương.

Hướng dẫn chấm	**Điểm**
Từ giả thiết ta thấy $u_n>0,\forall n\ge 1$.	0,25
Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+u_n+\frac{8}{u_n^2})\ge 2,\forall n\ge 1\Rightarrow u_n\ge 2,\forall n\ge 2\Rightarrow u_n\ge 2,\forall n\ge 1$.	0,75
Mặt khác $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}\left(\frac{8}{u_n^2}-u_n\right)=\frac{8-u_n^3}{3u_n^2}$.	0,5
Theo a) thì $u_n\ge 2$ suy ra $8-u_n^3\le 0\Rightarrow u_{n+1}-u_n\le 0\Rightarrow u_{n+1}\le u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.	0,5

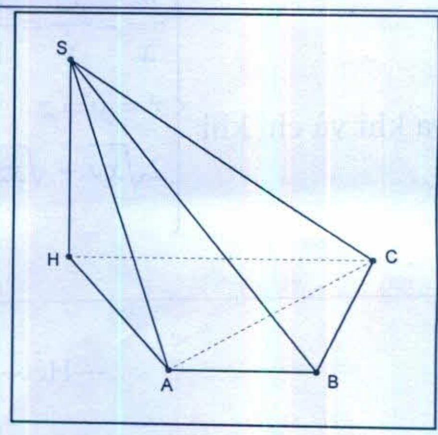
Câu 4 (5 *điểm*)

a) Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, D là trung điểm AB, E là trọng tâm tam giác ACD.

Chứng minh IE vuông góc CD.

Hướng dẫn chấm	**Điểm**
Gọi O là trung điểm của BC. Chọn hệ trục tọa độ như sau: O(0;0), A(0;a), B(b;0), C(-b;0), D$\left(\dfrac{b}{2};\dfrac{a}{2}\right)$ E$\left(-\dfrac{b}{6};\dfrac{a}{2}\right)$ (a>0; b> 0)  	0,5
Vì ΔABC cân nên đỉnh A nên I(0;y) $\overrightarrow{ID}=\left(\dfrac{b}{2};\dfrac{a}{2}-y\right)$, $\overrightarrow{AB}$=(b;-a) Do ID $\perp$ AB $\Rightarrow \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=0$ $\Leftrightarrow \dfrac{b}{2}.b+\left(\dfrac{a}{2}-y\right)(-a)=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{a^2-b^2}{2a}$	0,5 0,5
Vậy $I\left(0;\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right),\overrightarrow{IE}=\left(-\dfrac{b}{6};\dfrac{b^2}{2a}\right),\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{3b}{2};\dfrac{a}{2}\right)$ Suy ra: $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{DC}=-\dfrac{b}{6}.\dfrac{3b}{2}+\dfrac{b^2}{2a}.\dfrac{a}{2}=0$ Vậy IE$\perp$ CD	0,5 0,5

b) Tính V chóp S.ABC

Hướng dẫn chấm	**Điểm**
Vẽ đúng hình  	0,25
ΔABC vuông tại B nên AC=5cm Gọi H là hình chiếu của S trên mp(ABC) Vì AC$\perp$SA nên AC$\perp$HA	0,5

Tương tự, BC $\perp$ HC Suy ra HC//AB	0,5
Do đó, $\widehat{HCA} = \widehat{BAC}$. *Vì vậy* $\Delta ACH \sim \Delta BAC$ $\Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AC}{BA}$ *nên* $AH = 15/4$. *Suy ra,* $SH = 5$ *cm*	0,75
Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SH = \frac{1}{6} AB.BC.SH = 10cm^3$	0,5

Câu 5 (2 *điểm*) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 4$. Khi nào dấu đẳng thức xảy ra?

Hướng dẫn chấm	Điểm
$\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xz}{y}} = 2z \ (1)$ Ta có $\frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{y}.\frac{xy}{z}} = 2x \Leftrightarrow 3(\frac{xz}{y} + \frac{xy}{z}) \geq 6x \ (2)$ $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{z}.\frac{yz}{x}} = 2y \Leftrightarrow 2(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}) \geq 4y \ (3)$	0,75
Cộng (1), (2), (3) ta được: $\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 2x + 4y + 6z = 2[(x+z) + 2(x+y)]$ $\geq 2(2\sqrt{xz} + 4\sqrt{xy}) = 4$	0,75
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} = \frac{xy}{z} \\ x = y = z \\ 2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$	0,5

---Hết---