

ĐA THỨC CHEBYSHEV

Ngày 9 tháng 10 năm 2015

Đỗ Trọng Đạt ¹ -Trần Trung Kiên ²

LỜI NÓI ĐẦU

Đa thức Chebyshev là 1 mối liên kết đẹp giữa đại số và lượng giác. Tuy trong các kì thi Olympic gần đây, đa thức Chebyshev ít được xuất hiện vì hệ thống bài tập mang tính chất liên quan lí thuyết của nó, nhưng việc hiểu biết và nghiên cứu đa thức Chebyshev vẫn là một chủ đề rất được quan tâm khi dạy và học toán Olympic. Trong bài viết này chúng tôi sẽ hệ thống lại những tính chất quen thuộc của đa thức Chebyshev, một số ví dụ ứng dụng và hướng phát triển của những bài tập xung quanh đó.

Mặc dù chúng tôi đã cố gắng trong quá trình biên soạn nhưng không tránh khỏi sai sót mong bạn đọc góp ý để hoàn thiện hơn.

¹Sinh viên K60 lớp cử nhân tài năng Toán học ĐHKHTN-ĐHQGHN.

²TP.Hồ Chí Minh

I. LÝ THUYẾT

1 Định nghĩa

1.1 Đa thức Chebyshev loại 1

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại duy nhất đa thức $T_n(x)$ thỏa mãn :

$$T_n(\cos x) = \cos nx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Được gọi là đa thức Chebyshev loại 1.

Dễ thấy rằng $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ và do $\cos(n+1)x = 2\cos x \cdot \cos nx - \cos(n-1)x$ nên ta có

$$T_{n+1}(x) = 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Công thức này cũng chứng tỏ được sự duy nhất của T_n .

Chữ T trong tên đa thức là viết tắt tên của nhà toán học Nga *Tschebyscheff*, một vài đa thức khởi đầu là :

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

1.2 Đa thức Chebyshev loại 2

Với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại duy nhất đa thức $U_n(x)$ sao cho :

$$U(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \quad \forall x \in \mathbb{R}; \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

Được gọi là đa thức *Chebyshev loại 2*.

Dễ thấy $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ và từ hệ thức lượng của $\sin$ ta có

$$U_{n+1}(x) = 2x.U_n(x) - U_{n-1}(x)$$

Và cũng nhờ công thức này, ta có thấy sự duy nhất của U_n .

Một số đa thức khởi đầu của U là :

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

$$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$$

$$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$$

2 Tính chất

2.1. $T_n(x), U_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$, bậc n , hệ số cao nhất lần lượt là 2^{n-1} và 2^n .

2.2. $T_n(x), U_n(x)$ là hàm chẵn khi n chẵn và là hàm lẻ khi n lẻ.

2.3. $T_n(x)$ có đúng n nghiệm thực phân biệt là $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = \overline{0; n-1}$.

U_n có đúng n nghiệm thực phân biệt là $\cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = \overline{1; n}$.

Chứng minh. Do $x \in [-1; 1]$ nên đặt $x = \cos t$, ($t \in [0; \pi]$), ta có :

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos nt = 0$$

Phương trình có đúng n nghiệm $t = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = \overline{0; n-1}$ nên $T_n(x)$ có n nghiệm $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k = \overline{0; n-1}$ là các nghiệm thực phân biệt mà T_n có bậc đúng bằng n . Khẳng định được chứng minh !
Nghiệm của U_n được chứng minh tương tự trên.

2.4. $|T_n(x)| \leq 1 \forall x \in [-1; 1]$ Dấu bằng xảy ra tại $n+1$ điểm $\cos \frac{k\pi}{n}$, $k = \overline{0; n}$ được gọi là các điểm luân phiên Chebyshev (các luân điểm).

Và ta thấy thêm rằng

$$T_n\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right) = (-1)^k$$

Chứng minh. Sử dụng định nghĩa tương tự 2.3.

2.5.

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x)$$

Chứng minh. Sử dụng quy nạp và công thức truy hồi, dễ dàng chỉ ra rằng

$$U_n(x) = 2T_n(x) + U_{n-2}(x) \forall n \geq 2$$

Tiếp tục quy nạp để chứng minh khẳng định ban đầu, ta thấy rằng nó đúng với $n = 0, 1$. Giả sử khẳng định đúng đến n , ta có :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2x.T_n(x) - T_{n-1}(x) \\ \Rightarrow T'_{n+1}(x) &= 2x.T'_n(x) - T'_{n-1}(x) + 2T_n(x) \\ &= 2x.n.U_{n-1}(x) - (n-1)U_{n-2}(x) + 2T_n(x) \\ &= n.U_n(x) + U_{n-2}(x) + 2T_n(x) \\ &= (n+1)U_n(x) \end{aligned}$$

Phép quy nạp hoàn tất !

2.6.

$$T_n\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \forall n \geq 0, x \neq 0$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp, thấy rằng

$$T_0\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] = 1, T_1\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

.

Giả sử điều phải chứng minh đúng đến n , theo công thức truy hồi của T_n ta có :

$$\begin{aligned}
 & T_{n+1} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) T_n \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] - T_{n-1} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} \right)
 \end{aligned}$$

Ta có tính chất được chứng minh

2.7.

$$U_n \left[\frac{1}{2} (x + x^{-1}) \right] = \frac{x^{n+1} - x^{-n-1}}{x - x^{-1}} \quad \forall n \geq 0, x \neq 0, \pm 1$$

Chứng minh. Sử dụng định nghĩa tương tự 2.3.

2.8.

$$T_m(T_n) = T_{mn} \quad \forall m, n \geq 0$$

2.9. $(T_n(x), U_{n-1}(x))$ là cặp nghiệm của phương trình Pell đa thức : $P(x)^2 - (x^2 - 1)Q(x)^2 = 1$
 $\forall x \geq 1$

Có thể dễ thấy điều này từ các đa thức khởi đầu và công thức truy hồi.

2.10.

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}, \quad \forall n \geq 0$$

$$U_{n-1}(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n - (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \forall n \geq 1$$

là 1 hệ quả trực tiếp của phương trình Pell và tính chất trên (Hoặc cũng có thể coi là hệ quả của tính chất 2.6 và 2.7).

2.11. $|U_n(x)| \leq n, \forall x \in [-1; 1], n \in \mathbb{N}$.

Tác giả không muốn sa đà đi sâu vào chứng minh các tính chất trong mục này vì hầu hết chúng đều dễ thấy hoặc chứng minh bằng quy nạp. Bạn đọc có thể tự chứng minh để hiểu rõ hơn về phương pháp quy nạp và đa thức Chebyshev.

II. CÁC VÍ DỤ

Ở phần này chúng ta sẽ giải quyết 1 số bài toán liên quan đến đa thức Chebyshev để hiểu sâu sắc hơn về các tính chất nêu trên. Mở đầu với 1 số bài toán cực trị đa thức :

1. Ứng dụng đa thức Chebyshev trong các bài toán cực trị liên quan đa thức :

Ví dụ 1

1. Cho $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Tìm $b, c \in \mathbb{R}$ để với mọi $x \in [-1; 1]$, ta có: $|f(x)| \leq 1$.
2. Cho $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$. Tìm $a, b, c \in \mathbb{R}$ để $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [-1; 1]$.

Lời giải

1) Xét $|f(-1)|, |f(0)|, |f(1)| \leq 1$, ta có :

$$|2 - b + c| \leq 1; |2 + b + c| \leq 1; |c| \leq 1$$

Nhưng khi đó

$$4 = |2 - b + c + 2 + b + c - 2c| \leq |2 - b + c| + |2 + b + c| + |-2c| \leq 4$$

Vậy đồng thời phải xảy ra các đẳng thức ta được $b = 0; c = -1$ ngược lại với $b = 0; c = -1$ dễ dàng chứng minh được $f(x) = 2x^2 - 1$ thỏa (1) với mọi $x \in [-1; 1]$

2) Ở câu 1), bằng cách xét các giá trị của hàm số tại các điểm biên và điểm 0 đã cho chúng ta 1 cách đánh giá bất đẳng thức để suy ra lời giải, nhưng ở câu 2) này việc dự đoán mò điểm để áp dụng giả thiết là khá khó khăn.

Nhưng để ý kĩ chút, ở câu 1), kết quả thu được của chúng ta là $f(x)$ là một đa thức chebyshev bậc 2, và các điểm được chọn chính là các luân điểm của $f(x)$.

Một cách tự nhiên ta nghĩ đến việc kết quả ở câu này cũng tương tự phải là đa thức Chebyshev bậc 3 và việc xét các điểm là các luân điểm cũng được rõ ràng do phải đánh giá $|f(x)|$ với 1 !

Các điểm đó là $\cos \frac{k\pi}{3}, k = \overline{0; 3}$

Thật vậy, từ giả thiết, ta có

$$|f(1)|, |f\left(\frac{1}{2}\right)|, |f\left(-\frac{1}{2}\right)|, |f(-1)| \leq 1$$

Do đó :

$$|4 + a + b + c| \leq 1,$$

$$|-4 + a - b + c| \leq 1$$

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c \right| \leq 1$$

$$\left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c \right| \leq 1$$

Để ý dấu bằng của bất đẳng thức

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Xảy ra khi các a_i cùng dấu, và nhờ có việc dự đoán $a = 0, b = -3, c = 0$, ta có thể sử dụng bất đẳng thức như sau :

$$|8 + 2b| \leq |4 + a + b + c| + |4 + b - a - c| \leq 2 \Rightarrow |4 + b| \leq 1$$

$$|-1 - b| \leq \left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b - c \right| + \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + c \right| \leq 2$$

Và cuối cùng chỉ cần khử b đi :

$$3 \leq |4 + b| + |-1 - b| \leq 1 + 2 = 3$$

Vậy dấu bằng ở tất cả các bất đẳng thức được xảy ra, hay $b = -3, a = c = 0$.

Lúc đó $f(x) = 4x^3 - 3x$, với $x \in [-1; 1]$ bất kì, tồn tại $\alpha \in [0; \pi]$ để $x = \cos \alpha$, lúc đó $f(x) = \cos 3\alpha \in [-1; 1]$, chính là điều kiện đủ của bài toán.

Tương tự trên, chúng ta có thể tổng quát hóa bài toán :

Ví dụ 2

Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, bậc n và có hệ số cao nhất là 2^{n-1} .

Chứng minh rằng $f(x)$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1 \forall |x| \leq 1$ khi và chỉ khi $f(x)$ là đa thức Chebyshev bậc n .

Lời giải

Cách giải hoàn toàn tương tự với việc xét các luân điểm của đa thức Chebyshev bậc n là $\cos \frac{k\pi}{n}, k = \overline{0; n}$ và thêm tham số vào để giải phương trình khử hệ số các bậc $\leq n-1$ của đa thức.

Đây là 1 bài tập luyện tập cho bạn đọc.

Ví dụ 3

(Đề đề nghị Olympic 30/4-2003) Tìm $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ để $f(x) = \max_{|x| \leq 1} |x^3 + ax^2 + bx + c|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Do có điều kiện $|x| \leq 1$ và đa thức là bậc 3, ta nghĩ ngay đến xét các điểm là các luân điểm của đa thức Chebyshev bậc 3.

Kí hiệu $f(x) = |x^3 + ax^2 + bx + c|$ và $M = \max_{|x| \leq 1} f(x)$

$$\Rightarrow f(1) = |1 + a + b + c|; f(-1) = |1 - a + b - c|$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right|; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{8} - \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - c\right|$$

$$\Rightarrow f(1) + f(-1) \geq |2 + 2b|$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq \left|\frac{1}{4} + b\right|$$

Suy ra

$$f(1) + f(-1) + 2 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) \right] \geq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 6M \geq \frac{3}{2} \Rightarrow M \geq \frac{1}{4}$$

$$M = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{8} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right) \left(\frac{1}{8} - \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - c\right) \geq 0 \\ (1 + a + b + c)(1 - a + b - c) \geq 0 \\ (2 + 2b) \left(\frac{-1}{2} - 2b\right) \geq 0 \\ f(1) = f(-1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = M = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 0 \\ b = \frac{-3}{4} \end{cases}$$

Vậy $\max_{|x| \leq 1} |x^3 + ax^2 + bx + c|$ đạt min bằng $\frac{1}{4}$ khi $a = c = 0; b = -\frac{3}{4}$

Ví dụ 4

Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [-1; 1]$.

Xét $f^*(x) = x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \forall x \neq 0$.

a) Chứng minh rằng :

$$|f^*(x)| \leq |T_n^*(x)|, \forall x \in [-1; 1], x \neq 0$$

Với $T_n(x)$ là đa thức Chebyshev loại 1 bậc n , và

$$T_n^*(x) = x^n \cdot T_n\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \neq 0$$

b) Chứng minh rằng

$$|f^*(x)| \leq 2^{n-1}, \forall x \in [-1; 1]$$

Lời giải

a) Bài toán tương đương với việc chứng minh $|f(x)| \leq |T_n(x)|$ với $x \notin (-1, 1)$.

Đặt các lân điểm $\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) = a_k$ với $k = 0, \dots, n$. Xét sự nội suy Lagrange của $f(x)$ bậc n tại $n+1$ điểm a_k ta có :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(a_k) \frac{(x - a_0) \dots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \dots (x - a_n)}{(a_k - a_0) \dots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \dots (a_k - a_n)}$$

Mặt khác do $|a_k| \leq 1 \forall k = \overline{0; n}$ kết hợp với giả thiết, ta có :

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=0}^n f(a_k) \prod_{i \neq k} \frac{x - a_i}{a_k - a_i} \right| \leq \sum_{k=0}^n |f(a_k)| \prod_{i \neq k} \left| \frac{x - a_i}{a_k - a_i} \right| \leq \sum_{k=0}^n \prod_{i \neq k} \left| \frac{x - a_i}{a_k - a_i} \right| \quad (1)$$

Ta thấy rằng với $x \geq 1$ hoặc $x \leq -1$, tất cả các phân tử dạng $x - a_i$ có cùng dấu.

Và do $a_0 > a_1 > \dots > a_n$ nên tích $\prod_{i \neq k} (a_k - a_i)$ cùng dấu với $(-1)^k$. Từ đó suy ra :

$$\sum_{k=0}^n \prod_{i \neq k} \left| \frac{x - a_i}{a_k - a_i} \right| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \prod_{i \neq k} \frac{x - a_i}{a_k - a_i} \right| \quad (2)$$

Mặt khác ta để ý tính chất quen thuộc của đa thức Chebyshev : $T_n(a_k) = (-1)^k$. Ta áp dụng khai triển Lagrange với đa thức Chebyshev bậc n và $n+1$ luân điểm thì :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \prod_{i \neq k} \frac{x - a_i}{a_k - a_i} = T_n(x). \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có điều phải chứng minh.

b) Với điều đã chứng minh ở câu a), ta chỉ cần chỉ ra thêm rằng $|T_n^*(x)| \leq 2^{n-1} \forall x \in [-1; 1]$ là đủ. Do đa thức Chebyshev T_n có bậc n , hệ số cao nhất là 2^{n-1} , có n nghiệm thực phân biệt

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k = \overline{0; n-1}$$

Nên nó có dạng :

$$T_n(x) = 2^{n-1} \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Vậy nên

$$T_n^*(x) = x^n \cdot T_n\left(\frac{1}{x}\right) = 2^{n-1} (1 - xx_0)(1 - xx_1) \dots (1 - xx_{n-1})$$

Với mọi $x \neq 0$ nhưng vì nó là đa thức nên đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta nhận thấy do $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ nên dãy $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ là dãy đối của dãy $(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)$ (hay $x_{n-1-k} = -x_k \forall k = \overline{0; n-1}$). Từ đó ta cũng có :

$$T_n^*(x) = 2^{n-1} (1 + xx_{n-1})(1 + xx_{n-2}) \dots (1 + xx_0)$$

Từ 2 đẳng thức trên suy ra :

$$(T_n^*(x))^2 = 4^{n-1} (1 - (xx_0)^2) (1 - (xx_1)^2) \dots (1 - (xx_{n-1})^2)$$

Vậy

$$(T_n^*(x))^2 \leq 4^{n-1} \Rightarrow |T_n^*(x)| \leq 2^{n-1} \forall x \in [-1; 1]$$

Phép chứng minh của bài toán được hoàn tất.

Nhận xét: Ở câu a), nhờ có giả thiết $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [-1; 1]$ nên việc nghĩ đến chuyện đánh giá tại các điểm làm cho $|T_n(x)| = 1$ là khá rõ ràng, và thật tiện thay lại có $n+1$ điểm như vậy khi ta muốn đánh giá đa thức bậc n . Sử dụng nội suy Lagrange là 1 hướng đi hoàn toàn tự nhiên !

Ví dụ 5

Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ với $n \geq 2$ là các số thực phân biệt trong đoạn $[-1; 1]$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \geq 2^{n-2},$$

Với $t_k = \left| \prod_{i \neq k} (x_i - x_k) \right|, k = 1, 2, \dots, n$.

Lời giải

Ở bài trước, ta đã thấy được tư tưởng sử dụng nội suy Lagrange tại các nút nội suy là các luân điểm. Ở bài này, các số thực thuộc đoạn $[-1; 1]$ và điều phải chứng minh là so sánh với đại lượng 2^{n-2} cũng làm ta nghĩ tới việc sử dụng Lagrange và sự đánh giá hệ số dẫn đầu.

Xét sự nội suy Lagrange của đa thức Chebyshev $T_{n-1}(x)$ bậc $n-1$ tại n điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ ta có :

$$T_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^n T_{n-1}(x_k) \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Đồng nhất hệ số 2 vế của đa thức, ta có :

$$2^{n-2} = \sum_{k=1}^n \frac{T_{n-1}(x_k)}{(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Nhưng ta để ý, $|T_{n-1}(x)| \leq 1 \forall |x| \leq 1$, và $x_k \in [-1; 1] \forall k = \overline{1; n}$ nên :

$$2^{n-2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|T_{n-1}(x_k)|}{|(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{t_k}$$

Bài toán được chứng minh !

2. Ứng dụng đa thức Chebyshev vào giải các phương trình bậc cao :

Với 1 số công thức bậc cao của đa thức Chebyshev sử dụng với hàm hyperbolic đôi khi cho ta hướng suy nghĩ đặt ẩn phụ và đưa bài toán phương trình cồng kềnh về dạng hồi quy để giải quyết dễ dàng hơn !

Tính chất 1: Giả sử $\cos nt = P_n(\cos t)$ với $P_n(x)$ là đa thức bậc n . Khi đó

$$P_n\left(\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)$$

Tính chất 2: Giả sử $\sin(2k+1)t = P_{2k+1}(\sin t)$, trong đó $P_{2k+1}(x)$ là đa thức đại số bậc $2k+1$. Kí hiệu $Q_{2k+1}(x)$ là đa thức đại số bậc $2k+1$ sinh bởi $P_{2k+1}(x)$ bằng cách giữ nguyên những hệ số ứng với lũy thừa chia 4 dư 1 và thay những hệ số ứng với lũy thừa chia 4 dư 3 bằng hệ số đối dấu khi đó.

$$Q_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(a^{2k+1} - \frac{1}{a^{2k+1}}\right).$$

Nói riêng, ta có 1 số hệ thức liên quan đến hàm Hyperbolic thường được sử dụng sau : Từ $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ ta được

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^2 - 1 \forall a \neq 0$$

Từ $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ ta được

$$\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) = 4\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^3 - 3\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right] \forall a \neq 0$$

Từ $\cos 5t = 16\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t$ ta được

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) = 16m^5 - 20m^3 + 5m \quad \left(m = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right)$$

Từ $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ ta được

$$\frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{a^3} \right) = 4 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right]^3 + 3 \left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right] \quad \forall a \neq 0$$

Từ $\sin 5t = 16 \sin^5 t - 20 \sin^3 t + 5 \sin t$ ta được

$$\frac{1}{2} \left(a^5 - \frac{1}{a^5} \right) = 16m^5 + 20m^3 + 5m \quad \left(m = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right)$$

Sử dụng những đẳng thức trên ta có thể giải quyết những bài toán

Ví dụ 6

Giải phương trình $x^5 + 10x^3 + 20x - 18 = 0$

Lời giải

Ta có công thức sau

$$\frac{1}{2} \left(a^5 - \frac{1}{a^5} \right) = 16m^5 + 20m^3 + 5m$$

Trong đó $m = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)$ (đa thức Chebyshev) (1)

Ta đặt $x = \sqrt{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)$ ($a \neq 0$)

(có thể đặt được do $a - \frac{1}{a}$ là hàm liên tục trên khoảng $(-\infty, 0)$ và $(0, +\infty)$ đồng thời nó vét hết toàn bộ tập $\mathbb{R}$)

Từ đó, phương trình được viết lại

$$\begin{aligned} 4\sqrt{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)^5 + 20\sqrt{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)^3 + 20\sqrt{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) - 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)^5 + \frac{5}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)^3 + \frac{5}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) &= \frac{9\sqrt{2}}{8} \quad (2) \end{aligned}$$

Áp dụng công thức (1) vào phương trình (2) ta được

$$\frac{1}{2} \left(a^5 - \frac{1}{a^5} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow (a^5)^2 - \frac{9\sqrt{2}}{4} a^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt[5]{\frac{9 \pm \sqrt{113}}{4\sqrt{2}}}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = \sqrt{2} \left(\sqrt[5]{\frac{9 + \sqrt{113}}{4\sqrt{2}}} - \sqrt[5]{\frac{4\sqrt{2}}{9 + \sqrt{113}}} \right)$$

Ví dụ 7

Chứng minh rằng phương trình $16x^5 - 20x^3 + 5x + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất. Tìm giá trị của nghiệm đó.

Lời giải

TH1: $|x| \leq 1$. Đặt $x = \cos a$ với $0 \leq a \leq \pi$. (1) trở thành:

$$16 \cos^5 a - 20 \cos^3 a + 5 \cos a + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 5a = -2$$

Phương trình này vô nghiệm a nên (1) vô nghiệm x mà $|x| \leq 1$.

TH2: $|x| > 1$. Đặt $x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$ với $a \in \mathbb{R}$. (1) trở thành:

$$16 \cdot \frac{1}{2^5} \left(a + \frac{1}{a} \right)^5 - 20 \cdot \frac{1}{2^3} \left(a + \frac{1}{a} \right)^3 + 5 \cdot \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^5 + \frac{1}{a^5} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^{10} + 4a^5 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^5 = -2 + \sqrt{3} \\ a^5 = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$a = a_1 = \sqrt[5]{-2 + \sqrt{3}}$$

$$a = a_2 = \sqrt[5]{-2 - \sqrt{3}}$$

$$x = x_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt[5]{-2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{-2 + \sqrt{3}}} \right)$$

$$x = x_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt[5]{-2 - \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{-2 - \sqrt{3}}} \right)$$

Mặt khác, chú ý rằng $a_1 a_2 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Do vậy, (1) có nghiệm duy nhất là:

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[5]{-2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{-2 + \sqrt{3}}} \right)$$

Ví dụ 8

Cho r là số thực dương thỏa mãn $\sqrt[6]{r} + \frac{1}{\sqrt[6]{r}} = 6$. Tìm giá trị của $\sqrt[4]{r} - \frac{1}{\sqrt[4]{r}}$

Lời giải

Từ đẳng thức

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^3 - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

Ta có

$$\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} = 6^3 - 3 \cdot 6 = 198$$

Vì vậy

$$\left(\sqrt[4]{r} - \frac{1}{\sqrt[4]{r}} \right)^2 = 198 - 2.$$

Và giá trị của $\sqrt[4]{r} - \frac{1}{\sqrt[4]{r}}$ là 14.

3. Ứng dụng của đa thức Chebyshev trong các bài toán lượng giác liên quan đến số hữu tỉ

Ví dụ 9

Chứng minh rằng nếu α và $\cos \alpha\pi$ hữu tỷ thì $2 \cos \alpha\pi \in \mathbb{Z}$.

Phân tích hướng đi :

Do α hữu tỷ nên đặt $\alpha = \frac{p}{q}$, $(p; q) = 1$.

Thật tự nhiên ta nghĩ đến chuyện xét đa thức dạng Chebyshev nhận $\cos \alpha\pi$ là nghiệm rồi chỉ ra 2 lần nghiệm đó nguyên.

Ta thấy $T_q(\cos \alpha\pi) = \cos p\pi = \pm 1$ suy ra phương trình $T_q(x) \pm 1 = 0$ (hoặc cộng hoặc trừ) có nghiệm $\cos \alpha\pi$ và mặt khác ta có bổ đề :

Nếu đa thức nguyên $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$ nhận số hữu tỷ $\frac{u}{v}$ là nghiệm thì $u|a_0, v|a_n$.

Nhưng như vậy ta chỉ mới chỉ ra được $2^{n-1} \cdot \cos \alpha\pi$ nguyên, bài toán vẫn chưa được giải quyết.

Từ đó ta mong muốn tìm được 1 đa thức có hệ số cao nhất nhỏ hơn, tốt nhất là 1, nhận $2 \cos \alpha\pi$ làm nghiệm, và có dạng gần giống đa thức Chebyshev.

Lời giải

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại duy nhất 1 đa thức T sao cho :

$$T_n(2 \cos x) = 2 \cos nx$$

Và đồng thời T_n được xác định theo công thức truy hồi : $T_0(x) = 2, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$. (Do $\cos(n+1)x = 2 \cos x \cdot \cos nx - \cos(n-1)x$)

Bằng quy nạp, ta thấy $T_n(x)$ monic (có hệ số cao nhất bằng 1) và $T_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Mà $T_q(2 \cos \alpha\pi) = 2 \cos p\pi = \pm 2$ (Do $p \in \mathbb{Z}$).

Vậy lúc đó đa thức $R(x) = T_q + 2$ nếu p lẻ hoặc $S(x) = T_q - 2$ nếu p chẵn sẽ nhận $2 \cos \alpha\pi$ làm nghiệm hữu tỷ mà 2 đa thức đó đều $\in \mathbb{Z}[x]$ và có hệ số cao nhất bằng 1.

Vậy $2 \cos \alpha\pi \in \mathbb{Z}$.

Nói thêm do $\cos \alpha\pi \in [-1; 1]$ nên ta có thể suy ra $\cos \alpha\pi \in \{0; \pm \frac{1}{2}; \pm 1\}$

Ví dụ 10

Tìm tất cả các số hữu tỷ $a \in (0; 1)$ thỏa mãn điều kiện sau :

$$\cos(3\pi a) + 2 \cos(2\pi a) = 0$$

Lời giải

Đặt $\cos \pi a = t$, sử dụng hệ thức giảm bậc, ta có phương trình : $4t^3 + 4t^2 - 3t - 2 = 0$

Tương đương

$$(2t + 1)(2t^2 + t - 2) = 0$$

Nếu $2t + 1 = 0$ thì dễ rồi, ta xét $2t^2 + t - 2 = 0$, hay $t = \cos \pi a = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

Do a là số hữu tỷ, đặt $a = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{Z}, (p; q) = 1$. Lúc đó $T_q(\cos \pi a) = \cos \pi p = \pm 1$, với $T_q(x)$ là đa thức Chebyshev bậc q , $T_q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và có hệ số dẫn đầu là 2^{q-1} .

Giả sử p chẵn, lúc đó $T_q(\cos \pi a) - 1 = 0$, đặt $T_q(x) - 1 = T(x)$.

Xét $Q(x) = 2x^2 + x - 2$ và phép chia đa thức $T(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$ với $R(x), P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, bậc $R(x) \leq 1$.

Thay $x = t$ vào đẳng thức trên ta có $R\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right) = 0$ hoặc $R\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}\right) = 0$

Nhưng $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ vậy nên R không thể có bậc 1, hay R là hằng số, suy ra $R(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $Q(x)|T(x)$.

Xét phương trình $T(x) = (2x^2 + x - 2)P(x)$, ta thấy $T(x) = T_q(x) - 1 = 2^{q-1} \cdot \prod_{k=0}^{q-1} \left(x - \cos \frac{2k\pi}{q}\right)$ (Chứng minh công thức này bằng lượng giác và sử dụng tính chất 2.5) vậy nên khi xét sự phân tích tiêu chuẩn của 2 vế, $2x^2 + x - 2$ phải nhận 2 nghiệm $\cos \frac{2k\pi}{q}$ nào đó làm nghiệm hay $2x^2 + x - 2 = a \left(x - \cos \frac{2u}{q}\right) \left(x - \cos \frac{2v}{q}\right)$ với a là số thực.

Đồng nhất hệ số bậc 2 ta có $a = 2$. Vậy nên phải tồn tại $u, v \in \{0; 1; \dots; q-1\}$ sao cho :

$$2x^2 + x - 2 = 2 \cdot \left(x - \cos \frac{2u}{q}\right) \left(x - \cos \frac{2v}{q}\right)$$

Hay $\cos \frac{2u}{q} \cdot \cos \frac{2v}{q} = -1$

Nhưng cả 2 đều có trị tuyệt đối ≤ 1 nên cả 2 đều phải bằng ± 1 .

Nhưng lúc đó hệ số bậc 1 của vế phải sẽ bằng $-2(\cos \frac{2u}{q} + \cos \frac{2v}{q})$ là 1 số chẵn, khác 1. Vô lí.

Trường hợp p lẻ lí luận tương tự ta cũng có điều vô lí. Vậy $t = -\frac{1}{2}$ hay $a = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 11

Giả sử $k > 2$ là số nguyên dương và x là số thực sao cho $\cos(k-1)x$ và $\cos kx$ là số hữu tỉ. Chứng minh rằng có số nguyên dương $n > k$ sao cho $\cos(n-1)x$ và $\cos nx$ là số hữu tỉ.

Lời giải

Ta có nhận xét rằng nếu $\cos x$ là số hữu tỉ thì $\cos(kx)$ cũng là số hữu tỉ, với k là số nguyên dương (do $\cos(kx) = P_k(\cos x)$, với $P_k(x)$ là đa thức Chebyshev loại 1 với bậc k , là một đa thức hệ số nguyên). Vì vậy theo yêu cầu đề bài, ta chỉ cần chứng minh hệ đồng dư sau có nghiệm là đủ :

$$\begin{cases} n \equiv 0 & (\text{mod } k) \\ n \equiv 1 & (\text{mod } k-1) \end{cases}$$

Nhưng hệ này luôn có nghiệm theo định lý thặng dư trung hoa (chẳng hạn lấy $n = k^2$). Ta có điều phải chứng minh.

4. Ứng dụng đa thức Chebyshev trong các bài toán số học :

Sự truy hồi bậc 2 của đa thức Chebyshev rất thường được gặp trong các bài toán dãy số và đồng thời nó cũng giống với sự truy hồi của dãy nghiệm phương trình Pell. Sử dụng đa thức Chebyshev cùng các tính chất của nó đôi khi cho ta những lời giải thú vị trong những bài toán số học hoặc dãy số số học. Chúng ta cùng xem xét ví dụ sau :

Ví dụ 12

(Mở rộng TST 2012)

Cho p nguyên tố lẻ và xét dãy (x_n) thỏa $x_1 = 1, x_2 = p$ và $x_{n+2} = 2px_{n+1} - x_n$

Chứng minh: $\frac{x_{2m} + 1}{p + 1}$ là số chính phương với mọi số nguyên dương m .

Lời giải

Xét các đa thức Chebyshev loại I và loại II :

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+2} = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_{n+2} = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x)$$

Ta có một đẳng thức quen thuộc liên hệ giữa hai đa thức này dưới dạng kiểu phương trình Pell :

$$T_n^2(x) - (x^2 - 1)U_{n-1}^2(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{T_n(x) - 1}{x - 1} \cdot \frac{T_n(x) + 1}{x + 1} = U_{n-1}^2(x)$$

Ta sẽ chứng minh :

$$\frac{T_n(x) - 1}{x - 1} \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ và } \frac{T_n(x) + 1}{x + 1} \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 1 \pmod{2}$$

Thực vậy, ta có tính chất quen thuộc sau của đa thức Chebyshev loại I là :

$$T_n(1) = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Điều này đồng nghĩa với việc đa thức $T_n(x) - 1$ nhận $x = 1$ làm nghiệm, hay nhận $x - 1$ làm nhân tử, tức $\frac{T_n(x) - 1}{x - 1} \in \mathbb{Z}$

Ta cũng có : $T_n(-1) = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó nếu n lẻ thì $T_n(-1) = -1$. Điều này cho thấy đa thức $T_n(x) + 1$ nhận $x = -1$ làm nghiệm, hay nhận $x + 1$ làm nhân tử, tức $\frac{T_n(x) + 1}{x + 1} \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 1 \pmod{2}$

Dễ dàng nhận thấy rằng $x_{n+1} = T_n(p)$ với mọi số tự nhiên n .

Ở đây, ta chỉ xét nhỏ :

$$\frac{T_n(p) - 1}{p - 1} \cdot \frac{T_n(p) + 1}{p + 1} = U_{n-1}^2(p) \quad (*)$$

Gọi :

$$d = \gcd\left(\frac{T_n(p) - 1}{p - 1}, \frac{T_n(p) + 1}{p + 1}\right) \Rightarrow d \mid 2$$

Từ đó suy ra $U_{n-1}(p)$ là một số chẵn, nhưng điều này vô lí vì với n lẻ thì $n - 1$ chẵn và mọi đa thức Chebyshev loại II có bậc chẵn đều là số lẻ nếu biến số là số nguyên.

Như vậy phải có $d = 1$. Từ (*) ta suy ra ngay $\frac{T_n(p) + 1}{p + 1} = \frac{x_{n+1} + 1}{p + 1}$ là một số chính phương với mọi số nguyên dương n lẻ.

Ví dụ 13

Tìm n nguyên dương để $(2^n - 1)(3^n - 1)$ là số chính phương.

Lời giải

Trường hợp $n = 1, 2$, bằng tính toán ta thấy đại lượng không phải là số chính phương, loại. Với $n \geq 3$, đặt $(2^n - 1)(3^n - 1) = m^2$ với m là số nguyên dương. Nếu n lẻ thì $2^n - 1 \equiv 3 \pmod{4}, 3^n - 1 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow m^2 \equiv 2 \pmod{4}$ (vô lí). Vậy n phải chẵn, đặt $n = 2k$. Lúc đó ta có $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = m^2$ với $a = 2^k, b = 3^k \Rightarrow$

$(ab)^2 - a^2 - b^2 + 1 = m^2 \Rightarrow (ab + 1)^2 = m^2 + (a + b)^2$ đây là phương trình Pythagore quen thuộc, do m phải chẵn nên ta có :

$$\begin{cases} ab + 1 = u^2 + v^2 \\ a + b = u^2 - v^2 \\ m = 2uv \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^k + 3^k = u^2 - v^2 \\ 6^k + 1 = u^2 + v^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (3^k + 1)(2^k + 1) = 2u^2$. Từ đây suy ra k phải chẵn vì nếu k lẻ thì $3^k + 1 \equiv 4 \pmod{8}$ hay khi phân tích 2 về ra thành tích các thừa số nguyên tố thì số mũ của thừa số 2 của vế trái sẽ là 2 – một số chẵn còn ở vế phải thì số mũ của 2 là số lẻ do số mũ của số nguyên tố bất kì khi khai triển u^2 đều là chẵn.

Vậy chúng ta đã tìm được 1 số tính chất của n rằng $n \vdots 4$.

Bây giờ đặt $(2^n - 1, 3^n - 1) = d \Rightarrow 2^n - 1 = d.r^2, 3^n - 1 = d.s^2$ với $(s; r) = 1, dsr = m$.

Xét phương trình Pell $X^2 - d.Y^2 = 1$. Do $n \geq 3$ và $3^n - 1 = d.s^2$ nên d không thể là số chính phương.

Vậy phương trình trên là phương trình Pell loại 1, nhận $(2^k, r), (3^k, s)$ là các cặp nghiệm nào đó.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu phương trình này có dãy nghiệm (X_n, Y_n) thì 2^k và 3^k không thể cùng thuộc dãy $\{X_n\}$.

Giả sử dãy này có nghiệm khởi đầu là $X_0 = 1, X_1 = t > 1$ và công thức truy hồi $X_{n+1} = 2t.X_n - X_{n-1} \forall n \geq 1$.

Lúc đó giá trị của X_n chính bằng $T_n(t)$.

Ta đi chứng minh nếu 2^k xuất hiện trong dãy thì nó phải là X_1 .

Thật vậy bằng quy nạp đơn giản, ta thấy rằng $T_n(t)$ lẻ nếu n chẵn và $T_n(t)$ bằng 1 số lẻ > 1 nhân với t nếu n lẻ > 1 (Do $t > 1$), vậy nên những trường hợp đó, $T_n(t)$ luôn có ước nguyên tố lẻ.

Từ đây suy ra 2^k phải là X_1 nếu muốn có mặt trong dãy.

Nhưng mặt khác, theo tính chất đã chứng minh ở trên thì k chẵn nên $X_1 \equiv X_0 \equiv 1 \pmod{3}$.

Và ta sẽ quy nạp rằng $X_n \equiv 1 \pmod{3} \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy giả sử nó đúng tới n thì :

$$X_{n+1} = 2^{k+1}.X_n - X_{n-1} \equiv 2X_n - X_{n-1} \equiv 1 \pmod{3}$$

Vậy 3^k không thể xuất hiện trong dãy. Phương trình vô nghiệm nguyên.

Qua chuyên đề, tác giả hi vọng các bạn có cái nhìn rõ hơn về đa thức Chebyshev và cách sử dụng qua các bài toán khác nhau. Từ đó thấy được niềm vui khi nghiên cứu và làm việc với những chuyên đề tuy ít khi được thi nhưng rất đẹp và đáng được biết đến của toán Olympic. Chúc các bạn luôn say mê nghiên cứu và học tập tốt !

Mọi đóng góp cho chuyên đề xin gửi về email: trongdat.math@gmail.com

Sau đây là một số bài tập để các bạn luyện tập.

III. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.

Cho số nguyên dương n và $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}, k = \overline{0; n}$ Chứng minh rằng :

a)

$$\prod_{j \neq k} (x_k - x_j) = \frac{(-1)^k \cdot n}{2^{n-1}}, 1 \leq k \leq n-1$$

b)

$$\prod_{j=1}^n (x_0 - x_j) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

c)

$$\prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) = \frac{(-1)^n \cdot n}{2^{n-2}}$$

Bài 2.

Cho n là 1 số nguyên dương và đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ bậc không quá $n-1$ thỏa mãn $\sqrt{1-x^2}|P(x)| \leq 1 \forall |x| \leq 1$. Chứng minh rằng :

a) Hệ số bậc cao nhất của P không vượt quá 2^{n-1}

b) $|P(x)| \leq n \forall x \in [-1; 1]$

Bài 3. Cho đa thức lượng giác $P(x) = \sum_{j=0}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ thỏa mãn $|P(x)| \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng :

$$|P'(x)| \leq n \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài 4. (Định lý Bernstein – Markov) Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ bậc n thỏa mãn $|P(x)| \leq 1 \forall x \in [-1; 1]$. Chứng minh rằng :

$$|P'(x)| \leq n^2 \forall x \in [-1; 1]$$

Bài 5. Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là n điểm trên mặt phẳng. Chứng minh rằng trên bất kì đoạn thẳng có độ dài l nào cũng tồn tại điểm M sao cho : $MA_1 \cdot MA_2 \cdot \dots \cdot MA_n \geq 2 \left(\frac{l}{4}\right)$

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ ta có :

$$T_{n+1}(x) = x \cdot T_n(x) - (1 - x^2)U_{n-1}(x)$$

$$U_n(x) = xU_{n-1}(x) + T_n(x)$$

Bài 7. Tìm tất cả các bộ 5 số thực (x, y, z, u, v) , tất cả đều $\in [-2; 2]$ thỏa mãn hệ

$$x + y + z + u + v = 0$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + v^3 = 0$$

$$x^5 + y^5 + z^5 + u^5 + v^5 = -10$$

Tài liệu

- [1] Blog thầy Nguyễn Trung Tuân :<http://nttuan.org/>
- [2] Blog của Juliel :<https://julielltv.wordpress.com/>
- [3] Diễn đàn toán học : <http://diendantoanhoc.net/forum/>
- [4] Putnam - Beyond – Titu Andreescu.
- [5] Wikipedia
- [6] Chuyên khảo dãy số- Nguyễn Tài Chung