



ĐỀ THI VMEO IV THÁNG 11

Diễn đàn Toán học

Ngày 17 tháng 11 năm 2015

1 CẤP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài toán 1.1. Cho đường thẳng $(d) : y = x + \frac{1}{\sqrt{2}}$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy .

1. Chứng minh rằng mọi đường tròn có tâm I thuộc (d) và bán kính $\frac{1}{8}$ đều không chứa bất cứ điểm nguyên nào.
2. Tìm số dương k lớn nhất sao cho khoảng cách từ mọi điểm nguyên trên mặt phẳng tới đường thẳng d đều không nhỏ hơn k . △

Bài toán 1.2. Cho tam giác BAC cân tại A có $\angle BAC = 20^\circ$. dựng tam giác đều BDC sao cho D, A cùng phía so với BC . dựng tam giác DEB cân tại D có $\angle EDB = 80^\circ$ và C, E khác phía so với DB . Chứng minh tam giác AEC cân tại E . △

Bài toán 1.3. Có bao nhiêu số tự nhiên n bé hơn 2015 mà chia hết cho $\lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor$?
Ở đây $\lfloor a \rfloor$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a ($a \in \mathbb{R}$). △

Bài toán 1.4. Các bạn học sinh trong trường xếp các hàng dọc sao cho đếm từ trái sang, hàng thứ nhất có n bạn, hàng thứ 2 có $n - 1$ bạn, ... cho đến hàng thứ n có 1 bạn. Các bạn đều quay mặt về phía hàng thứ nhất. Ví dụ với $n = 5$ (mỗi dấu * đại diện cho một bạn):

*

* *

* * *

* * * *

* * * * * (hàng thứ nhất)

Mỗi bạn được phép chọn duy nhất một mệnh đề trong hai mệnh đề dưới đây để phát biểu (trừ các bạn đứng đầu hàng).

- Mệnh đề 1: "Bạn trước mặt mình là người nói thật, bạn bên trái của bạn trước mặt mình là người nói dối."
- Mệnh đề 2: "Bạn trước mặt mình là người nói dối, bạn bên trái của bạn trước mặt mình là người nói thật."

Với $n = 2015$, hãy tìm số người nói thật nhiều nhất có thể.

Chú thích: Nếu một bạn học sinh nói dối thì bạn ấy sẽ nói ngược sự thật. Còn một bạn học sinh nói thật thì bạn ấy sẽ nói đúng sự thật. △

Hết đề cấp THCS

2 CẤP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài toán 2.1. Với $k \geq 0$ cho trước và a, b, c là ba số thực dương sao cho

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = (k+1)^2 + \frac{2}{k+1}$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq (k^2 + 1)(ab + bc + ca)$$

△

Bài toán 2.2. Cho tam giác ABC với hai điểm P, Q đẳng giác. Gọi D, E là hình chiếu của P lên AB, AC . G là hình chiếu của Q lên BC . U là hình chiếu của G lên DE , L là hình chiếu của P lên AQ , K là đối xứng của L qua UG .

Chứng minh UK đi qua điểm cố định khi P, Q thay đổi.

△

Bài toán 2.3. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau sao cho

$$a^2 + b \mid b^2 + c, b^2 + c \mid c^2 + a$$

và tất cả các ước nguyên tố của $a^2 + b$ không đồng dư với 1 modulo 7.

△

Hết đề cấp THPT