

Bạn đang băn khoăn , ức chế , không hiểu:

Vì sao nó lại thế?



Vâng , hôm nay , chúng ta ở đây để giúp nhau hiểu được tận gốc những điều đó!!! Bạn hãy thoả mái đi rằng chắc chắn bạn sẽ tìm thấy một điều gì đó cho riêng mình sau khi đọc hết chuyên đề này ! OK ! Trong chuyên đề này ,tôi sẽ tường tận lại toàn bộ qua trình suy nghĩ để tìm được lời giải cho những bài toán sơ cấp nhất đối với trình độ THCS . Ai đang học cấp THCS thì chắc chắn sẽ cảm nhất tuyệt vời nhất vì như nó đang mở cửa sự sáng tạo của họ , họ như đang tự dẫn dắt mình đến lời giải chứ không phải tôi ! Tôi muốn sau chuyên đề này bạn sẽ có được những kĩ năng giải toán tốt hơn ! Và để chuẩn bị cho những bài toán bên dưới , bạn cần học thuộc những “ *câu thần chú*” sau khi giải toán:

What do you want?

To get it , what do you need to do ?

What is its nature and what can help you?

Mục Lục

I. Lời mở đầu

II. Bài toán và những lời giảng

III. Một số kiến thức cần nhớ

IV. Lời kết



Và bây giờ , chúng ta sẽ bắt đầu ngay để làm sáng tỏ điều mà tôi đã nói !

Bài 1: $\begin{cases} x, y, z \in [-1; 1] \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} \geq 3$

- Bây giờ , bạn hãy quan sát kĩ bài toán : GT vs KL , bạn hãy tìm sự đặc biệt của nó !
- Nếu bạn đã tìm xong thì hãy trả lời “câu thần chú “ thứ nhất . Bạn muốn gì ?

- OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú “tiếp theo . Bạn cần gì để đạt được điều đó ?

- OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú “ cuối cùng . Bản chất của nó là gì và cái gì có thể giúp bạn ?

Và tất nhiên , bây giờ là những câu trả lời của tôi để cho bạn làm ví dụ :

-**Quan sát** , ta thấy : $\sqrt{1 + (x + y^2)} + \sqrt{1 + (y + z^2)} + \sqrt{1 + (z + x^2)}$ thực chất là $\sum_{cyc} \sqrt{1 + a}$ và nếu ta đánh giá được từ $\sqrt{1 + a} + \sqrt{1 + b}$ sang $\sqrt{f(a) + f(b)}$ thì ta cũng sẽ đánh giá được từ $\sqrt{f(a) + f(b)} + \sqrt{1 + c}$ sang $\sqrt{f(a) + f(b) + f(c)}$. Và như vậy là bài toán căn bản đã giải xong !

-Như vậy , ta muốn có BĐT liên hệ giữa : $\sqrt{1 + a} + \sqrt{1 + b}$ với $\sqrt{f(a) + f(b)}$

-Để có được điều đó , ta cần tìm các hệ số thích hợp để BĐT ta tạo ra là đúng !

-Và đồng nhất hệ số kết hợp với PP nghiệm bội sẽ giúp ta điều đó :

$$: \sqrt{1 + a} + \sqrt{1 + b} \geq k + \sqrt{p.a + t.b + r} \text{ (việc tại sao lại có PP trên thì tôi sẽ giải thích ở phần cuối chuyên đề)}$$

- Do dấu '=' xảy ra khi $a=b=0$ nên $f(a,b)=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}-k-\sqrt{p.a+t.b+r}$ sẽ chứa nhân tử ab .

-Thay $a=b=0$, ta có : $2=k+\sqrt{r}$ (*)

-Thay $b=0$, ta có : $f(a,b)=f(a)=\sqrt{1+a}+1-k-\sqrt{p.a+r}$

- Vì $a=0$ là 1 nghiệm nên $f(a)$ sẽ chứa nghiệm bội 2,3,4,5,... với cơ số a

- Tuyệt vời , việc xét đạo hàm cho $f(a)$ tại $a=0$ sẽ giúp ta có thêm vài phương trình nữa !

Ta có : $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a+1}}-\frac{1}{2\sqrt{p.a+r}}=0$ với $a=0 \rightarrow r=1 \rightarrow k=1$ (Suy ra từ (*))

-Do đó : $f(a,b)=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}-1-\sqrt{p.a+t.b+1}$

-Lại từ việc dấu '=' xảy ra khi $a=b=0$ nên cho $a=0$ thì $f(b)=f(a,b)=\sqrt{1+b}-\sqrt{t.b+1}=0 \rightarrow t=1 \rightarrow p=1$

-Tóm lại , ta sẽ đi chứng minh BĐT sau :

$$\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} \geq 1+\sqrt{a+b+1} \text{ với } a,b,a+b \geq -1, ab \geq 0$$

- Nhưng để có được BĐT trên đúng thì bạn cần phải làm thêm vài điều để ĐK trong căn , sau khi khai triển BĐT phụ sẽ không âm !

-Việc này xin giành cho bạn đọc tự tìm tòi như hướng dẫn minh hoạ trên của tôi

-Và xin nói thêm rằng việc thay $a=b=0$ hoặc $a=0, b=0$ vào pt là không phải hoàn toàn vô căn cứ , tôi sẽ giải thích rõ hơn ở phần cuối chuyên đề !

-Và đương nhiên 1 bài toán không phải chỉ có duy nhất 1 cách giải mà tùy theo kinh nghiệm , phản xạ , kĩ năng của bạn mà chúng ta có thể xây dựng nên những con đường khác nhau !

Bài 2: Cho $\begin{cases} x,y,z > 0 \\ x+y+z=3 \end{cases} \rightarrow \frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

- Bây giờ , bạn hãy quan sát kĩ bài toán : GT vs KL , bạn hãy tìm sự đặc biệt của nó !

- Nếu bạn đã tìm xong thì hãy trả lời “câu thần chú “ thứ nhất . Bạn muốn gì ?

- OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú” tiếp theo . Bạn cần gì để đạt được điều đó ?

-OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú” cuối cùng . Bản chất của nó là gì và cái gì có thể giúp bạn ?

Và tất nhiên , bây giờ là những câu trả lời của tôi để cho bạn làm ví dụ như phần trên:

- -Quan sát , ta thấy nếu như sử dụng kĩ thuật Cauchy-ngược dấu thì hoàn toàn có thể giải được dễ dàng ! Nhưng tôi muốn một điều gì đó tự nhiên hơn xuất phát từ những gì tôi muốn !
- -Vâng , nhìn vào GT vs KL ta sẽ đi tìm một mối quan hệ giữa các hạng tử với a,b,c để sau khi đánh giá , cộng lại ta được một $f(a+b+c)$ là hằng số !
- -Do đó , ta sẽ đi tìm các số t,x,y,z thích hợp để BĐT sau đúng :

$$\frac{a+1}{b^2+1} \geq x.a + y.b + z.ab + t$$

- Với cách này ta sẽ sử dụng đồng nhất thức và PP nghiệm bội nhưng cần phải sơ chế
- Ta thấy , dấu ‘=’ xảy ra khi a=b=1

- Nên cho b=1 thì $\frac{a+1}{2} = a.(x+z) + (y+t)$, đồng nhất , ta có :
$$\begin{cases} x+z = \frac{1}{2} \\ y+t = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

- Bây giờ coi a là hằng số , xét hàm $f(b) = \frac{a+1}{b^2+1} - x.a - y.b - z.ab - t$

- Sử dụng PP nghiệm bội , ta đi xét đạo hàm $f'(b) = \frac{-(a+1).2b}{(b^2+1)^2} - y - z.a = 0$ tại b=1

- Như vậy , ta được : $\frac{-(a+1)}{2} - y - z.a = 0$, cũng đồng nhất , ta được : $y = z = \frac{-1}{2} \quad (2)$

- Từ (1) và (2) , ta suy ra : $x = y = 1$

➤ **Tóm lại , ta sẽ đi chứng minh BĐT sau :**

$$\bullet \quad \frac{a+1}{b^2+1} \geq a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}ab + 1 = (a+1)\left(1 - \frac{b}{2}\right)$$

Với dạng toán này ta giữ nguyên tử số, $\frac{1}{\text{Mẫu số}}$ thì sử dụng PP nghiệm bội, sau đó, nhân vào là OK

❖ Và sau đây là một số bài tập tương tự cho bạn thực hành :

- Cho các số dương a, b, c thỏa mãn : $a+b+c=3$. Chứng minh rằng : $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$
- Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$. Tìm GTNN của $A = \frac{2a+1}{b+3} + \frac{2b+1}{c+1} + \frac{2c+1}{a+1}$
- Cho 3 số thực a, b, c $> \frac{25}{4}$. Tìm GTNN của $B = \frac{a}{2\sqrt{b}-5} + \frac{a}{2\sqrt{b}-5} + \frac{a}{2\sqrt{b}-5}$
- Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c \leq 2016 \end{cases}$. Chứng minh rằng : $\frac{5a^3-b^3}{ab+3a^2} + \frac{5b^3-c^3}{bc+3b^2} + \frac{5c^3-a^3}{ca+3c^2} \leq 2016$

Bây giờ, bạn hãy quan sát kĩ bài toán : GT vs KL, bạn hãy tìm sự đặc biệt của nó !

- Nếu bạn đã tìm xong thì hãy trả lời “câu thần chú” thứ nhất. Bạn muốn gì ?

Bài 3: Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \end{cases}$. Tìm GTNN của : $A = \frac{x^2}{2z+1} + \frac{y^2}{2x+1} + \frac{z^2}{2y+1}$

- - Bây giờ, bạn hãy quan sát kĩ bài toán : GT vs KL, bạn hãy tìm sự đặc biệt của nó !

- Nếu bạn đã tìm xong thì hãy trả lời “câu thần chú” thứ nhất. Bạn muốn gì ?

- OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú “tiếp theo . Bạn cần gì để đạt được điều đó ?

-OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú “ cuối cùng . Bản chất của nó là gì và cái gì có thể giúp bạn ?

-Nhận xét , nếu bạn làm như mấy bài trên thì sẽ khá khó đó !

- Ta thấy bản chất của cách dùng PP nghiệm bội ,U.C.T , cân bằng trong BĐT là đưa được về 1 đa thức có các biến độc lập với nhau như $\sum \frac{2}{3x+5}, \sum \sqrt{5x+1}, \sum \frac{x+3}{\sqrt{7x+1}}, \dots$

-Nên ta muốn chuyển BĐT cần chứng minh về dạng như đã trình bày

-Search GOOLE , ta tìm được : BĐT hoán vị là lựa chọn hoàn hảo cho điều mà ta cần !

-Do đó : Nhờ đánh giá được rằng : $\left\{ \frac{x^2}{2x+1}, \frac{y^2}{2y+1}, \frac{z^2}{2z+1} \right\}$ là 2 dãy đơn điệu ngược chiều nên :

$$A = \frac{x^2}{2z+1} + \frac{y^2}{2x+1} + \frac{z^2}{2y+1} \geq \sum_{cyc} \frac{x^2}{2x+1}$$

-Tốt rồi, bây giờ ta sẽ dùng PP nghiệm bội là xong !

- Ta có BĐT phụ sau : $\frac{x^2}{2x+1} \geq \frac{7}{9} - \frac{4}{9x} \forall x > 0$

- Do đó : $A = \frac{x^2}{2z+1} + \frac{y^2}{2x+1} + \frac{z^2}{2y+1} \geq \sum_{cyc} \frac{x^2}{2x+1} \geq \frac{7}{3} - \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$

Với các dạng hoán vị như vậy ta nên dùng BĐT hoán vị để đưa về đa thức có các biến độc lập với nhau

❖ Và sau đây là một số bài tập tương tự cho bạn thực hành :

- Cho $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$. Tìm GTNN của $M = \frac{x^2}{3z+1} + \frac{y^2}{3x+1} + \frac{z^2}{3y+1}$
- Cho $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$. Tìm GTNN của $K = x^2 \left(\frac{1}{z} + 1 \right) + y^2 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) + z^2 \left(\frac{1}{y} + 1 \right)$

Bài 3: Cho $F = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{20}$. Chứng minh rằng : $F < \frac{1}{\sqrt{31}}$

- Bây giờ , bạn hãy quan sát kĩ bài toán : GT vs KL , bạn hãy tìm sự đặc biệt của nó !

- Nếu bạn đã tìm xong thì hãy trả lời “câu thần chú “ thứ nhất . Bạn muốn gì ?

- OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú “tiếp theo . Bạn cần gì để đạt được điều đó ?

-OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú “ cuối cùng . Bản chất của nó là gì và cái gì có thể giúp bạn ?

-Ok, bây giờ là phần của tôi để cho bạn tham khảo :

- Quan sát : ta thấy đây là dạng mà yêu cầu thiết yếu là bạn phải biết quy luật của từng hạng tử : $\frac{2k-1}{2k}$ mà $k \in \mathbb{N}^*$
- Sau đó , nhìn vào KL ,trực giác mách bảo ta là phải đi tìm 1 BĐT phụ có chứa căn bậc hai, và theo quy luật để triệt tiêu dần “những cái không liên quan”
- Ta cần tìm các số a,b thích hợp để BĐT sau đúng với :

$$\frac{2k-1}{2k} \leq \frac{\sqrt{a.x+b}}{\sqrt{a.x+a+b}} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

—Đương nhiên PP nghiệm bội sẽ giúp ta , tìm ra BĐT sau : $\frac{2k-1}{2k} \leq \frac{\sqrt{3.x-2}}{\sqrt{3x+1}}$

Dấu ‘=’ xảy ra khi k=1

-Qua đây , ta thấy tư tưởng của chúng ta không chỉ hữu ích trong việc chứng minh các BĐT kinh điển mà còn hữu ích trong việc làm trội

Và sau đây các bạn hãy tập luyện để làm quen với việc làm trội qua các bài toán sau nhưng hãy đừng quá máy móc nhé !

Tìm phần nguyên của A với n là số tự nhiên :

a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2016}}$

b) $A = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{2016}}$

Chắc hẳn đến đây bạn đã khá đã quen tay trong việc làm toán với những ‘câu thần chú’ nhưng trong toán học trong có PP nào toàn năng mà chúng ta phải luôn luôn sáng tạo , làm mới chúng để phục vụ cho sự phát triển như vũ bão của toán học ngày nay ! Sau đây là bài tập để làm sáng tỏ điều đó

Bài 4: Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$. Tìm GTNN của $Q = \frac{y^2.x}{y^2+2} + \frac{z^2.y}{z^2+2} + \frac{x^2.z}{x^2+2}$

- Bây giờ , bạn hãy quan sát kĩ bài toán : GT vs KL , bạn hãy tìm sự đặc biệt của nó !

- Nếu bạn đã tìm xong thì hãy trả lời “câu thần chú “ thứ nhất . Bạn muốn gì ?

- OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú “tiếp theo . Bạn cần gì để đạt được điều đó ?

-OK, bạn hãy trả lời tiếp “câu thần chú “ cuối cùng . Bản chất của nó là gì và cái gì có thể giúp bạn ?

Nếu cứ áp dụng cách làm như mấy bài trên chắc hẳn bạn sẽ gặp khó khăn !

Để giải được bài toán này thì bạn hãy trả lời những câu hỏi sau trong trò chơi ‘Đường lên đỉnh Olympia ‘:



Câu 1: Bản chất của PP nghiệm bội là :

- A. Đạo hàm 1 biến
- B. Tổng các số không âm

Câu 2: Tổng các số không âm bạn thường nghĩ đến PP nào trong BĐT :

- A. S-O-S
- C. PP khác
- B. ABC
- D. Cả đáp A vs B

Câu 3: Bạn đã bao giờ nghĩ về việc mở rộng cho PP U.C.T :

- A. Đã từng
- C. Tôi còn chưa bao giờ nghe qua
- B. Chưa bao giờ

Câu 4: Nếu BĐT nhiều biến : $f(a,b,c)$ biến xảy ra khi $a=b=c=1$ thì nó biểu diễn được dưới dạng nào ?

Câu 5: BĐT thức liên quan tới $f(a+b+c)$ thì hay liên quan đến hàm nào (VD: $f(abc), f(a;b;c), \dots$) ?

Nếu bạn đã trả lời xong các câu hỏi ở trên thì xin chúc mừng bạn đã là người chiến thắng chính mình !

Và sau đây là một vài hướng dẫn của tôi qua bài toán này :

- Bài này điều mà chúng ta muốn vẫn là liên kết giữa Q với GT nhưng không đơn thuần là đánh giá các hạng tử dưới dạng : $\frac{y^2 \cdot x}{y^2+2} \geq a \cdot x + b \cdot y$ mà là : $\frac{y^2 \cdot x}{y^2+2} \geq a \cdot x + b \cdot y - k \cdot xy$
- Thông qua đánh giá là BĐT sẽ đạt dấu '=' tại $a=b=1$, ta sẽ liên tưởng đến dạng sau sau khi xét hiệu hai vế : $f[(a-b)^2] + f[(a-1)^2] + f[(b-1)^2]$
- Như vậy , với : + $a=b=1$ thì ta sẽ có được 1 hpt
- + $a=b$ thì nó trở thành dạng 1 biến có nghiệm $x_0=1 \rightarrow \rightarrow$ PP nghiệm bội
- $\rightarrow \rightarrow$ 2 HPT nữa

Do đó : ta sẽ tìm được các số a, b, k thích hợp để BĐT đúng . Việc còn lại là cần sự biến đổi kiên nhẫn và cẩn thận !

Tóm lại , thông qua 4 VD trên , chắc hẳn bạn đã hiểu được tầm quan trọng của những câu thần chú trên thông qua việc giải toán BĐT. Nhưng không chỉ đối với BĐT mà nó còn có tác dụng với hầu hết tất cả các dạng toán và trong quá trình tìm tòi cái mới để phục vụ cho việc học tập ! Chúc các bạn sẽ có được những phút giây sáng khoái bên việc tìm được lời giải cho các bài toán của chính mình ! Hẹn gặp lại các bạn vào một tương lai không xa !

Một số kiến thức cần nhớ

1. Đạo hàm là gì ?

Cho hàm số biến **số thực** $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ (khoảng $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$). Xét giá trị $x_0 \in (a; b)$ và giá trị $x \in (a; b), x \neq x_0$.

-Đặt $\Delta x = x - x_0$ thì $x = x_0 + \Delta x$. Δx được gọi là **số gia đối số**.

-Đặt $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. Δy được gọi là **số gia hàm số**.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Xét tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nếu khi $\Delta x \rightarrow 0$, tỷ số đó dần tới một **giới hạn** thì giới hạn đó được gọi là **đạo hàm** của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0 kí hiệu là $f'(x)$ hay $\dot{f}(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2. Một số bảng đạo hàm thường gặp :

Quy tắc cơ bản

$$(c)' = 0$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$(k.x)' = k$	$(k.u)' = k.u'$
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.(u)'$
$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$	$(\frac{1}{u})' = -\frac{(u)'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u.(u)'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u.(u)'$
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = (1 + \tan^2 u).u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -(1 + \cot^2 u).u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u.u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$

3. Nghiệm bội :

Nghiệm bội của đa thức là gì?

Từ kép theo nghĩa chỉ số lượng thì nó tương đương với số hai. Đối với phương trình bậc 2 số nghiệm tối đa của nó là 2, vì vậy hai nghiệm trùng nhau được gọi là nghiệm kép. Với những đa thức bậc cao hơn hai có thể xuất hiện nhiều nghiệm trùng nhau và người ta đã đưa ra khái niệm nghiệm bội để chỉ số lượng các nghiệm giống nhau của đa thức. Ưu thế đặc biệt của đa thức là ở chỗ: Nếu đa thức $P(x)$ nhận a là nghiệm thì

$P(x) = (x - a)Q(x)$ trong đó $Q(x)$ cũng là đa thức. Nhờ kết quả này ta có thể định nghĩa nghiệm bội của đa thức trên tập số thực như sau:

"Đa thức bậc $n \geq 1$ dạng $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \dots + a_1.x + a_0$ nhận số thực a làm nghiệm bội k (k là số dương) nếu như

$P(x) = (x - a)^k.Q(x)$ trong đó $Q(x)$ cũng là một đa thức với $Q(a) \neq 0$."

Trong trường hợp đặc biệt nghiệm bội hai được gọi là nghiệm kép, còn nghiệm bội $k = 1$ được gọi là nghiệm đơn.

4.Ý nghĩa của nghiệm bội 2 :

Nếu 1 đa thức $f(x)$ có chứa nghiệm bội hai $(x-k)$ thì đạo hàm $f'(x)$ tại giá trị $x=k$ thì bằng 0

Mặc dù đã nghiêm túc trong quá trình viết bài , song vẫn không thể tránh khỏi sai sót mong bạn đọc góp ý để chuyên đề hoàn thiện hơn !

Tài liệu tham khảo : 1.Sáng tạo Bất đẳng thức – Phạm Kim Hùng

2. Nghiệm bội –Đoàn Trí Dũng

3.SGK toán 11

4.Nguồn tài liệu vô kể từ INTERNET