

Đề hình học kiểm tra một số trường Đông năm 2015

Bài 1 (Trường Đông Vinh ngày 1). Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Các điểm E, F lần lượt thuộc đoạn thẳng CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $EM \parallel AB$ và $\angle ECM = \angle FCB$. Lấy điểm N nằm trong tam giác ABC sao cho $FN \parallel AC$ và $\angle FBN = \angle EBC$. Gọi BM cắt CN tại P . Chứng minh rằng P luôn thuộc một đường thẳng cố định khi E, F di chuyển.

Bài 2 (Trường Đông Hà Nội ngày 1). Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F . G, H đối xứng E, F qua I . GH cắt BC tại P . Các điểm M, N thuộc IP sao cho $CM \perp IB$ và $BN \perp IC$. Chứng minh rằng I là trung điểm MN .

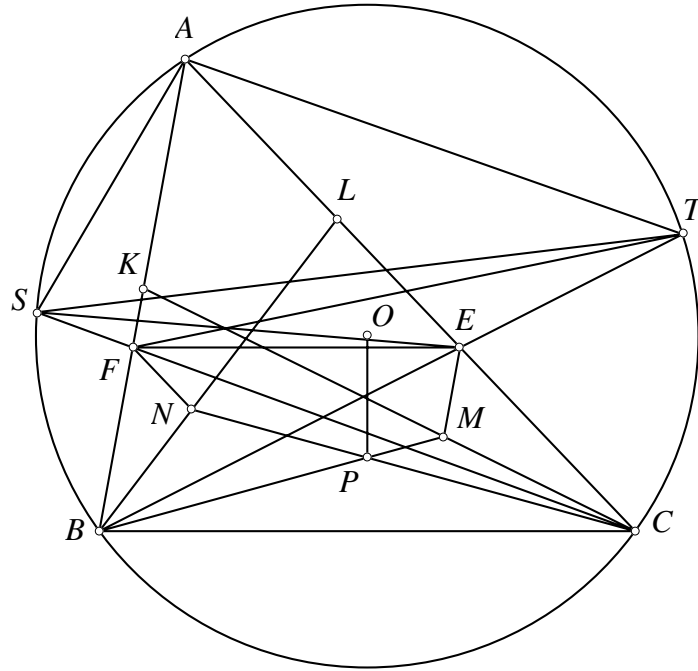
Bài 3 (Trường Đông Hà Nội ngày 2). Cho tam giác ABC cân tại A và P nằm trong tam giác sao cho $\angle BPC = 180^\circ - \angle A$. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F . I, J lần lượt là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B, C của tam giác ABE và ACF . Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng $KI = KJ$.

Bài 4 (Trường Đông Phú Yên ngày 1). Cho tam giác ABC với E, F là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh CA, AB sao cho $AE = AF$. EF cắt BC tại D . K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác DBF, DCE . Gọi BE cắt CF tại H . AH cắt BC tại S . G là đối xứng của D qua KL . Lấy T thuộc DG sao cho $ST \perp BC$. M là trung điểm ST . Chứng minh rằng đường thẳng GM luôn đi qua một điểm cố định khi E, F thay đổi.

Bài 5 (Trường Đông Phú Yên ngày 2). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên cung lớn $\widehat{BC}$. M là trung điểm BC và N là trung điểm AM . Các điểm P, Q lần lượt thuộc đoạn thẳng OB, OC sao cho $OP = \frac{1}{4}OB = \frac{1}{4}OC = OQ$. Đường thẳng qua N song song CA cắt đường thẳng qua Q vuông góc OB tại E . Đường thẳng qua N song song AB cắt đường thẳng qua Q vuông góc OC tại F . Chứng minh rằng EF luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi A di chuyển.

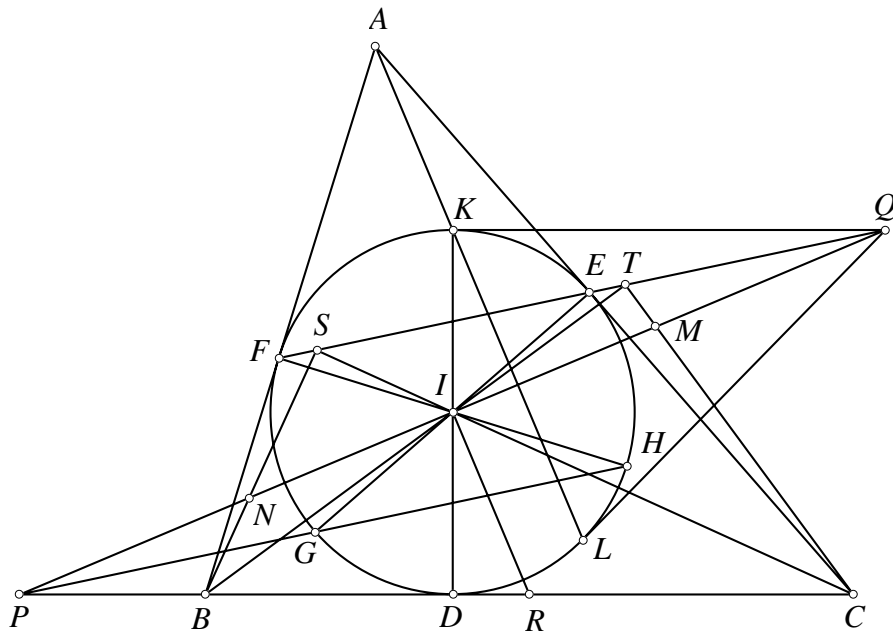
Đáp án

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Các điểm E, F lần lượt thuộc đoạn thẳng CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $EM \parallel AB$ và $\angle ECM = \angle FCB$. Lấy điểm N nằm trong tam giác ABC sao cho $FN \parallel AC$ và $\angle FBN = \angle EBC$. Gọi BM cắt CN tại P . Chứng minh rằng P luôn thuộc một đường thẳng cố định khi E, F di chuyển.



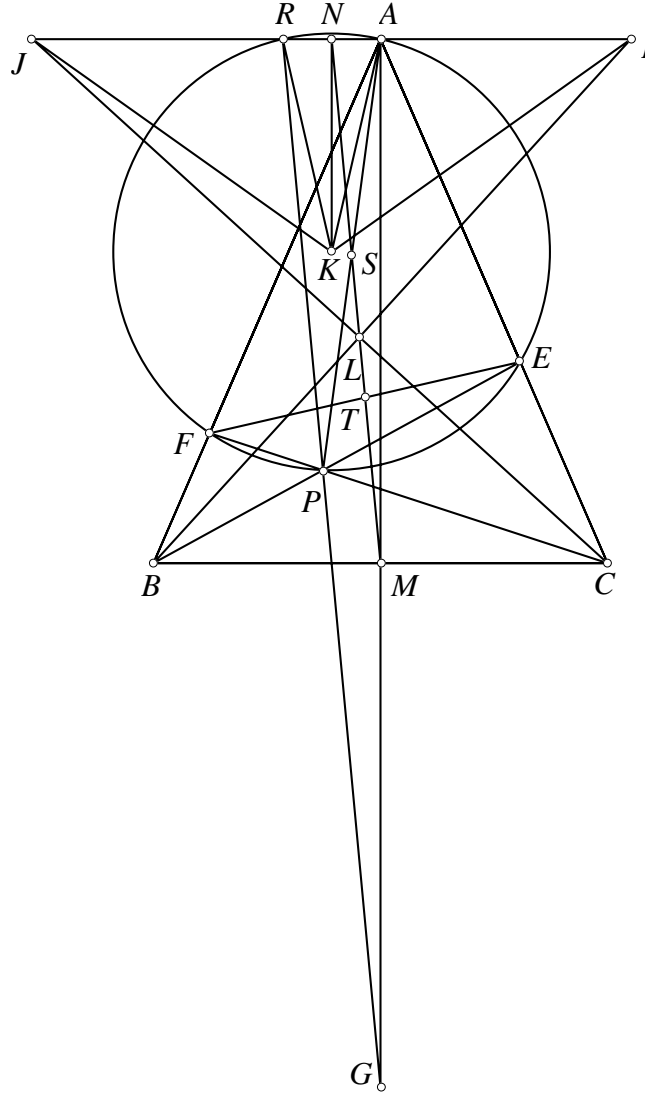
Lời giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi CF, BE lần lượt cắt (O) tại S, T khác C, B . Gọi CM, BN cắt AB, AC tại K, L . Từ đề bài ta có $\angle CBL = \angle TBA$, lại từ góc nội tiếp ta có $\angle LCB = \angle ATB$. Từ đó $\triangle BAT \sim \triangle BLC$. Theo định lý Thales ta lại có $\frac{FB}{FA} = \frac{NB}{NL}$. Từ hai nhận xét trên ta thu được $\triangle BCN \sim \triangle BTF$, từ đó suy ra $\angle BCN = \angle BTF$. Chứng minh tương tự ta có $\angle CBM = \angle CSE$. Lại có $\angle BEF = \angle EBC = \angle TSC$ ta suy ra tứ giác $STEF$ nội tiếp. Từ đó $\angle CBM = \angle CSE = \angle BTF = \angle BCN$, ta suy ra tam giác PBC cân tại P nên P thuộc trung trực BC cố định. $\square$

Bài 2. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F . G, H đối xứng E, F qua I . GH cắt BC tại P . Các điểm M, N thuộc IP sao cho $CM \perp IB$ và $BN \perp IC$. Chứng minh rằng I là trung điểm MN .



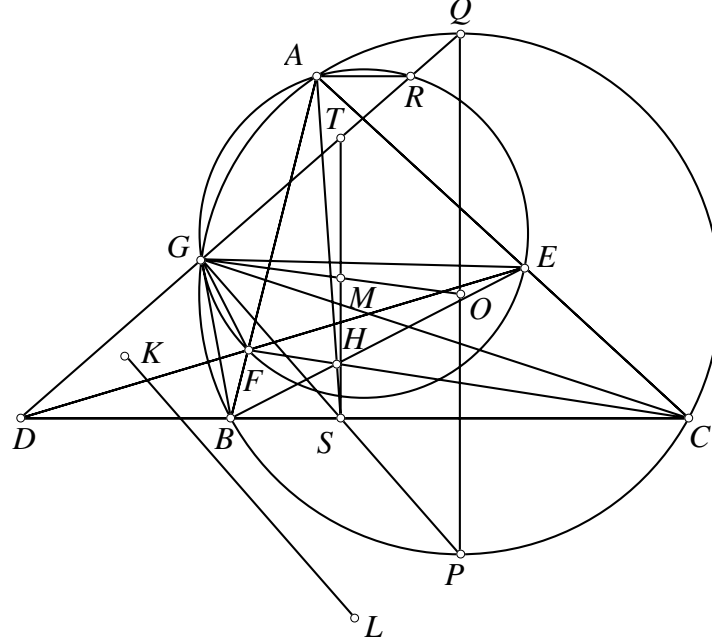
Lời giải. Gọi (I) tiếp xúc BC tại D và DK là đường kính của (I) . Theo tính chất đối xứng tâm I ta có nếu Q đối xứng P qua I thì QK tiếp xúc (I) và Q thuộc EF . Gọi AK cắt (I) tại L khác K thì tứ giác $KELF$ điều hòa nên QL tiếp xúc (I) . Từ đó $IP \perp KL$. Gọi R là trung điểm BC . Theo kết quả đã biết thì $IR \parallel AK$ nên $IP \perp IR$. Gọi BN, CM lần lượt cắt IC, IB tại S, T . Ta thấy tứ giác $STCB$ nội tiếp đường tròn (R) và IP vuông góc IR cắt BS, CT tại N, M thì I là trung điểm MN . $\square$

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A và P nằm trong tam giác sao cho $\angle BPC = 180^\circ - \angle A$. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F . I, J lần lượt là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B, C của tam giác ABE và ACF . Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng $KI = KJ$.



Lời giải. Để thấy P thuộc (K) . Nếu G đối xứng A qua BC thì G nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC nên PG là phân giác $\angle BPC$ hay cũng là $\angle EPF$ do đó PG và IJ cắt nhau tại R thuộc (K) . Vậy để chứng minh $KI = KJ$ ta sẽ chứng minh trung điểm N của RA cũng là trung điểm IJ , thật vậy. Gọi S, T là trung điểm PA, EF thì ST đi qua trung điểm M của BC . Mặt khác tứ giác $AEPF$ nội tiếp nên BI, CJ cắt nhau tại L nằm trên ST . Lại có $IJ \parallel BC$ nên ML đi qua trung điểm của IJ . Trong tam giác APG dễ thấy MS là đường trung bình nên $MS \parallel RG$ hay MS cũng đi qua trung điểm N của RA . Từ đó N cũng là trung điểm IJ . Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 4. Cho tam giác ABC với E, F là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh CA, AB sao cho $AE = AF$. EF cắt BC tại D . K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác DBF, DCE . Gọi BE cắt CF tại H . AH cắt BC tại S . G là đối xứng của D qua KL . Lấy T thuộc DG sao cho $ST \perp BC$. M là trung điểm ST . Chứng minh rằng đường thẳng GM luôn đi qua một điểm cố định khi E, F thay đổi.



Lời giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Dễ thấy G là giao điểm khác D của đường tròn ngoại tiếp tam giác DBF và DCE nên theo định lý Miquel G cũng nằm trên (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Từ đây ta suy ra hai tam giác GFB và GEC đồng dạng. Lại theo định lý Ceva cho tam giác ABC với các đường AS, BE, CF đồng quy tại H và chú ý $AE = AF$ ta có $\frac{SB}{SC} = \frac{BF}{CE} = \frac{GB}{GC}$. Vậy GS là phân giác $\angle BGC$ nên GS đi qua trung điểm P của cung BC không chứa G . Lại theo định lý Menelaus cho tam giác ABC với D, E, F thẳng hàng và chú ý $AE = AF$ ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{BF}{CE} = \frac{GB}{GC}$ nên GD là phân giác ngoài tam giác GBC . Từ đó GD đi qua trung điểm Q của cung BC chứa G . Như vậy O là trung điểm PQ , mà trong tam giác GPQ có $ST \parallel PQ$ nên G, M, O thẳng hàng hay GM đi qua O cố định. $\square$

