

CỰC TRỊ HÌNH HỌC

A-Phương pháp giải bài toán cực trị hình học.

1- Hướng giải bài toán cực trị hình học :

a) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị lớn nhất ta phải chứng tỏ được :

- + Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \leq m$ (m là hằng số)
- + Xác định vị trí của hình H trên miền D sao cho $f = m$

b) Khi tìm vị trí của hình H trên miền D sao cho biểu thức f có giá trị nhỏ nhất ta phải chứng tỏ được :

- + Với mọi vị trí của hình H trên miền D thì $f \geq m$ (m là hằng số)
- + Xác định vị trí của hình H trên miền D để $f = m$

2 - Cách trình bày lời giải bài toán cực trị hình học .

+ *Cách1* : Trong các hình có tính chất của đề bài, chỉ ra một hình rồi chứng minh mọi hình khác đều có giá trị của đại lượng phải tìm cực trị nhỏ hơn (hoặc lớn hơn) giá trị của đại lượng đó của hình đã chỉ ra.

+ *Cách2* : Biến đổi tương đương điều kiện để đại lượng này đạt cực trị bởi đại lượng khác đạt cực trị cho đến khi trả lời được câu hỏi mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ : Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn (P không trùng với O). Xác định vị trí của dây đi qua điểm P sao cho dây đó có độ dài nhỏ nhất.

Giải :

+ *Cách 1* :

Gọi AB là dây vuông góc với OP tại P , và dây CD là dây bất kỳ đi qua P và không trùng với AB (h.1).

Kẻ OH $\perp$ CD .

ΔOHP vuông tại H $\Rightarrow OH < OP \Rightarrow CD > AB$

Như vậy trong tất cả các dây đi qua P , dây vuông góc với OP tại P có độ dài nhỏ nhất .

+ *Cách 2* :

Xét dây AB bất kỳ đi qua P (h.2). Kẻ OH $\perp$ AB

Theo liên hệ giữa dây và khoảng cách đến tâm:

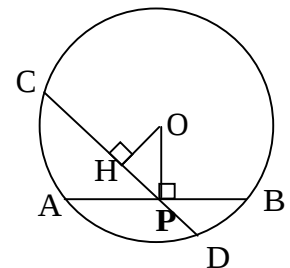
AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ OH lớn nhất

Ta lại có OH $\leq$ OP

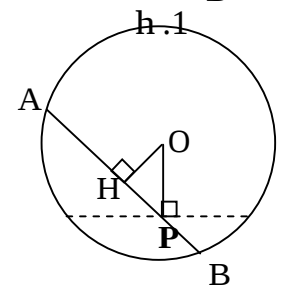
OH = OP $\Leftrightarrow$ H $\equiv$ P

Do đó max OH = OP

Khi đó dây AB vuông góc với OP tại P.



h.1

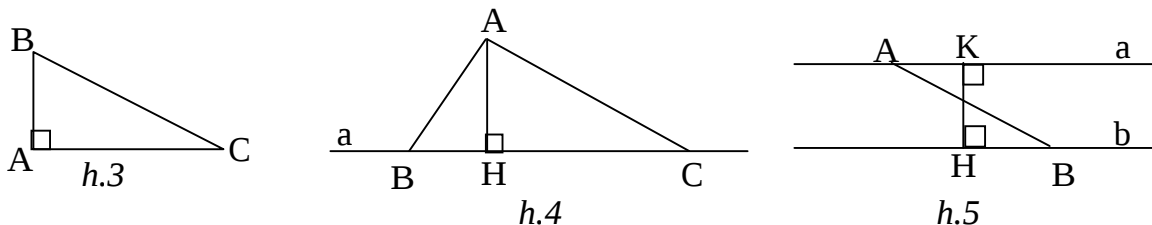


h.2

B-Các kiến thức thường dùng giải bài toán cực trị hình học.

1- Sử dụng quan hệ giữa đường vuông góc , đường xiên , hình chiếu .

a-Kiến thức cần nhớ:



$a_1) \Delta ABC$ vuông tại A (có thể suy biến thành đoạn thẳng) $\Rightarrow AB \leq BC$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv C$. (h.3)

$a_2) (h.4)$

+ $AH \perp a \Rightarrow AH \leq AB$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B \equiv H$.

+ $AB < AC \Leftrightarrow HB < HC$

$a_3) (h.5)$

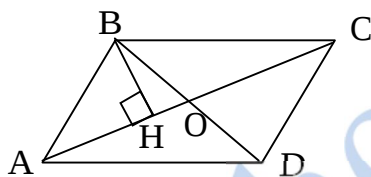
$A, K \in a; B, H \in b; a \parallel b; HK \perp a \Rightarrow HK \leq AB$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A \equiv K$ và $B \equiv H$.

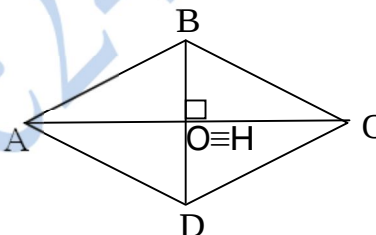
b-Các ví dụ:

Ví dụ 1: Trong các hình bình hành có hai đường chéo bằng 6 cm và 8 cm, hình nào có diện tích lớn nhất? Tính diện tích lớn nhất đó.

Giải:



h.6



h.7

Xét hình bình hành ABCD có $AC = 8$ cm; $BD = 6$ cm (h.6)

Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Kẻ $BH \perp AC$.

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = AC \cdot BH$

Ta có $AC = 8$ cm, $BH \leq BO = 3$ cm. Do đó:

$$S_{ABCD} \leq 8 \cdot 3 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow BH \equiv BO \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow BD \perp AC$$

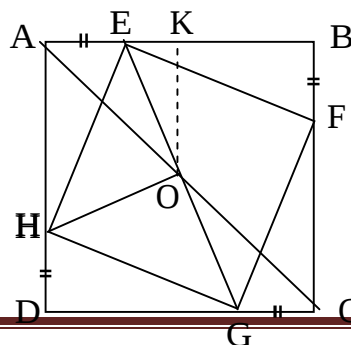
Vậy $\max S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2$. Khi đó hình bình hành ABCD là hình thoi (h.7) có diện tích 24 cm^2 .

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA ta lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Xác định vị trí của các điểm E, F, G, H sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải:

$$\Delta HAE = \Delta EBF = \Delta FCG = \Delta GHD$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH$$



h.8

⇒ EFGH là hình thoi .

$$\widehat{AHE} = \widehat{BEF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AEH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{AEH} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{HEF} = 90^\circ$$

⇒ EFGH là hình vuông

Gọi O là giao điểm của AC và EG . Tứ giác AECG có AE = CG, AE //CG nên là hình bình hành suy ra O là trung điểm của AC và EG , do đó O là tâm của cả hai hình vuông ABCD và EFGH.

$$\Delta HOE \text{ vuông cân : } HE^2 = 2OE^2 \Rightarrow HE = OE\sqrt{2}$$

Chu vi EFGH = 4HE = $4\sqrt{2} OE$. Do đó chu vi EFGH nhỏ nhất ⇔ OE nhỏ nhất

Kẻ OK ⊥ AB ⇒ OE ≥ OK (OK không đổi)

$$OE = OK \Leftrightarrow E \equiv K$$

Do đó minOE = OK

Như vậy , chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất khi và chỉ khi E,F,G,H là trung điểm của AB , BC, CD, DA.

Ví dụ 3: Cho đoạn thẳng AB có độ dài 2a .Vẽ về một phía của AB các tia Ax và By vuông góc với AB . Qua trung điểm của M của AB có hai đường thẳng thay đổi luôn vuông góc với nhau và cắt Ax, By theo thứ tự tại C và D .xác định vị trí của các điểm C,D sao cho tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất .Tính diện tích tam giác đó.

Giải:

Gọi K là giao điểm của CM và DB

$$MA = MB ; \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ , \widehat{AMC} = \widehat{BMK}$$

$$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta MBK \Rightarrow MC = MK$$

Mặt khác DM ⊥ CK

$$\Rightarrow \Delta DCK \text{ cân} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$$

Kẻ MH ⊥ CD

$$\Delta MHD = \Delta MBD \Rightarrow MH = MB = a$$

$$\Rightarrow S_{MCD} = \frac{1}{2} CD.MH \geq \frac{1}{2} AB.MH = \frac{1}{2} 2a.a = a^2$$

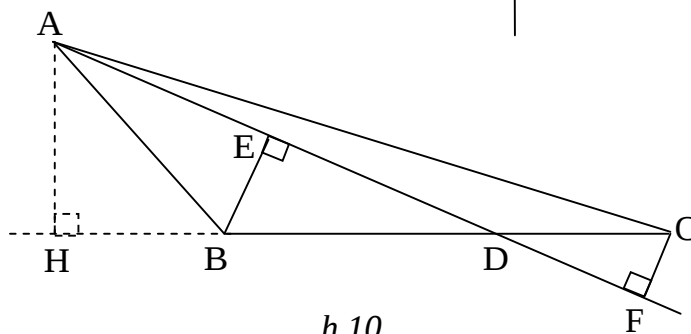
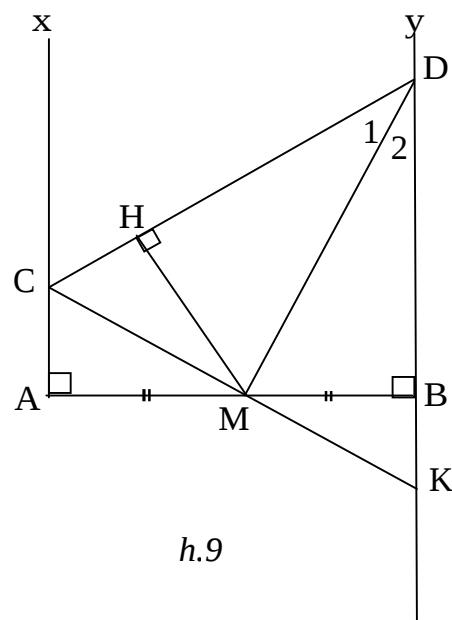
$S_{MCD} = a^2 \Leftrightarrow CD \perp Ax$ khi đó $\widehat{AMC} = 45^\circ ; \widehat{BMD} = 45^\circ$.

Vậy min $S_{MCD} = a^2$. Các điểm C,D được xác định trên Ax; By sao cho AC = BC = a .

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC có $\widehat{B}$ là góc tù , điểm D di chuyển trên cạnh BC . Xác định vị trí của điểm D sao cho tổng các khoảng cách từ B và C đến đường thẳng AD có giá trị lớn nhất .

Giải:

Gọi S là diện tích ΔABC Khi D di chuyển



trên cạnh BC ta có :

$$S_{ABD} + S_{ACD} = S$$

Kẻ $BE \perp AD$, $CF \perp AD$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} AD \cdot BE + \frac{1}{2} AD \cdot CF = S$$

$$\Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AD}$$

Do đó $BE + CF$ lớn nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ hình chiếu HD nhỏ nhất

Do $HD \geq HB$ (do $\angle ABD > 90^\circ$) và $HD = HB \Leftrightarrow D \equiv B$

Vậy Khi $D \equiv B$ thì tổng các khoảng cách từ B và C đến AD có giá trị lớn nhất .

2- Sử dụng quan hệ giữa đường thẳng và đường gấp khúc.

a-Kiến thức cần nhớ:

Với ba điểm A,B,C bất kỳ ta có : $AC + CB \geq AB$

$AC + CB = AB \Leftrightarrow C$ thuộc đoạn thẳng AB

b-Các ví dụ:

Ví dụ 5: Cho góc xOy và điểm A nằm trong góc đó . Xác định điểm B thuộc tia Ox, điểm C thuộc tia Oy sao cho $OB = OC$ và tổng $AB + AC$ là nhỏ nhất .

Giải:

Kẻ tia Om nằm ngoài góc xOy sao cho $\angle Om = \angle OA$. Trên tia Om lấy điểm D sao cho $OD = OA$. Các điểm D và A cố định .

$$OD = OA, OC = OB, \angle COD = \angle BOA$$

$$\Rightarrow \triangle DOC = \triangle AOB \Rightarrow CD = AB$$

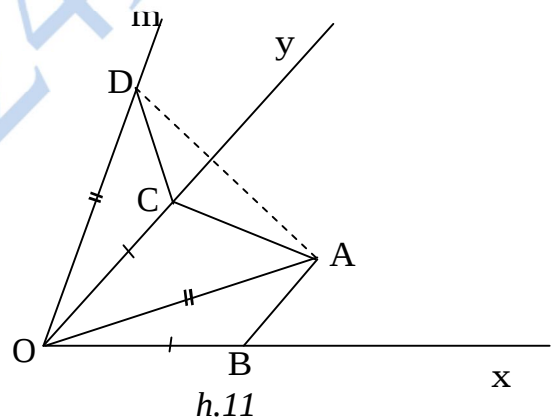
Do đó $AC + AB = AC + CD$

$$\text{Mà } AC + CD \geq AD$$

$$\Rightarrow AC + AB \geq AD$$

Xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi $C \in AD$

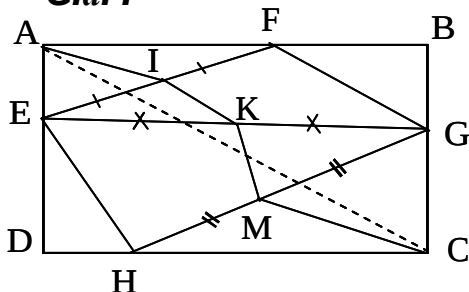
Vậy $\min(AC+AB) = AD$. Khi đó C là giao điểm của AD và Oy , B thuộc tia Ox sao cho $OB = OC$.



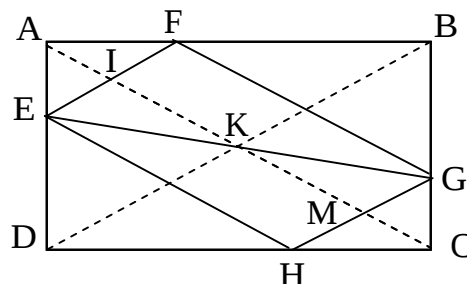
h.11

Ví dụ 6: Cho hình chữ nhật ABCD và điểm E thuộc cạnh AD . Xác định vị trí các điểm F thuộc cạnh AB , G thuộc cạnh BC , H thuộc cạnh CD sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải :



h.12



h.13

Gọi I, K, L theo thứ tự là trung điểm của EF, EG, EH (h.12).

$\triangle AEF$ vuông tại A có AI là trung tuyến $\Rightarrow AI = 1/2 EF$

$\triangle CGH$ vuông tại C có CM là trung tuyến $\Rightarrow CM = 1/2 GH$

IK là đường trung bình của $\triangle EFG \Rightarrow IK = 1/2 FG$

KM là đường trung bình của $\triangle EGH \Rightarrow KM = 1/2 EH$

Do đó : chu vi EFGH = EF + FG + GH + EH = 2(AI + IK + KM + MC)

Ta lại có : AI + IK + KM + MC $\geq$ AC

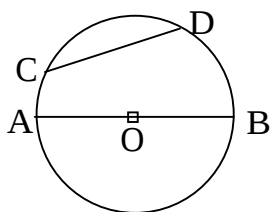
Suy ra chu vi EFGH $\geq$ 2AC (độ dài AC không đổi)

Chu vi EFGH nhỏ nhất bằng 2AC $\Leftrightarrow$ A, I, K, M, C thẳng hàng.

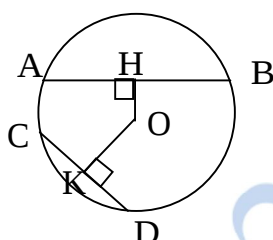
Khi đó ta có EH//AC, FG//AC, $\angle AEI = \angle EAI = \angle ADB$ nên EF//DB, tương tự GH//DB. Suy ra tứ giác EFGH là hình bình hành có các cạnh song song với các đường chéo của hình chữ nhật ABCD (h.13).

3- Sử dụng các bất đẳng thức trong đường tròn.

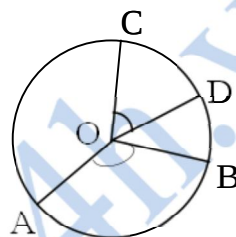
a-Kiến thức cần nhớ:



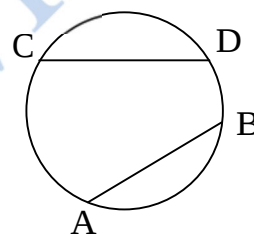
h.14



h.15



h.16



h.17

a₁) AB là đường kính, CD là dây bất kỳ $\Rightarrow CD \leq AB$ (h.14)

a₂) OH, OK là các khoảng cách từ tâm đến dây AB và CD :

$AB \geq CD \Leftrightarrow OH \leq OK$ (h.15)

a₃) AB, CD là các cung nhỏ của (O) : $AB \geq CD \Leftrightarrow \angle AOB \geq \angle COD$ (h.16)

a₄) AB, CD là các cung nhỏ của (O) : $AB \geq CD \Leftrightarrow \widehat{AB} \geq \widehat{CD}$ (h.17)

b-Các ví dụ:

Ví dụ 7: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A và B. Một cát tuyến chung bất kỳ CBD (B nằm giữa C và D) cắt các đường tròn (O) và (O') tại C và D. Xác định vị trí của cát tuyến CBD để $\triangle ACD$ có chu vi lớn nhất.

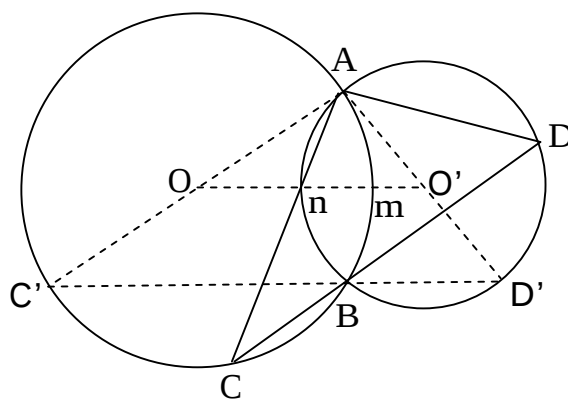
Giải:

$$\text{sđ } \widehat{C} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AmB}; \text{sđ } \widehat{D} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AnB}$$

$\Rightarrow$ số đo các góc $\triangle ACD$ không đổi

$\Rightarrow \triangle ACD$ có chu vi lớn nhất khi một cạnh của nó lớn nhất, chẳng hạn AC là lớn nhất.

AC là dây của đường tròn (O), do đó AC lớn nhất khi AC là đường kính của đường



h.18

tròn (O), khi đó AD là đường kính của đường tròn (O'). Cát tuyến CBD ở vị trí C'BD' vuông góc với dây chung AB.

Ví dụ 8: Cho đường tròn (O) và một điểm P nằm trong đường tròn. Xác định dây AB đi qua P sao cho $\angle AOB$ có giá trị lớn nhất.

Giải:

Xét tam giác cân OAB, góc ở đáy $\angle OAB$ lớn nhất nếu góc ở đỉnh $\angle AOB$ nhỏ nhất.

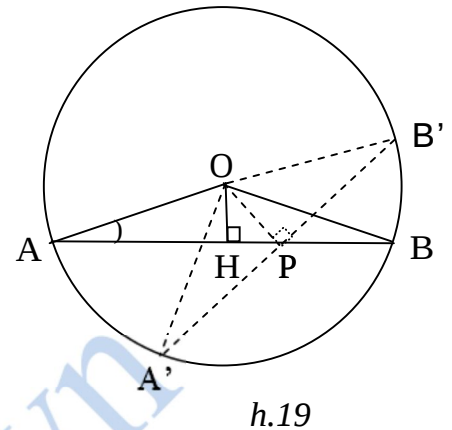
$$\angle AOB = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AB}$$

Góc $\angle AOB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Cung $\widehat{AB}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ dây AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ Khoảng cách đến tâm OH lớn nhất.

Ta có $OH \leq OP$

$OH = OP \Leftrightarrow H \equiv P$ nên $\max OH = OP \Leftrightarrow AB \perp OP$

Suy ra dây AB phải xác định là dây A'B' vuông góc với OP tại P.



4- Sử dụng bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai.

a-Kiến thức cần nhớ:

Các bất đẳng thức về lũy thừa bậc hai được sử dụng dưới dạng:

$$A^2 \geq 0; -A^2 \leq 0$$

Do đó với m là hằng số, ta có:

$$f = A^2 + m \geq m; \min f = m \text{ với } A = 0$$

$$f = -A^2 + m \leq m; \max f = m \text{ với } A = 0$$

b-Các ví dụ:

Ví dụ 9: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, lấy theo thứ tự các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Tính độ dài AE sao cho tứ giác EFGH có chu vi nhỏ nhất.

Giải:

$$\triangle AHE = \triangle BEF = \triangle CFG = \triangle DGH$$

$$\Rightarrow HE = EF = FG = GH, \angle HEF = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ HEFG là hình vuông nên chu vi EFGH nhỏ nhất khi HE nhỏ nhất.

$$\text{Đặt } AE = x \text{ thì } HA = EB = 4 - x$$

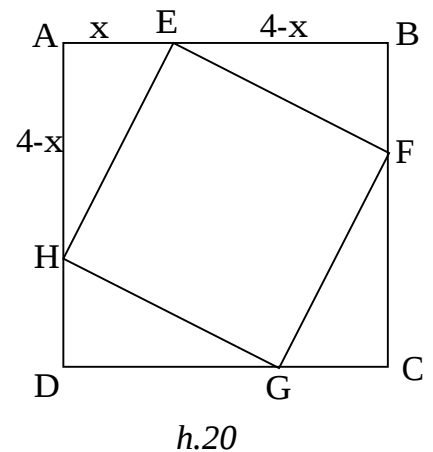
$\triangle HAE$ vuông tại A nên:

$$HE^2 = AE^2 + HA^2 = x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x - 2)^2 + 8 \geq 8$$

$$HE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2$$

Chu vi tứ giác EFGH nhỏ nhất bằng $8\sqrt{2}$ cm, khi đó $AE = 2$ cm.

Ví dụ 10: Cho tam giác vuông ABC có độ dài các cạnh góc vuông $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. M là điểm di chuyển trên cạnh huyền BC. Gọi D và E là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Tính diện tích lớn nhất của tứ giác ADME.



Giải:

ADME là hình chữ nhật .

Đặt $AD = x$ thì $ME = x$

$$ME \parallel AB \Rightarrow \frac{EM}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{CE}{8} \Rightarrow CE = \frac{4}{3}x$$

$$\Rightarrow AE = 8 - \frac{4}{3}x$$

$$\text{Ta có : } S_{ADME} = AD \cdot AE = x \left(8 - \frac{4}{3}x \right) = 8x - \frac{4}{3}x^2$$

$$= -\frac{4}{3}(x-3)^2 + 12 \leq 12$$

$$S_{ADME} = 12 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow x = 3$$

Diện tích lớn nhất của tứ giác ADME bằng 12 cm^2 , khi đó D là trung điểm của AB, M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AC.

5- Sử dụng bất đẳng thức Cô-si .**a-Kiến thức cần nhớ:**

Bất đẳng thức Cô-si : Với $x \geq 0 ; y \geq 0$ ta có : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Bất đẳng thức Cô-si thường được sử dụng dưới các dạng sau :

+ Dạng 1: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq 2xy$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 2: $\frac{(x+y)^2}{xy} \geq 4$; $\frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \leq 2$$
 ; $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 3: Với $x \geq 0 ; y \geq 0 ; x+y$ không đổi thì xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$

+ Dạng 4: Với $x \geq 0 ; y \geq 0 ; xy$ không đổi thì $x+y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$

b-Các ví dụ:

Ví dụ 11: Cho đoạn thẳng AB, điểm M di chuyển trên đoạn thẳng ấy . Vẽ các đường tròn có đường kính MA và MB . Xác định vị trí của điểm M để tổng diện tích của hai hình tròn có giá trị nhỏ nhất .

Giải :

Đặt $MA = x$, $MB = y$

