

12. PP ĐẶT ẨN PHỤ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH – P1

Thầy Đặng Việt Hùng [ĐVH]

Ví dụ 1: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-2} - \sqrt{y-1} = 27 - x^3 \\ (x-2)^4 + 1 = y \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

ĐK $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases}$ từ phương trình (2) ta có $(x-2)^4 = y-1 \Rightarrow \sqrt{y-1} = (x-2)^2$ thay vào phương trình

(1) ta được $\sqrt{x-2} = 27 - x^3 + x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + x^3 - x^2 + 4x - 31 = 0$ (*)

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x-2} + x^3 - x^2 + 4x - 31$, với mọi $x \geq 2$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} + 3x^2 - 2x + 4 > 0 \quad \forall x > 2$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ mặt khác $f(3) = 0 \Rightarrow x = 3$ là nghiệm duy nhất của (*) thay vào Phương trình (2) ta được $y = 2$ vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = 3; y = 2$

Ví dụ 2: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ xy(x+1)(y+1) = 72 \end{cases}$$

Phân tích. Đây là hệ đối xứng loại I

Hướng 1. Biểu diễn từng phương trình theo tổng $x + y$ và tích xy

Hướng 2. Biểu diễn từng phương trình theo $x^2 + x$ và $y^2 + y$. Rõ ràng hướng này tốt hơn.

Hướng dẫn giải:

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x) + (y^2 + y) = 18 \\ (x^2 + x)(y^2 + y) = 72 \end{cases} \quad \text{Đặt} \quad \begin{cases} x^2 + x = a, a \geq -\frac{1}{4} \\ y^2 + y = b, b \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{ta được} \quad \begin{cases} a + b = 18 \\ ab = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6, b = 12 \\ a = 12, b = 6 \end{cases}$$

$$\text{TH 1.} \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 6 \\ y^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, x = -3 \\ y = 3, y = -4 \end{cases}$$

$$\text{TH 2. Đổi vai trò của a và b ta được} \quad \begin{cases} x = 3, x = -4 \\ y = 2, y = -3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = \{(2; 3); (2; -4); (-3; 3); (-3; -4); (3; 2); (-4; 2); (3; -3); (-4; -3)\}$

Nhận xét. Bài toán trên được hình thành theo cách sau

$$\text{Xuất phát từ hệ phương trình đơn giản} \quad \begin{cases} a + b = 18 \\ ab = 72 \end{cases} \quad (I)$$

1) Thay $a = x^2 + x, b = y^2 + y$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ xy(x+1)(y+1) = 72 \end{cases} \quad \text{đó chính là ví dụ 2}$$

2) Thay $a = x^2 + xy, b = y^2 - xy$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy(x^2 - y^2) = 72 \end{cases}$$

3) Thay $a = x^2 + 2x, b = 2x + y$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(3) \begin{cases} x^2 + 4x + y = 18 \\ x(x+2)(2x+y) = 72 \end{cases}$$

4) Thay $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(4) \begin{cases} (x+y)xy + x + y = 18xy \\ (x^2+1)(y^2+1) = 72xy \end{cases}$$

5) Thay $a = x^2 + 2xy$, $b = y^2 - xy$ vào hệ (I) ta được hệ

$$(5) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 18 \\ xy(x+2y)(y-x) = 72 \dots \end{cases}$$

- Như vậy, với hệ xuất (I), bằng cách thay biến ta thu được rất nhiều hệ pt mới.

- Thay hệ xuất phát (I) bằng hệ xuất phát (II) $\begin{cases} a+b=7 \\ a^2-b^2=21 \end{cases}$ và làm tương tự như trên ta lại thu được các hệ mới khác. Chẳng hạn

6) Thay $a = x^2 + y^2$, $b = xy$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(6) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$$

7) Thay $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(7) \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 - y^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 21 \end{cases}$$

8) Thay $a = x + \frac{1}{y}$, $b = \frac{x}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(8) \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ (xy+1)^2 + x^2 = 21y^2 \end{cases}$$

9) Thay $a = x + y$, $b = \frac{1}{y}$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(9) \begin{cases} (x+y)y+1=9y \\ (x+y-2)^2y^2-21y^2=1 \end{cases}$$

10) Thay $a = x^2 + 2x$, $b = y^2 + 2x$ vào hệ (II) ta được hệ

$$(10) \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 7 \\ x^4 - y^4 + 4x(x^2 - y^2) = 21 \dots \end{cases}$$

Như vậy, nếu chúng ta biết cách tạo ra bài toán thì chúng ta có thể nghĩ ra cách giải của những bài toán khác.

Ví dụ 3: [ĐVH]. Giải các hệ PT sau

$$\text{a) } \begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 7 \\ y(y-2x) - 2x = 10 \end{cases}$$

Hướng dẫn giải:

a) ĐK: $x \neq 0$. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1-3\cdot\frac{1}{x}=0 \\ (x+y)^2-5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+1=0 \end{cases}$ Đặt $x+y=a, \frac{1}{x}=b$ ta được hệ

$$\begin{cases} a+1-3b=0 \\ a^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b-1 \\ (3b-1)^2-5b^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, b=1 \\ a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=2, y=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

b) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+y)+xy(x^2+y+1)=-\frac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\frac{5}{4} \end{cases}$. Đặt $x^2+y=a, xy=b$ ta được

$$\begin{cases} a+b(a+1)=-\frac{5}{4} \\ a^2+b=-\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-a-ab=0 \\ b=-\frac{5}{4}-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, b=-\frac{5}{4} \\ a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

TH1. $\begin{cases} a=0 \\ b=-\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}} \\ y=-\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \end{cases}$

TH2. $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y=-\frac{1}{2} \\ xy=-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\frac{3}{2x}=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ pt là $S = \left\{ \left(1; -\frac{3}{2}\right); \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}}\right) \right\}$

c) ĐK: $x \geq -1, y \geq -1, xy \geq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2\sqrt{x+y+xy+1}=14 \end{cases}$

Đặt $x+y=a, \sqrt{xy}=b$. $a \geq -2, b \geq 0, a^2 \geq 4b^2$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a-b=3 \\ a+2\sqrt{a+b^2+1}=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3+b \\ 2\sqrt{b^2+b+4}=11-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3+b \\ 3b^2+26b-105=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn đk)}$$

d) Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=9 \\ (y-x)^2-(x+1)^2=9 \end{cases}$.

Đặt $a=x+1, b=y+1 \Rightarrow b-a=y-x$ ta được hệ $\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ (b-a)^2-a^2=9 \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2+b^2=(b-a)^2-a^2 \Leftrightarrow a^2=-2ab \Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } a=-2b$$

+) Với $a=0 \Rightarrow b=\pm 3 \Rightarrow x=-1, y=2$ hoặc $x=-1, y=-4$

+) Với $a=-2b \Rightarrow 5b^2=9 \Leftrightarrow b=\pm\frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow a=\mp\frac{6}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow x=-1-\frac{6}{\sqrt{5}}, y=-1+\frac{3}{\sqrt{5}} \text{ hoặc } x=-1+\frac{6}{\sqrt{5}}, y=-1-\frac{3}{\sqrt{5}}$$

Kết luận. Hệ có 4 nghiệm như trên nhé!

Ví dụ 4: [ĐVH]. Giải hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} x(x+2)(2x+y)=9 \\ x^2+4x+y=6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x(3x+2y)(x+1)=12 \\ x^2+2y+4x-8=0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (x^2+2x)(3x+y)=18 \\ x^2+5x+y-9=0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^2+y^2-3x+4y=1 \\ 3x^2-2y^2-9x-8y=3 \end{cases}$$

Ví dụ 5: [ĐVH]. Giải hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)=49 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y+xy^2=-6x^2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{3x+2y}=-1 \\ \sqrt{x+y}+x-y=0 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Đặt $u=\sqrt{x+y}; v=\sqrt{3x+2y}$ ($u \geq 0, v \geq 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=u^2 \\ 3x+2y=v^2 \end{cases} \Rightarrow x-y=2v^2-5u^2. \text{ Ta có hệ: } \begin{cases} u-v=-1 \\ u+2v^2-5u^2=v \end{cases}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: [ĐVH]. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\frac{1}{y}=8 \end{cases}$$

Bài 2: [ĐVH]. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x(x+y+1)+y(y+1)=2 \end{cases}$$

Bài 3: [ĐVH]. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4 \end{cases}$$

Bài 4: [ĐVH]. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+xy+x+y=4 \\ x+y+xy(x+y)=4 \end{cases}$$

Bài 5: [ĐVH]. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+1+y(y+x)=4y \\ (x^2+1)(y+x-2)=y \end{cases}$$

Bài 6: [ĐVH]. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+y)(1+xy)=18xy \\ (x^2+y^2)(1+x^2y^2)=208x^2y^2 \end{cases}$$

Bài 7: [ĐVH]. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 \\ 4x^2y+6x=y^2 \end{cases}$$

Bài 8: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2 y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Bài 9: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Bài 10: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x - y} = \sqrt{x - y} \\ x + y = \sqrt{x + y + 2} \end{cases}$$

Bài 11: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \end{cases}$$

Bài 12: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + x^2 y^2 = 3xy \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy = 1 \end{cases}$$

Bài 13: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 6y = 0 \\ x - 2y + \frac{x}{y} = 6 \end{cases}$$

Bài 14: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy - y = 0 \\ x + y + \frac{x}{y} = 4 \end{cases}$$

Bài 15: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - x^3 y + x^2 y^2 = 1 \\ x^3 y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Bài 16: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + x - \frac{1}{y} = 2 \\ y - y^2 x - 2y^2 = -2 \end{cases}$$

Bài 17: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x^2 y^2 = 1 + 2xy \\ x + x^2 y + xy = xy^2 + y + 1 \end{cases}$$

Bài 18: [ĐVH]. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2 y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$