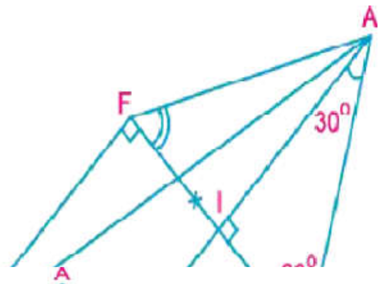
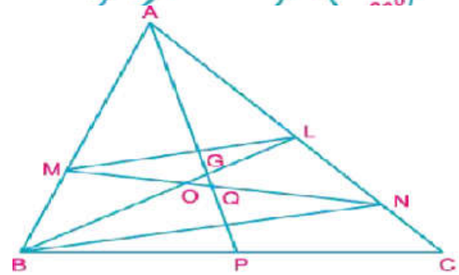
Giải 34 bài toán hình trên "Toán tuổi thơ"



✪ Bài 1: Cho tam giác ABC. Các điểm M, N theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho diện tích tam giác AMN bằng một nửa diện tích tam giác ABC ($M \neq B$; $N \neq C$). Chứng minh : Trọng tâm của tam giác ABC nằm trong tam giác AMN.

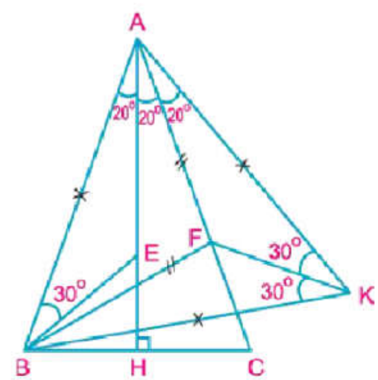


Lời giải : Gọi G là trọng tâm ABC. Đặt L là giao điểm của BG và AC ; O là giao điểm của BL và MN.
Ta có : AL = CL ; GB/GL = 2 (1)
Theo giả thiết : $S_{(AMN)} = 1/2 . S_{(ABC)}$ Mặt khác, vì AL = CL nên : $S_{(ABL)} = 1/2 . S_{(ABC)}$
Vậy $S_{(AMN)} = S_{(ABL)}$ => $S_{(OLN)} = S_{(OMB)}$ => $S_{(BLN)} = S_{(NMB)}$ => ML // BN
=> : OB/OL = BN/ML = AN/AL < AC/AL = 2 (2) (định lí Talét)
Từ (1), (2) => OB/OL < GB/GL => OB/OL + 1 < GB/GL + 1 => BL/OL < BL/GL
GL < OL => G thuộc đoạn OL => G thuộc tam giác AMN (đpcm).

✪Bài 2: Cho tam giác ABC. Các trung tuyến AM, BN, CP đồng qui tại G. Giả các tam giác AGN, BGP, CGM là bằng nhau. Chứng minh rằng : tam giác AB(tam giác đều.
Lời giải :
Nhận xét rằng : Trong một tam giác cạnh nào lớn hơn khi và chỉ khi độ dài đư trung tuyến ứng với cạnh đó nhỏ hơn.
Đặt BC = a, AC = b, AB = c ; AM = m_a,
BN = m_b ; CP = m_c.
Không mất tính tổng quát giả sử BC = min {AB, BC, CA}. Theo nhận xét trên = max {m_a, m_b, m_c}.
Từ $S_{(AGN)} = S_{(BGP)} = S_{(CGM)} = 1/6.S_{(ABC)}$ và sử dụng công thức S = p.r, => :
AG + GN + AN = BG + GP + BP = GC + MG + CM (*)
Theo tính chất trọng tâm, từ (*) ta có:

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{1}{3}m_b + \frac{1}{2}b = \frac{2}{3}m_b + \frac{1}{3}m_c + \frac{1}{2}c$$

$$=> \begin{cases} \frac{2}{3}m_a - \frac{1}{3}m_b - \frac{1}{3}m_c = \frac{1}{2}(c-b) & (1) \\ \frac{2}{3}m_b - \frac{1}{3}m_c - \frac{1}{3}m_a = \frac{1}{2}(a-c) & (2) \\ \frac{2}{3}m_c - \frac{1}{3}m_a - \frac{1}{3}m_b = \frac{1}{2}(b-a) & (3) \end{cases}$$



Hình 1

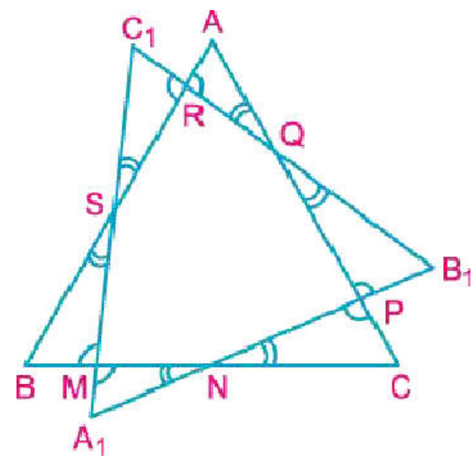
Vì m_a = max {m_a, m_b, m_c} nên từ (1) => $c \geq b$ => $m_b \geq m_c$. Từ (3) => 1/2.(b - a) $\leq$ 0 hay $b \leq a$.
Mặt khác a = min {a, b, c} nên a = b => $m_a = m_b$. Từ (1), (2) => b = c.
Vậy a = b = c hay ΔABC đều (đpcm).

✪Bài 3: Cho tam giác ABC cân tại A, góc BAC = 40° , đường cao AH. Các điểm E, F theo thứ tự thuộc các đoạn thẳng AH, AC sao cho ∠ EBA = ∠ FBC = 30°. Chứng minh rằng : AE = AF.
Lời giải :
Trên nửa mặt phẳng bờ AB, chứa C, lấy điểm K sao cho tam giác ABK đều (*hình 1*)
Trong tam giác ABC, theo giả thiết, ta có :
∠ ABC = ∠ ACB = (180° - 40)/2 = 70°
=> ∠ ABF = ∠ ABC - ∠ FBC = 70° - 30° = 40°.

Vậy ∠ ABF = ∠ BAF => ΔABF cân tại F => FA = FB.
Theo cách dựng điểm K, KA = KB. Vậy KF là đường trung trực của đoạn AB => KF là phân giác của ∠ AKB (vì ΔABK đều) => ∠ FKB = 30^o => ∠ FKB = ∠ EBA (1) (theo giả thiết)
ΔABC cân tại A, ∠ BAC = 40^o , AH là đường cao, => ∠ BAE = 1/2.40^o = 20^o .
Mặt khác∠ KAF = ∠ KAB - ∠ FAB = 60^o - 40^o = 20^o
Vậy ∠ KAF = ∠ BAE (2) . Chú ý rằng ΔABK đều nên AB = AK (3)
Từ (1), (2), (3) => : ΔKAF = ΔBAE => AF = AE (đpcm)

✪Bài 4: Tam giác ABC có E là trung điểm cạnh BC
sao cho ∠ EAB = 15^o , ∠ EAC = 30 . Tính ∠ C.
Lời giải :
Gọi F là điểm đối xứng của C qua AE và I là giao điểm của CF và AE,
=> AI vuông góc với CI. Xét tam giác vuông IAC, vuông tại I,
có ∠ IAC = 30^o => ∠ ACF = ∠ ACI = 60^o (1) .
Ta có AI là trung trực của CF nên ΔAFC cân, từ (1) => ΔAFC đều.
Nhận xét rằng, IE là đường trung bình của ΔBFC nên IE // FB,
mà IE vuông góc với FC => BF vuông góc với FC hay ΔBFC vuông tại F
=> góc BFC = 90^o ; ΔAFC đều => ∠ CFA =∠ CAF = 60^o ,
=> ∠ BFA = ∠ BFC + CFA = 90^o + 60^o = 150^o
∠ FAB = ∠ CAF - ∠ CFA - ∠ BAE = 60^o - 30^o - 15^o = 15^o.
Xét ΔFBA, ∠ BFA = 150^o và ∠ FAB = 15^o. => ∠ FBA = 15^o su ra ΔFBA cân tại F
=> FB = FA = FC. Từ đó, ΔBFC vuông cân tại F => ∠ BCF = 45^o (2)
Từ (1), (2) => ∠ ACB = ∠ ACF + ∠ BCF = 60^o + 45^o = 105^o.
Vậy ∠ C = 105^o.

✪Bài 5: Cho hai tam giác đều ABC, $A_1B_1C_1$ bằng nhau và chồng lên nhau sao cho phần giao của chúng là một lục giác mà ta kí hiệu là MNPQRS.
Chứng minh rằng : MN + PQ + RS = NP + QR + SM.



Lời giải :
Chú ý rằng, các góc của hai tam giác đều ABC, $A_1B_1C_1$ bằng nhau (cùng bằng 60^o),
hai góc đối đỉnh bằng nhau, ta thấy :
Các tam giác A_1MN, B_1PQ, C_1RS, CPN, ARQ, BMS đồng dạng.
Hai tam giác đồng dạng thì tỉ số giữa các độ dài tương ứng bằng nhau,

$\Rightarrow$ $\frac{MN}{A_1M + A}$
Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có :

$$\frac{MN + PQ + RS}{A_1M + A_1N + B_1P + B_1Q + C_1R + C_1S} = \frac{NP + QR + SM}{CN + CP + AQ + AR + BS + BM}$$

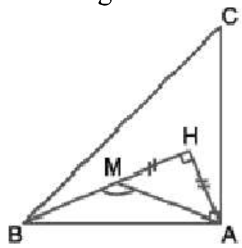
Đặt độ dài các cạnh của hai tam giác đều bằng a,
MN + PQ + RS = x, NP + QR + SM = y.
Ta có : x/(3a -) = y/(3a - x) . => x(3a - x) = y(3a - y)
=> (x - y)3a - (x - y)(x + y) = 0 => (x - y)(3a - x - y) = 0 (1)
Mặt khác, ta có :
3a = BC + CA + AB = (BM + MN + NC) + + (CP + PQ + QA) + (AR + RS + SB) = (CN + CP) + (AQ + AR) + (BS + BM) + + (MN + PQ + RS) > (NP + QR + SM) + (MN + PQ + RS) (bất đẳng thức tam giác)
= y + x => 3a - x - y > 0 (2).

Từ (1), (2) => x - y = 0 => x = y.
Điều đó có nghĩa là : MN + PQ + RS = NP + QR + SM.

✪Bài 6: Cho tam giác BMA có góc BMA = 135^o ; BM = 2 ; $MA = \sqrt{6}$ Lấy điểm C cùng phía điểm M, bờ AB sao cho tam giác CAB vuông cân ở A. Tính diện tích tam giác ABC.

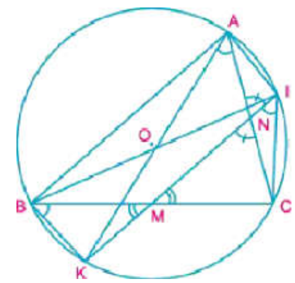
Lời giải :
Dựng AH vuông góc với BM, theo giả thiết : góc BMA = 135^o => góc AMH = 45^o, hay ΔAHM vuông cân tại H.

Vì $MA = \sqrt{6}$ nên $AH = \frac{MA}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$



Góc BMH = góc BMA + góc AMH = $135^o + 45^o = 180^o$
⇒ B, M, H thẳng hàng
⇒ $BH = BM + MH = 2 + \sqrt{3}$
Áp dụng định lí Py-ta-go cho tam giác vuông AHB ta được :
$AB^2 = BH^2 = AH^2 = (2 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3}) = 10 + 4\sqrt{3}$
Vậy $S_{(ABC)} = \frac{1}{2}AB^2 = 5 + 2$

✪Bài 7: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, CA. Tia MN cắt (O) tại I.
Chứng minh rằng : BC/IA = CA/IB + AB/IC .



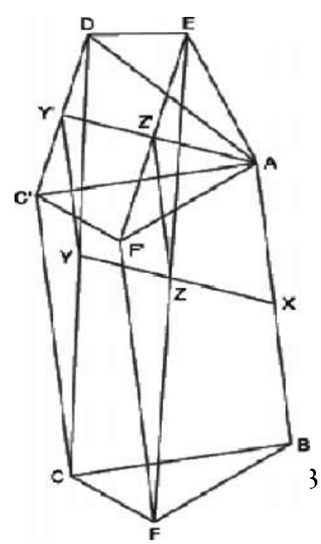
Lời giải :
Đặt K là giao điểm của tia NM và đường tròn (O).
Vì M, N là trung điểm của BC, CA nên MN // AB
=> AIKB là hình thang, hơn thế, là hình thang cân (vì AIKB nội tiếp)
=> IA = KB ; IB = KA (1)

Mặt khác, dễ thấy : $\Delta MBK \backsim \Delta MIC \Rightarrow \frac{MB}{KB} = \frac{MI}{CI}$; $\Delta NAK \backsim \Delta NIC \Rightarrow \frac{NA}{KA} = \frac{NI}{CI}$

$\Rightarrow \frac{MB}{KB} - \frac{NA}{KA} = \frac{MI}{CI} - \frac{NI}{CI} = \frac{MN}{CI} \Rightarrow \frac{MB}{IA} = \frac{NA}{IB} + \frac{MN}{CI} \Rightarrow \frac{2MB}{IA} = \frac{2NA}{IB} + \frac{2MN}{CI}$

$\Rightarrow \frac{BC}{IA} = \frac{CA}{IB} + \frac{AB}{CI}$
. (Vì M, N là trung điểm của BC, CA)

✪Bài 8: Cho tứ giác ABCD có AD = BC. Về phía ngoài của tứ giác này, ta dựng hai tam giác bằng nhau ADE và BCF. Chứng minh rằng : trung điểm của các đoạn AB, CD, EF cùng thuộc một đường thẳng.
Lời giải :
Dựng các hình bình hành ABFF', ABCC'.
Dễ thấy : F'FCC' cũng là hình bình hành.
Từ đó ta có : AF' = BF , AC' = BC và F'C' = FC
=> ΔAC'F' = ΔBCF = ΔADE (1)
Gọi X, Y, Z, Z', Y' lần lượt là trung điểm của AB, DC, EF, EF', DC'.



Từ (1) => : A, Y’, Z’ thẳng hàng (2).
Dễ thấy :

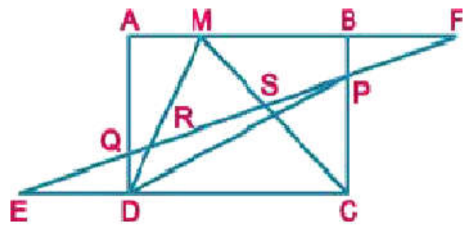
$$\begin{cases} Y'Y \parallel C'C \\ Z'Z \parallel F'F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y'Y \parallel AX \\ Z'Z \parallel AX \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y'Y = \dfrac{1}{2}C'C \\ Z'Z = \dfrac{1}{2}F'F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y'Y = AX \\ Z'Z = AX \end{cases}$$

Do đó : các tứ giác AXYY’ và AXZZ’ là hình bình hành (3)
Từ (2), (3) => : X, Y, Z thẳng hàng (đpcm).

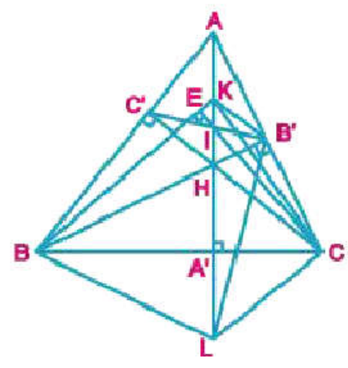
✪Bài 9 : Cho hình chữ nhật ABCD (như hình vẽ), biết rằng AB = 30 cm, AD = 20 cm, AM = 10 cm, BP = 5 cm, AQ = 15 cm. Tính diện tích tam giác MRS.

Lời giải :
Giả sử đường thẳng PQ cắt các đường thẳng CD, AB tương ứng tại E, F.



Ta có : DE/EC = QD/CP = 5/15 = 1/3 , hay DE/DC = 1/2 => DE = 15 cm.
Ta thấy tam giác QDE = tam giác PBF => BF = DE = 15 cm.
Lại có : DE/MF = DR/MR = 15/35 = 3/7 => MR/MD = 7/10 (1).
Vì MS/MC = MF/EC = 35/45 = 7/9 => MS/MC = 7/16 (2)
Ta có : $S_{MDC} = S_{ABCD}$ - SAMD - S_{BMC} = AB.AD - 1/2AD.(AM + MB) = 300 (cm^2) (3)
Mặt khác, từ (1) và (2) ta có : S_{MRS}/S_{MCD} = (MR/MD).(MS/MC) = 7/10 . 7/16 = 47/160
Do đó, từ (3) ta có : S_{MRS} = 300. (49/160) = 91,875 (cm^2).

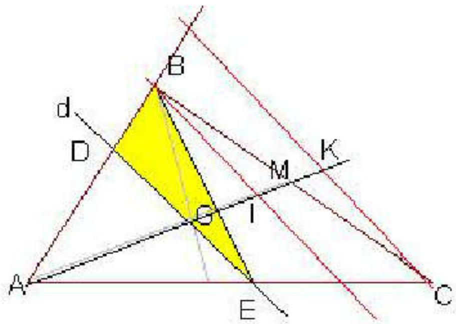
✪Bài 10: Cho tam giác ABC không vuông. Các đường cao BB’, CC’ cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm của AH, I là giao điểm của AH và B’C’. Chứng minh rằng : I là trực tâm của tam giác KBC.
Lời giải :



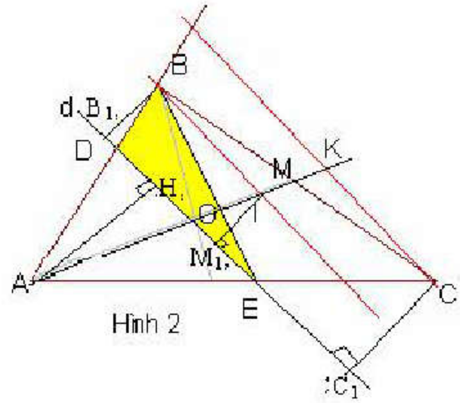
Trường hợp 1 : Tam giác ABC nhọn (hình vẽ).
Gọi L là điểm đối xứng của H qua BC.
Ta có : $\angle$ BLC = $\angle$ BHC = $\angle$ B ' HC ' (đối đỉnh)
= 180^o - $\angle$ BAC (Vì AC 'HB ' nội tiếp)
=> $\angle$ BLC + $\angle$ BAC = 180^o => tứ giác ABLC nội tiếp
=> $\angle$ CLA = $\angle$ CBA . (1)
Mặt khác, vì $\angle$ BB 'C = $\angle$ BC 'C (= 90^o) nên tứ giác BC’B’C nội tiếp
=> $\angle$ AB ' C ' = $\angle$ CBC ' . (2)
Từ (1) và (2) => : $\angle$ CLI = $\angle$ AB 'I => tứ giác CLIB ’ nội tiếp
=> $\angle$ B 'CI = $\angle$ B 'LI . (3)
Theo giả thiết, tam giác AHB’ vuông tại B’, B’K là trung tuyến nên KB’ = KH => $\angle$ KB 'H = $\angle$ KHB ' = $\angle$ BHL = $\angle$ BLH (vì tam giác BLH cân tại B) => tứ giác KB’LB nội tiếp , suy ra $\angle$ B 'BK = $\angle$ B 'LK . (4)
Từ (3) và (4) => tứ giác BCB’E nội tiếp (E là giao của CI và BK)
=> $\angle$ BEC = $\angle$ BB 'C = 90^o => CI vuông góc với BK.
Chú ý rằng : KI vuông góc với BC
Vậy I là trực tâm của tam giác KBC.
Trường hợp 2 : Tam giác ABC tù, chứng minh hoàn toàn tương tự như trường hợp 1.

✪Bài 11: Cho tam giác ABC. Một đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác cắt cạnh AB tại D và cắt cạnh AC tại E.
Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích các ΔBDE và ΔCDE.

Lời giải : Gọi M là trung điểm của BC, dựng BI, CK song song với d (I, K nằm trên AM), Hình 1



Hình 1



Hình 2

khi đó MI = MK, => AI + AK = 2 AM = 3AG.

Vậy có : AB/AD + AC/AE = AI/AG + AK/AG = 3AG/AG =3

Dựng AH, BB_1, MM_1, CC_1 vuông góc với d, lúc đó AH = $2MM_1$.(Hình 2)

Mặt khác, MM_1 là đường trung bình của hình thang BB_1C_1C nên :

$BB_1 + CC_1 = 2MM_1 = AH$.

Từ đó :

$$\frac{S_{BDE}+S_{CDE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}DE(BB_1+CC_1)}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}DE.AH}{S_{ABC}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB}.\frac{AE}{AC}$$

áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta được :

$$\left(\frac{AB}{AD}\right).\left(\frac{AC}{AE}\right) \le \frac{1}{4}\left(\frac{AB}{AD}+\frac{AC}{AE}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Do đó :

$$\frac{S_{BDE}+S_{CDE}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB}.\frac{AE}{AC} \ge \frac{4}{9},$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AD/AB = AE/AC hay d // BC.

hay $$S_{BDE}+S_{CDE} \ge \frac{4}{9}S_{ABC}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích

SΔ BDE + SΔ CDE =4/9 SΔ ABC, đạt được khi d // BC. (ĐPCM)

✪Bài 12: Cho hình vuông ABCD. Tìm tập hợp các điểm M nằm trong (không nằm trên cạnh) hình vuông sao cho : ∠ MAB + ∠ MBC + ∠ MCD + ∠ MDA = 180^o

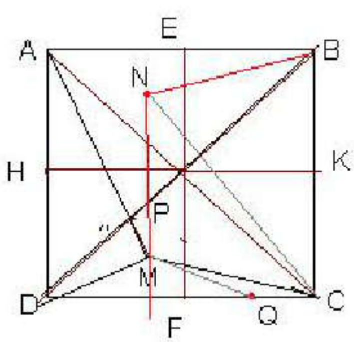
Lời giải : Gọi H, K, E, F là trung điểm của các đoạn AD, BC, AB, DC. Tập hợp các điểm M nằm trong (không nằm trên cạnh) hình vuông và thỏa mãn điều kiện ∠ MAB + ∠ MBC + ∠ MCD + ∠ MDA = 180^o là hình T gồm các đoạn AC, BD, HK, EF.

Kết luận trên được chứng minh bằng hai phần.

Phần 1 (đảo) : Nếu M thuộc T thì ∠ MAB + ∠ MBC + ∠ MCD + ∠ MDA = 180^o (đề nghị bạn đọc tự chứng minh)

Phần 2 (phản đảo) : Nếu M không thuộc T thì góc MAB + ∠ MBC + ∠ MCD + ∠ MDA không bằng 180^o

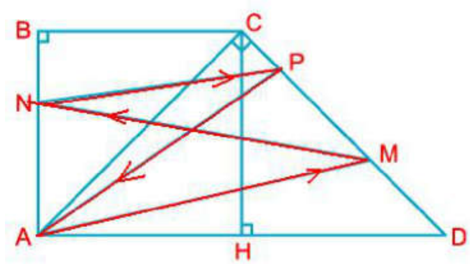
Ta chứng minh phần 2 bằng phương pháp phản chứng. Giả sử : ∠ MAB + ∠ MBC + ∠ MCD + ∠ MDA = 180^o



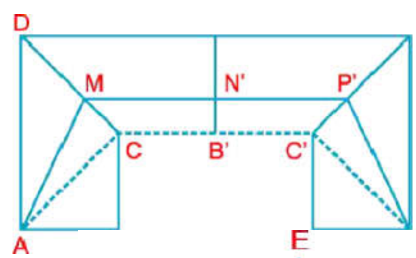
Gọi O là tâm của hình vuông. Vì M không thuộc T nên M phải nằm trong (không nằm trên cạnh) một trong tám tam giác OAH, OAE, OBE, OBK, OCK, OCF, ODF, ODH. Không mất tính tổng quát, giả sử M nằm trong tam giác OAH. Lấy N đối xứng với M qua HK. Đặt P =là giao điểm của MN và BD. Lấy Q là điểm đối xứng của D qua MN (Q thuộc DC).

Dễ thấy, MNCB là hình thang cân => MNCB nội tiếp. (1)
Theo giả thiết phản chứng, ta có : $\angle$ MAB + $\angle$ MBC + $\angle$ MCD + $\angle$ MDA = 180^o (2)
Do M, N đối xứng với nhau qua HK và HK là trục đối xứng của hình vuông ABCD nên ta có : $\angle$ MAB = $\angle$ NDC ; $\angle$ MBC = $\angle$ NCB. (3)
Từ (2), (3) => : $\angle$ NDC + $\angle$ NCB + $\angle$ MCD + $\angle$ MDA = 180^o
=> ($\angle$ NCB + $\angle$ MCD) + ($\angle$ NDC + $\angle$ MDA) = 180^o
=> 90^o + $\angle$ MCN + 90^o - $\angle$ MDN = 180^o => $\angle$ MCN = MDN.
Mặt khác, vì D, Q đối xứng với nhau qua MN nên ta có : $\angle$ MDN = $\angle$ MQN.
Vậy : $\angle$ MCN = $\angle$ MQN => MNQC nội tiếp. (4)
Từ (1), (4) cùng với chú ý rằng nếu hai đường tròn có ba điểm chung thì trùng nhau => MNQCB nội tiếp. (5)
Dễ thấy, tam giác PDQ vuông cân tại P => $\angle$ BPQ = 90^o
Mặt khác ABCD là hình vuông nên $\angle$ BCQ = 90^o. Vậy PQCB nội tiếp. (6)
Từ (5), (6) => : ba điểm thẳng hàng M, N, P cùng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác QCB, mâu thuẫn ! Vậy : Khi M không thuộc T thì : $\angle$ MAB + $\angle$ MBC + $\angle$ MCD + $\angle$ MDA không bằng 180^o
Kết luận :
Tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện đề bài là hình T gồm các đoạn AC, BD, HK, EF.
✪Bài 13: Cho hình thang vuông ABCD có AD // BC, AB vuông góc với AD, AD = 4 cm, AB = BC = 2 cm. Hãy tìm một con đường ngắn nhất đi từ đỉnh A tới một điểm M trên cạnh DC, rồi tới điểm N trên cạnh AB, quay lại một điểm P trên cạnh DC và trở về A.

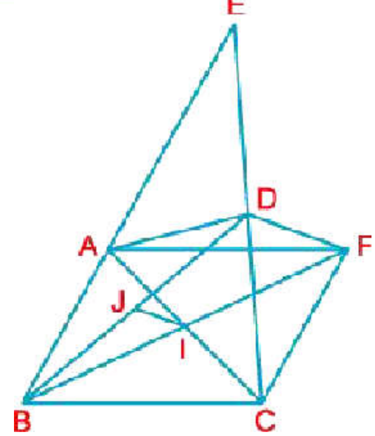
Lời giải : Bài toán đưa về tìm giá trị nhỏ của tổng T = AM + MN + NP + PA.
Ta cần kết quả sau.



Bổ đề : Trong một hình thang vuông, độ dài đoạn thẳng nối hai điểm nằm trên hai cạnh bên không nhỏ hơn độ dài đáy nhỏ (các bạn tự chứng minh bổ đề này).
Áp dụng bổ đề, ta có : MN ≥ BC ; NP ≥ BC => MN + NP ≥ 2BC (1).
Dựng CH cuông góc với AD. Nhận thấy tứ giác ABCH là hình vuông, => : CH = AH = AB = BC = 2 cm => DH = 2 cm.
Ta có CH = AH = HD = 2 cm => ΔCAD vuông cân tại C.
Vì P, M thuộc CD => PA ≥ AC ; AM ≥ AC => AM + PA ≥ 2AC (2).
Từ (1), (2) => T ≥ 2(AC + BC) = $4(\sqrt{2}+1)$ cm; đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P, M, C trùng nhau và N trùng với B.
Vậy con đường ngắn nhất thỏa mãn điều kiện đề bài dài $4(\sqrt{2}+1)$ cm chính là con đường : A đến C đến B đến C đến A.
Nhận xét :
1) Kết quả bài toán có thể đoán nhận được qua hình sau (“lật” liên tiếp ba lần hình thang ABCD)

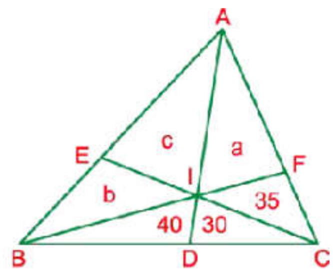


✪Bài 14: Cho tứ giác ABCD. I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD.
Chứng minh rằng : AC + BD + 2IJ < AB + BC + CD + DA.
Lời giải : Trước hết, xin phát biểu, không chứng minh một nhận xét đơn giản :
“Trong một tứ giác, tổng các độ dài hai đường chéo lớn hơn tổng các độ dài hai cạnh đối và nhỏ hơn chu vi.” Trở lại bài toán, có hai trường hợp xảy ra :
Trường hợp 1 : ABCD là hình bình hành.
Vì ABCD là hình bình hành nên I trùng J. Theo nhận xét trên, AC + BD + 2IJ = AC + BD < AB + BC + CD + DA.
Trường hợp 2 : ABCD không là hình bình hành. Vì ABCD không là hình bình hành nên tồn tại một cặp cạnh đối không song song. Không mất tính tổng quát,



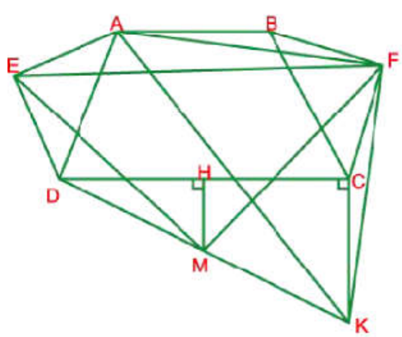
giả sử AB và CD không song song. đặt E là giao điểm của AB va CD. Không mất tính tổng quát, giả sử E thuộc tia đối của các tia AB, DC.
Ta có : $(\angle DAB + \angle ABC)+(\angle BCD+\angle CDA)=360^o \Rightarrow \angle DAB + \angle ABC \geq 180^o$
hoặc $\angle BCD + \angle CDA \geq 180^o$
Không mất tính tổng quát, giả sử : $\angle DAB + \angle ABC \geq 180^o$ (1)
Dựng hình bình hành ABCF. Từ (1), ta thấy : tia AF nằm trong (2).
Mặt khác, trong tam giác EBC, ta có : $\angle EBC + \angle ECB \leq 180^o$
=> ị tia CD nằm trong Từ (2) và (3) => tứ giác ACFD lồi. Theo nhận xét trên, ta có : AC + DF < AF + CD. Chú ý rằng DF = 2IJ, AF = BC, ta có : AC + 2IJ < BC + CD (4) Trong tam giác ABD, ta có : BD < AB + DA (5) Từ (4) và (5) => : AC + BD + 2IJ < AB + BC + CD + DA.

✪ Bài 15: Tìm các diện tích a, b, c trong hình sau (đơn vị cm^2)

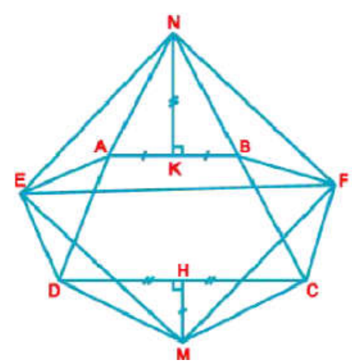


Lời giải :
Từ $S_{IAB}/S_{IAF} = S_{IBC}/S_{IFC} = (IB/IF) \Rightarrow (b + c)/a = (30 + 40)/35$ hay $b + c = 2a$ (1)
Mặt khác : $S_{IAB}/S_{IDB} = S_{IAC}/S_{IDC}$ (IA/ID) => $(b + c)/40 = (a + 35)/40$ hay $6a = 4(a + 35)$ (theo (1) => a = 70, từ đó b + c = 140 (2)
Lại vì : $S_{IBC}/S_{IBE} = S_{ICA}/S_{IEA}$ (IC/IE) nên $(30 + 40)/b = (a + 35)/c$ (3)
Từ (2), (3) ta nhận được b = 56, c = 84. Do đó các diện tích a, b, c lần lượt là 70 cm^2, 56 cm^2, 84 cm^2.

✪ Bài 16: Cho hình thang ABCD có AB song song và bằng một nửa CD. H là trung điểm của CD. Điểm M nằm ngoài hình thang sao cho MH vuông góc và bằng một phần tư CD.
Bên ngoài hình thang, ta dựng các tam giác ADE, BCF vuông cân tại E, F. Chứng minh rằng tam giác MEF vuông cân tại M.
Lời giải :
Cách 1: Trước hết, ta nhắc lại một bổ đề quen thuộc.
Bổ đề (*) : Cho tam giác ABC. Về phía ngoài của tam giác, ta dựng các tam giác ABE, ACF vuông cân tại E, F. M là trung điểm của AB. Khi đó, tam giác MEF vuông cân.
Trở lại bài toán.
Trên tia đối của tia MD, lấy điểm K sao cho : MK = MD *(hình 1)*. Dễ thấy : KC vuông góc với DC (1) và CK = 2MH (2)
dd>Từ (1) => : $\angle KCF = 360^o - \angle KCD - \angle DCB - \angle BCF = 360^o - 90^o -(180^o - \angle CBA) - 45^o$
$= 45^o + \angle CBA = \angle FBC + \angle CBA = \angle ABF$; Vậy: $\angle KCF = \angle ABF$



Hình 1

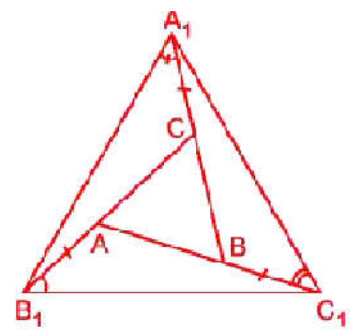


Hình 2

Từ (2) => : KC = 1/2 CD = AB (4)
Từ (3), (4) và CF = BF (do tam giácBCF vuông cân tại F) ta có : Δ KCF = Δ ABF (c.g.c)
=> FK = FA ; $\angle CFK = \angle AFB$

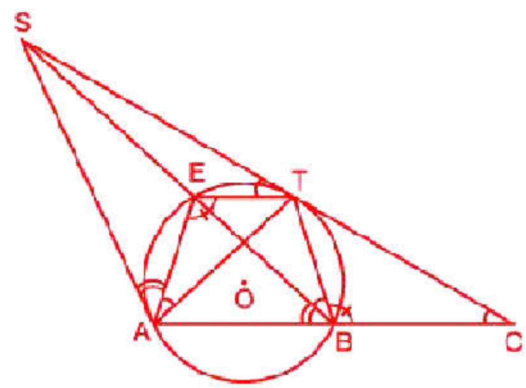
=> ∠ KFA = ∠ CFB + ∠ CFK - ∠ BFA = ∠ CFB = 90^0
=> Δ AKF vuông cân tại F.
áp dụng bổ đề (*) cho tam giác ADK và các tam giác ADE, AKF vuông cân tại E, F ta có : Δ MEF vuông cân tại M.
Cách 2 : Gọi K là trung điểm của AB. Lấy điểm N nằm ngoài hình thang ABCD sao cho NK = AB ; NK vuông góc với AB (hình 2).
Dễ thấy : tam giác MHC = tam giác BKN => MC = NB ; mặt khác, AB // CD và tam giác BCF vuông cân tại F nên Δ FMC = Δ FNB (c.g.c) => Δ MFN vuông cân tại F (bạn đọc tự chứng minh).
Tương tự như vậy, Δ MEN vuông cân tại E. => MENF là hình vuông => tam giác MEF vuông cân tại M.

✪ Bài 17: Cho ΔABC. Trên các tia đối của các tia CB, AC, BA lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $AB_1 = BC_1 = CA_1$. Chứng minh rằng nếu $\Delta A_1B_1C_1$ đều thì ΔABC cũng đều.
Lời giải :
Giả sử $\Delta A_1B_1C_1$ đều. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết :
$\widehat{CA_1B_1} \ge \widehat{AB_1C_1} \ge \widehat{BC_1A_1}$ (*)
Khi đó : $CB_1 \ge AC_1 \ge BA_1$ hay CA ≥ AB ≥ BC (do $AB_1 = BC_1 = CA_1$), suy ra
$\widehat{ABC} \ge \widehat{BCA} \ge \widehat{CAB}$ (1)
Mặt khác, từ (*) suy ra : (do $\Delta A_1B_1C_1$ đều). Nhưng
$$\widehat{ABC} = \widehat{BC_1A_1} + \widehat{C_1A_1B};$$
$\widehat{CAB} = \widehat{AB_1C_1} + \widehat{B_1C_1A} \Rightarrow \widehat{ABC} \le \widehat{CAB}$ (2).
Từ (1), (2) suy ra ΔABC đều (đpcm).

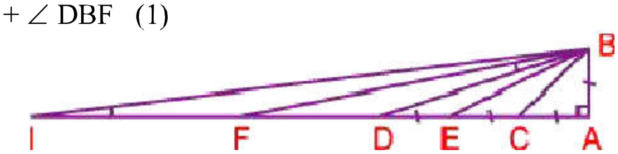


✪Bài 18: Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, AB = BC. Một đường tròn (O) đi qua A, B. Các tiếp tuyến với (O) kẻ từ A, C cắt nhau tại S. T là tiếp điểm của SC và (O). SB cắt (O) tại E (E khác B). Chứng minh rằng : ET // AB.

Lời giải :
Vì SA, ST tiếp xúc với (O) nên ta có :
∠ STE = ∠ SBT ; ∠ SAE = ∠ SBA
=> ΔSTE đồng dạng với ΔSBT ; ΔSAE đồng dạng với ΔABA
$\Rightarrow \frac{TE}{ST} = \frac{BT}{SB}$; $\frac{AE}{SA} = \frac{BA}{SB}$
$\Rightarrow \frac{TE}{AE} = \frac{BT}{BA}$ (vì ST = SA)
$\Rightarrow \frac{TE}{AE} = \frac{TB}{CB}$ (vì BA = CB) (1)
Mặt khác, vì tứ giác AETB nội tiếp nên : ∠TEA = ∠ TBC (2)
Từ (1), (2) ta có : ΔTEA đồng dạng với ΔTBC => ∠ EAT = ∠ BCT.
Từ đó, với chú ý rằng : ∠ EAT = ∠ ETS, ta có : ∠ BCT = ∠ ETS
=> ET // AB (hai góc đồng vị bằng nhau).



✪ Bài 19: Cho tam giác ABC vuông cân ∠ A = 90^o, AB = AC = a. Trên tia đối của tia CA lần lượt lấy các điểm E, F, I sao cho : AE = 2a ; AF = 5a ; AI = 8a.
Tính tổng : ∠ BEA + ∠ BFA = ∠ BIA.
Lời giải :
Trên tia đối của tia EC, lấy điểm D sao cho ED = a.
Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có : ∠ADB = ∠ DFB + ∠ DBF (1)
Xét hai tam giác DIB và DBF,
ta thấy chúng có chung góc ∠ BDI ;
mặt khác, theo định lí Py-ta-go : $BD^2 = BA^2 + AD^2 = 10a^2 = 2a.5a$ = DF.DI => DI/DB = DB/DF, do đó hai tam giác DIB và DBF đồng dạng. Suy ra : ∠ DIB = ∠ DBF (2)
Từ (1) và (2) => ∠ BDA = ∠ BIA + ∠ BFA (3)

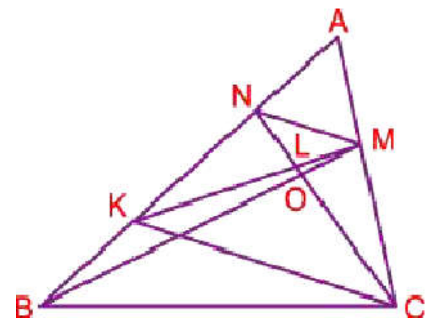


Xét tương tự như trên, ta cũng có hai tam giác BCE và DCB đồng dạng

=> ∠ BEC = ∠ DBC

=> ∠ DBA + ∠ BEA = ∠⊔ BDA + ∠ DBC = ∠ BCA = 45^o (4)

Từ (3) và (4) => ∠ BEA + ∠BFA + ∠ BIA = 45^o.



✪ Bài 20: Cho tam giác ABC có AB > AC. Trên các cạnh AB, AC lấy các điểm N, M tương ứng, sao cho AN = AM. Gọi O là giao điểm của BM, CN. Chứng minh rằng : OB > OC.

Lời giải :

Vì AB > AC > AM = AN nên tồn tại điểm K thuộc đoạn BN sao cho : AK = AC.

Gọi L là giao điểm của KM và CN. Vì K thuộc đoạn BN nên L thuộc đoạn ON

=> ⊔ OMN > ⊔LMN.

Mặt khác, dễ thấy tam giác LMN cân tại L => ⊔ LMN = ⊔ LNM.

Vậy : ∠ OMN > ∠ ONM => ON > OM (1).

ΔAKM = ΔACN (c.g.c) => KM = CN (2).

Vì AK = AC nên tam giác AKC cân tại A

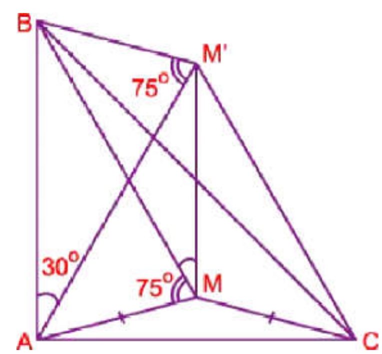
=> ∠ AKC < 90^o => ∠ BKM > 90^o

=> ∠ BKM > ∠ KMB => BM > KM (3).

Từ (2) và (3) suy ra : BM > CN (4)

Từ (1) và (4) suy ra : BM - OM > CN - ON => OB > OC. (đpcm)

✪Bài 21: Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trong ∠ BAC lấy điểm M sao cho MA = MC và ∠ AMB = 75^o. Tính ∠ AMC.



Lời giải : Lấy điểm M’ trong sao cho ΔM’AC đều.

Khi đó do

AB = AM’ (= AC) và ∠ BAM’ = 30^o (=∠ BAC - ∠ M’AC)

=> ∠ AM’B = 75^o = ∠ AMB

=> với M khác M’ thì tứ giác AMM’B nội tiếp đường tròn

=> ∠ BMM’ = ∠ BAM’ = 30^o (cùng chắn cung BM’)

=> ∠ AMM’ = 75^o + 30^o = 105^o.

Mặt khác ΔAMM’ = ΔCMM’ (c.c.c)

=> ∠ CMM’ =∠AMM’ = 105^o

=> ∠AMC = 360^o - 105^o x 2 = 150^o.

Nếu M ở vị trí của M’ thì ⊔ AMC = 60^o.

Theo giả thiết, M chính là giao điểm của đường thẳng trung trực của đoạn AC và cung chứa góc 75^o vẽ trên đoạn AB nên chỉ xảy ra hai trường hợp như trên.

Kết luận :

- Nếu M ở trong ΔABC thì ⊔ AMC = 150^o.
- Nếu M ở ngoài ΔABC thì ⊔ AMC = 60^o.

✪ Bài 22: Cho hình thang ABCD (AB // CD). O là giao điểm của AC và BD. M là trung điểm của CD. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOD, BOC cắt nhau tại K khác O. Chứng minh rằng : ⊔ KOC = ⊔ MOD.

Lời giải :

Trên tia đối của tia MO, lấy điểm I sao cho MI = MO.

Dễ thấy ODIC là hình bình hành, DI // OC => ⊔ IOC = ⊔ OID (1).

Mặt khác ta thấy :

$$\Rightarrow \frac{CA}{DB} = \frac{OC}{OD}.$$

+) AB // CD

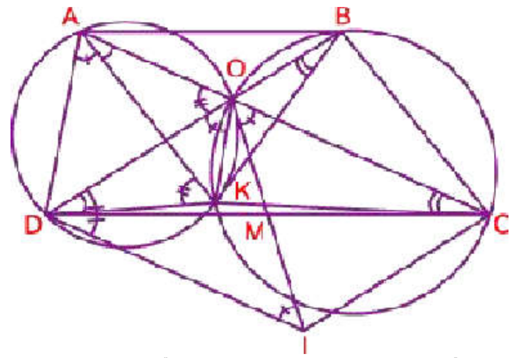
+) AOKD ; BOKC là các tứ giác nội tiếp nên ∠ OAK = ∠ ODK ; ∠ OCK = ∠OBK

$\Delta KAC \backsim \Delta KBD \Rightarrow \dfrac{KA}{KD} = \dfrac{CA}{DB}$.

+) ODIC là hình bình hành nên OC = DI.

Suy ra $\dfrac{KA}{KD} = \dfrac{DI}{DO}$.

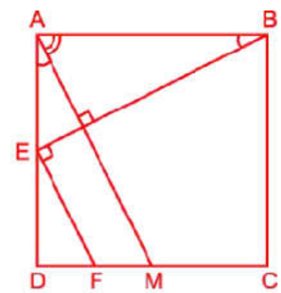
Chú ý rằng ∠ AKD = ∠□ AOD (vì AOKD nội tiếp) và ∠AOD = ∠ IDO (vì AO // DI)suy ra ∠ AKD = ∠ IDO.



$Vậy\ \Delta AKD \backsim \Delta IDO$=> □ OID = □ DAK => □ OID = □ DOK (vì AOKD nội tiếp) (2).
Từ (1) và (2) suy ra : □ IOC = □ DOK => □ KOC = □ MOD (đpcm).

✪ Bài 23: Cho hình vuông ABCD. Gọi E là trung điểm của AD. Qua E vẽ đường thẳng vuông góc với BE, cắt CD tại F. Tính tỉ số EF/EB

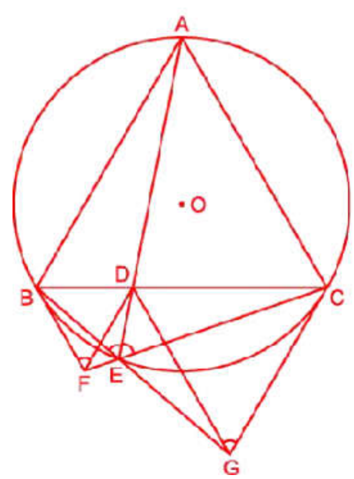
Lời giải
Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BE, cắt CD tại M. Ta thấy : □ ABE = □ DAM (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc).



Mặt khác, vì ABCD là hình vuông nên AB = AD => Δ ABE = Δ DAM
=> BE = AM.
Lại có EF và AM cùng vuông góc với BE nên EF // AM ;
E là trung điểm của AD nên EF là đường trung bình trong ΔDAM. Suy ra
$EF = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{1}{2}BE$ hay $\dfrac{EF}{BE} = \dfrac{1}{2}$.

✪ Bài 24: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. D là điểm di động trên cạnh BC. AD cắt (O) tại E (E khác A). Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác EBD, ECD. Xác định vị trí điểm D để $R_1.R_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải : Ta có nhận xét rằng, nếu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam giác đều cạnh a thì
$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ (*). Trở lại bài toán.
Dựng hai tam giác đều BDF và CDG về phía ngoài tam giác ABC,
khi đó □ BFD = □ BED = 60 ^{o}
suy ra BDEF và CDEG đều là các tứ giác nội tiếp hay R_1, R_2 lần lượt là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều BDF và CDG.
Theo (*) ta có :
$R_1 = \dfrac{BD\sqrt{3}}{3}; R_2 = \dfrac{CD\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R_1.R_2 = \dfrac{BD.CD}{3}$.
Mặt khác $(BD + CD)^2 \geq 4.BD.CD$ suy ra
$BD.CD \leq \dfrac{(BD+CD)^2}{4} = \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow R_1R_2 \leq \dfrac{R^2}{4}$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi BD = CD,
nghĩa là $R_1.R_2$ đạt giá trị lớn nhất bằng $R^2/4$ khi D là trung điểm của BC.



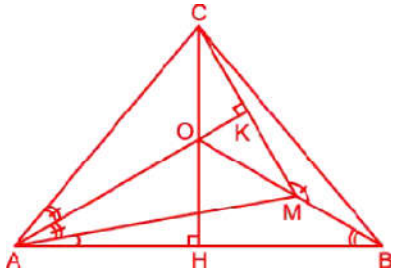
✪ Bài 25: Cho tam giác cân ABC (AC = BC) với □ ACB = 80^o. Trong tam giác ABC có điểm M sao cho □ MAB = 10^o và □ MBA = 30^o. Tính □ BMC.

Lời giải :

Cách 1 : Dựng CH □ AB (H thuộc AB), CH cắt MB tại O, AO cắt CM tại K (*hình 1*).

Ta nhận thấy &8710;OAB cân tại O nên : □ OAB = □ OBA = 30^o => □ OAM = 20^o ; □ OAC = □ BAC - □ OAB = $(180^o - 80^o) : 2 - 30^o = 20^o$

=> □ OAC = □ OAM = 20^o (1)



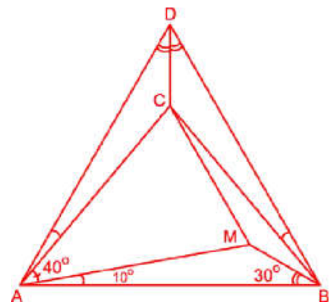
Mặt khác : □ AOC = 180^o - □ AOH = $180^o - 60^o = 120^o$; □ AOB = $180^o - 2.30^o = 120^o$ => □ AOC = □ AOB = 120^o (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔAOC = ΔAOM (g.c.g) => AC = AM

=> ΔACM cân tại A, có AK là phân giác của □ CAM => AK □ CM.

Cách 2 :

Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB và chứa điểm C, dựng tam giác đều ABD (*hình 2*).



Ta có ΔDAC = ΔDBC (c.c.c), suy ra :

□ ADC = □ BDC = 30^o = □ ABM ; □ DAC = $60^o - (180^o - 80^o) : 2 = 10^o$ = □ ABM.

=> ΔDAC = ΔBAM (g.c.g) => AC = AM

=> ΔACM cân tại A

=> □ AMC = $(180^o - 40^o) : 2 = 70^o$;

mặt khác □ AMB = $180^o - 30^o - 10^o = 140^o$ => □ BMC = $360^o - 140^o - 70^o = 150^o$.

✪ Bài 26: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. AC cắt BD tại I. (O_1), (O_2) theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ABI, CDI.

Một đường thẳng bất kì đi qua I cắt (O) tại X ; Y và cắt (O_1) ; (O_2) theo thứ tự tại Z ; T (Z và T khác I).

Chứng minh rằng XZ = YT.

Lời giải :

Có hai trường hợp xảy ra :

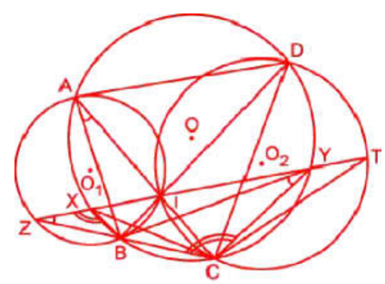
- Đường thẳng chứa X, Y, Z, T cắt các đoạn thẳng AB, CD (*hình 1*).
- Đường thẳng chứa X, Y, Z, T không cắt các đoạn thẳng AB, CD (*hình 2*).

Phép chứng minh dưới đây có hiệu lực cho cả hai trường hợp.

Ta có ∠ XZB = ∠ IAB = ∠ CYB ; ∠ ZXB = ∠ YCB

=> ΔZXB đồng dạng với ΔYCB

=> XZ/XB = CY/CB => XZ = BX.CY/BC (1)

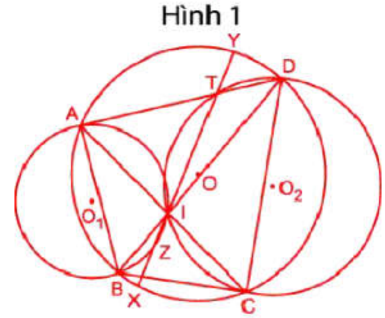


Hình 1

Tương tự ta có ΔTYC đồng dạng với ΔXBC

=> YT/YC = BX/BC => YT = BX.CY/BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra XZ = YT.



Hình 2

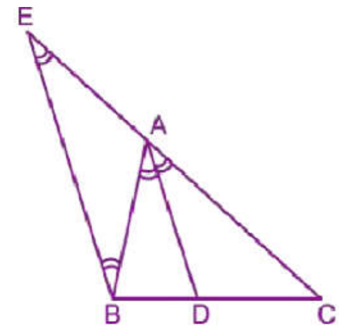
✪ Bài 27: Cho tam giác ABC có BC = a, CA = b, AB = c và a + b + c = 9 ; x, y, z lần lượt là độ dài các phân giác trong của các góc A, B, C.

Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>1.$$

Lời giải : Gọi AD là phân giác của Dựng qua B đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AC tại E.

Khi đó : ∠CAD = ∠AEB (hai góc đồng vị) ;
∠ DAB = ∠ ABE (hai góc so le trong)
mà ∠ DAB = ∠ CAD nên ∠ ABE = ∠ AEB
=> Δ ABE cân tại A => AB = AE = c.
Mặt khác : AD/BE = CA/CE hay x/BE = b/(b + c)
suy ra BE = x.(b+c)/b
Trong tam giác ABE có BE < AB + AE hay BE < 2c (2).
Từ (1), (2) ta có x < 2ab/(b+c)<=> 1/x > 1/2 (1/b + 1/c)
Tương tự 1/y > 1/2 (1/a + 1/c) ; 1/z 1/2 (1/a + 1/b)
Do đó 1/x + 1/y + 1/z > 1/a + 1/b +1/c
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương ta có :



$a+b+c \geq 3.\sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$

$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9,$

Kết hợp với giả thiết a + b + c = 9 ta được 1/a + 1/b + 1/c ≥ 1
Từ (3), (4) suy ra 1/x + 1/y = 1/z > 1 , điều phải chứng minh.

✪ Bài 28: Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng :

$\frac{HB.HC}{AB.AC}+\frac{HC.HA}{BC.BA}+\frac{HA.HB}{CA.CB}=1.$

Lời giải
Gọi A', B', C' lần lượt là chân các đường cao hạ từ A, B, C của Δ ABC.
Vì Δ ABC nhọn nên H nằm trong tam giác. Vậy :
S(HBC) + S(HCA) + S(HAB) = S(ABC).
Mặt khác, dễ thấy Δ CHB' ~ Δ CAC' (g.g)

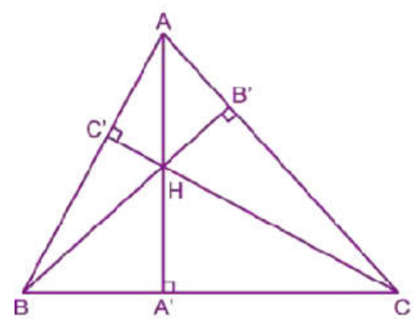
$\Rightarrow \frac{CH}{CA}=\frac{CB'}{CC'} \Rightarrow \frac{HB.HC}{AB.AC}=\frac{\frac{1}{2}HB.CB'}{\frac{1}{2}AB.CC'}=\frac{S(HAB)}{S(ABC)};$

T-ơn g tự :

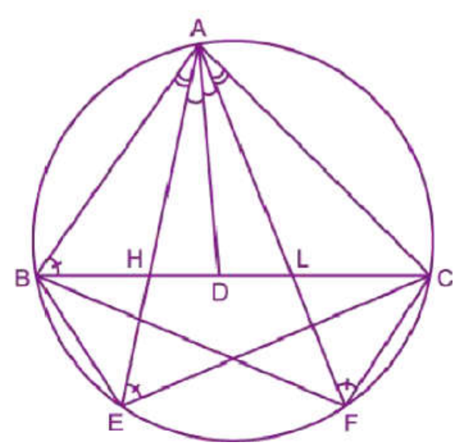
$\frac{HC.HA}{BC.BA}=\frac{S(HCA)}{S(ABC)};\frac{HA.HB}{CA.CB}=\frac{S(HAB)}{S(ABC)}.$

Vậy : $\frac{HB.HC}{AB.AC}+\frac{HC.HA}{BC.BA}+\frac{HA.HB}{CA.CB}=$

$=\frac{S(HAB)+S(HCA)+S(HAB)}{S(ABC)}=1.$



✪ Bài 29: Cho tam giác ABC. H là điểm bất kì trên cạnh BC. AD là đường phân giác trong của ∠BAC; Dựng AL đối xứng với AH qua AD (L thuộc BC).
Chứng minh rằng : BH.CH/(BL.CL) = HD^2/LD^2.
Lời giải : Giả sử các đường thẳng AH, AL cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại E và F.
Từ giả thiết => ⊔ BAD = ⊔ CAD ; ⊔ HAD = ⊔ LAD
=> ⊔ BAE = ⊔ CAF ; ⊔ BAF = ⊔ CAE
=> BE = CF ; BF = CE.
Dễ dàng nhận ra :
ΔABL đồng dạng với ΔCFL nên
CL/AL = CF/AB = BE/AB (1);
ΔBHE đồng dạng với ΔAHC nên AH/BH = AC/BE (2).
Từ (1) và (2) suy ra LC.AH/(AL.BH) = AC/AB (3).
Theo tính chất đường phân giác, trong tam giác AHL có
HD/LD = AH/AL (4)

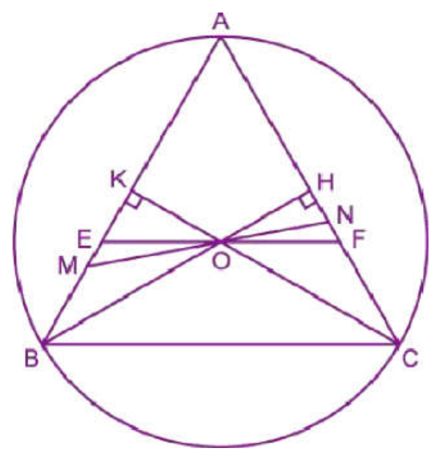


Từ (3) và (4) suy ra LC.HD/(BH.LD) = AC/AB (5)

Tương tự, ΔBLF đồng dạng với ΔALC và ΔCEH đồng dạng với ΔABH
dẫn đến HD.BL/(LD.LC) = AB/AC (6).
Nhân theo từng vế các hệ thức (5) và (6) ta có :
LC.HD^2.BL/(BH.LD^2.CH) = 1 => BH.CH/(BL.CL0 = HD^2/LD^2.

✪ Bài 30: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O có bán kính bằng 1. Một đường thẳng đi qua O cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Kí hiệu SAMN là diện tích tam giác AMN.
Chứng minh rằng : $\frac{\sqrt{3}}{3} \le S_{AMN} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải : Trước hết xin phát biểu (không chứng minh) một nhận xét quen thuộc : "Nếu ΔABC và ΔA'B'C' có ⊔ BAC = ⊔ B'A'C', khi đó S(ABC)/S(A'B'C' = AB.AC/(A'B'.A'C')"
Trở lại việc giải bài toán. Gọi H là giao của BO và AC ; K là giao của CO và AB. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC, đường thẳng này theo thứ tự cắt AB, AC tại E, F.
Có hai trường hợp xảy ra.
Trường hợp 1 : M thuộc đoạn BE ; N thuộc đoạn FH.
+ Nếu M trùng E thì N trùng F, ta có :



$S(AMN) = S(AEF) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
+ Nếu M trùng B thì N trùng H, ta có :
$$S(AMN) = S(ABH) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$
+ Nếu M khác E và M khác B thì :
MO > EO = FO > NO (vì ⊔ MEO > 90^o ; ⊔ FNO > 90^o)

a) $\frac{S(OEM)}{S(OFN)} = \frac{OE.OM}{OF.ON} = \frac{OM}{ON} > 1 \Rightarrow S(OEM) > S(OFN)$
$\Rightarrow S(OEM) + S(AEON) > S(OFN) + S(AEON)$
$\Rightarrow S(AMN) > S(AEF) \Rightarrow S(AMN) > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) $\frac{S(OBM)}{S(OHN)} = \frac{OB.OM}{OH.ON} = 2.\frac{OM}{ON} > 2.1 > 1$
$\Rightarrow S(OBM) > S(OHN)$
$\Rightarrow S(OBM) + S(AMOH) > S(OHN) + S(AMOH)$
$\Rightarrow S(ABH) > S(AMN) \Rightarrow S(AMN) < \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

$S(AMN) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$ M trùng E và N trùng F ;
$S(AMN) = \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow$ M trùng B và N trùng H.

Trường hợp 2 : M thuộc đoạn EK ; N thuộc đoạn CF. Tương tự *trường hợp 1*, ta có :

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq S(AMN) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$S(AMN) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$ M trùng E và N trùng F ;

$S(AMN) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow$ M trùng K và N trùng C.

Kết hợp cả hai tr-ờng hợp trên ta có :

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq S(AMN) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

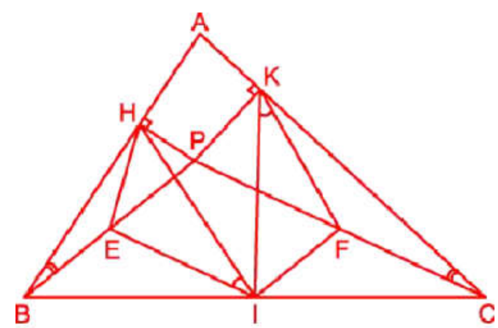
$S(AMN) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$ M trùng E và N trùng F ;

$S(AMN) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{M trùng B và N trùng H.}\\ \text{M trùng K và N trùng C.}\end{array}\right.$

✪ Bài 31:

Cho tam giác ABC (AB < AC) và P là điểm nằm trong tam giác sao cho ∠ PBA = ∠ PBC Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ P xuống AB và AC ; I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng : ∠ HIB < ∠ KIC

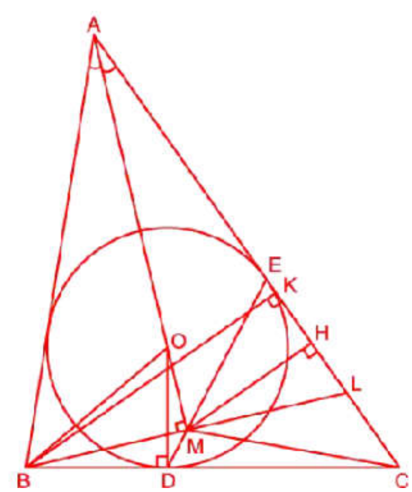
Lời giải : Gọi E, F lần lượt là trung điểm của PB và PC.
Xét các tam giác vuông HBP và KPC, ta thấy
∠ HEP = 2∠ PBH ; ∠ KFP = 2 ∠ PCK
mà ∠ PAB = ∠ PCA (gt) ⇒∠ HEP = ∠ KFP (1).
Mặt khác do tứ giác PEIF là hình bình hành,
suy ra ∠ PEI = ∠ PFI (2).
Từ (1) và (2) ta nhận được ∠ HEI = ∠ KFI.
Lại có EI = KF (=1/2 PC) ; IF = HE (=1/2 PB),
do đó Δ HEI = Δ FIK (c.g.c) => ∠HIE = ∠ IKF (3).



Vì AB < AC nên ∠PBC > ∠ ACB ,
kết hợp với ∠PBA = ∠ PCA => ∠ PBC < ∠ PCB, từ đó PB < PC dẫn đến IF < FC suy ra ⇒ ∠ FIC < ∠ FCI hay ∠ FIC < ∠ EIB (4).
Từ (3) và IF < FK ⇒ ∠ KIF < ∠ IKF hay ∠KIF < ∠ HIE (5).
Từ (4) ; (5) suy ra ∠ HIE + ∠ EIB < ∠ KIF + ∠ FIC hay ∠ HIB < ∠ KIC (đpcm).

✪ Bài 32: Cho tam giác ABC không cân, ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của (O) với các cạnh BC, CA, AB. Gọi M là giao điểm của các đường thẳng AO, DE ; N là giao điểm của các đường thẳng BO, EF ; P là giao điểm của các đường thẳng CO, DF. Chứng minh các tam giác NAB, MAC, PBC có cùng diện tích.

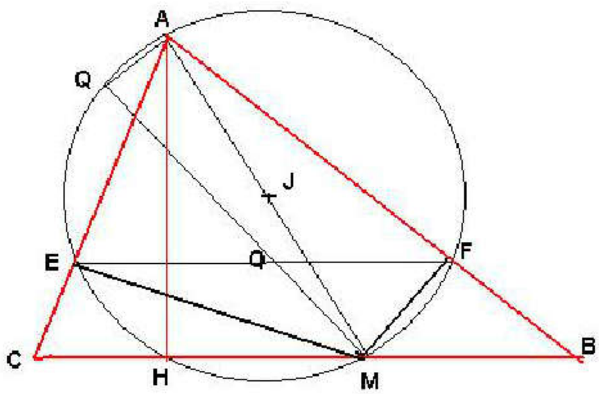
Lời giải :
Gọi A, B, C là số đo các góc của tam giác ABC.
Vì tam giác CDE cân tại C nên :
∠MDC = (180^o - C)/2 = (A + B)/2
Mặt khác, ∠MOB = ∠ OAB + ∠OBC = A/2 + B/2
Vậy : ∠MDC = ∠ MOB
=> Tứ giác MOBD nội tiếp
=> ∠ OMB = ∠ ODB = 90>sup>o (1).
Đặt L = BM ∩ AC.
Từ (1) ta có Δ ABL cân tại A
=> ML = 1/2 BL (2).
Gọi H, K là hình chiếu của M, B xuống AC.
Từ (2) ta có MH = 1/2 BK



=> 1/2 MH.AC = 1/2 x 1/2 BK.AC
=> S(MAC) = 1/2 S(ABC).
Tương tự ta có : S(NAB) = 1/2 S(ABC) ; S(PBC) = 1/2 S(ABC)

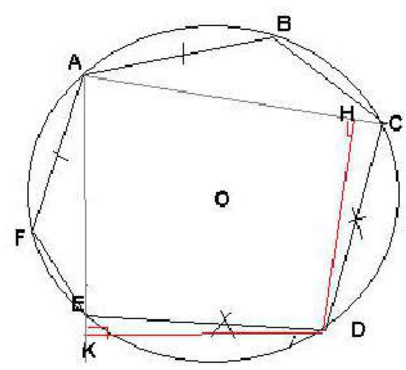
Vậy : Các tam giác NAB, MAC, PBC có cùng diện tích. (đpcm)

✪ Bài 33: Cho tam giác đều ABC có điểm M thuộc BC. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AC ; O là trung điểm của EF ; Q là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng OM. Chứng minh rằng khi M chuyển động trên BC thì Q luôn thuộc một đường tròn cố định.



Lời giải :
Dựng AH ⊥ BC (H Є BC). Nếu M ≡ H thì Q ≡ A. Nếu M ≠ H thì MO cắt AH tại I.
Ta thấy các điểm E, H, F, M, A cùng nằm trên đường tròn đường kính AM, tâm J là trung điểm của AM, suy ra JE = JF = JH, mặt khác ∠HJF = 2∠HAF = 60^o => ΔJHF đều,
∠EJH = 2∠EAH => ΔJEH đều. Từ đó JE = JF = HF = HE hay tứ giác JEHF là hình thoi => OH = OJ và O, H, J thẳng hàng.
Gọi N là điểm đối xứng của M qua O, suy ra OJ // NA và OJ = 1/2 NA => OH // NA và OH = 1/2 NA => ΔANI ~ ΔHOI => AI/HI = AN/OH = 1/2 => I là trọng tâm ΔABC (I là điểm cố định). Lại vì ∠AQI = 90^o nên khi M di động trên BC thì Q luôn nằm trên đường tròn đường kính AI cố định (lưu ý Q ≠ I).

✪ Bài 34: Cho lục giác nội tiếp đường tròn ABCDEF có AB = AF ; DC = DE.
Chứng minh rằng : AD > 1/2 (BC + EF)
Lời giải : Gọi H, K là hình chiếu của D trên AC, AE.
Vì tứ giác ACDE nội tiếp nên ⊔HCD - ⊔KED mặt khác theo giả thiết DC = DE nên ΔHCD = ΔKED suy ra HC = KE
=> AH + AK = AC + AE => 2AH = AC + AE
=> 2AD > AC + AE (1)
Tương tự ta có : 2AD > DB + DF (2)
Từ (1), (2) suy ra :
4AD > (AC + DB) + (AE + DF) (3)
Đặt M = AC ∩ DB ; N = AE ∩ DF. *Ta có :*
Từ (3), (4) suy ra : 4AD > 2AD + BC + EF
=> AD >1/2 (BE + EF) (đpcm)



PHH sưu tầm và chỉnh lí bổ sung hình minh họa 2 -5 – 20`13
Nguồn "Toán tuoi tho"