Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung , 18-03-2016 - 21:13

Dinh Xuan Hung Đã gửi 18-03-2016 - 21:13

Topic này dùng để "Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016"

Yêu cầu : Không đăng quá nhiều bài một lúc tránh loãng topic.Tuân thủ đúng quy định của VMF

Bài nào làm được sẽ được bôi đỏ trong Topic

$\boxed{1}$ (Đề thi thử môn Toán lần 1 chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2016)

Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a+1)(b+1)bc} + \frac{b^2}{(b+1)(c+1)ca} + \frac{c^2 - a^2b - ab - a - 1}{(c+1)(a+1)ab}$$

Quote

> Dinh Xuan Hung : Ai biết về LaTeX thì có thể liên hệ với mình để cùng tổng hợp Topic này để nó sẽ là tài liệu phục vụ tốt cho ôn thi THPQ 2017

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 23-05-2016 - 17:46

ineX Đã gửi 18-03-2016 - 21:26

Bất đẳng thức thi Đại Học thường có dạng khá không đẹp mắt, nhưng cũng có một số bài đối xứng!

Sau đây là một trong số đó:

Bài 2: (Đề thi thử môn Toán trường THPT Chuyên Bắc Giang)

Cho $a,b,c>0$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+2\sqrt{\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 18-03-2016 - 21:47

Dinh Xuan Hung Đã gửi 18-03-2016 - 21:47

> *Vào lúc 18 Tháng 3 2016 - 21:26, ineX đã nói:*
>
> Bất đẳng thức thi Đại Học thường có dạng khá không đẹp mắt, nhưng cũng có một số bài đối xứng!
>
> Sau đây là một trong số đó:
>
> **Bài 2:** (Đề thi thử môn Toán trường THPT Chuyên Bắc Giang)
>
> Cho $a,b,c>0$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $$P=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}+2\sqrt{\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{ab+bc+ca}}$$

$$P=\sum\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}=\sum\sqrt{\frac{2a^2}{2a(b+c)}}+\sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}$$

$$\geq 2\sqrt{2}.\sum\frac{a}{2a+b+c}+\sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}$$

$$\geq 2\sqrt{2}.\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}+\sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}}+\sqrt{2.\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}-4}$$

Đặt $t=\dfrac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$, ta có: $t\in[3;+\infty)$

$$P=\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{t}}+\sqrt{2t-4}=\frac{t\sqrt{2}}{t-1}+\sqrt{2t-4}$$

Khảo sát hàm số $f(t)=\dfrac{t\sqrt{2}}{t-1}+\sqrt{2t-4}$ trên $[3;+\infty)$, ta có: $f(t)\geq\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

P/s:Bạn ghi rõ năm ra nhé

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 18-03-2016 - 22:03

Dinh Xuan Hung Đã gửi 18-03-2016 - 21:59

$\boxed{3}$ (Đề lần 2-2016- Chuyên Vĩnh phúc)

Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác có chu vi là 1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$T=\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{a+c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$

$\boxed{4}$ (Đề thi thử Đại Học Vinh 2016)

Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $xy+yz+xz=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P=\frac{2x}{2+x^2}+\frac{2y}{2+y^2}+\frac{z^2}{2+z^2}$$

$\boxed{5}$ (Đề Lần 2- 2016-Chuyên BẮC NINH)

Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn : $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$T=2\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}$$

P/s Mong mọi người vào thảo luận để Topic phá triển nhanh

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-03-2016 - 16:49

---

ngocdz9apro Đã gửi 18-03-2016 - 22:28

$\boxed{6}$.Cho a,b,c>0 sao cho $a+b+c\leq \frac{3}{2}$

Tìm Min $P=(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{c})$

$\boxed{7}$.Tìm $a,b,n\in\mathbb{N}$ biết $a+b=2^{2007}$

và $ab=2^n-1$ với a,b lẻ ,b>a>1

$\boxed{8}$.Cho $x,y,z\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2\leq 2010$
Tìm Min A = xy + y(z+1) +z(x-2)

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-03-2016 - 22:45

---

tritanng099 Đã gửi 18-03-2016 - 22:49

Bài 3:

Không mất tính tổng quát: giả sử $a\geq b\geq c\Rightarrow c\leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow a+b\geq a+c\geq b+c$

$\Rightarrow T\geq 3\left(\frac{4}{a+b}-\frac{1}{c}\right)$

$=> T\geq \frac{12}{1-c}-\frac{3}{c}$

Đặt $f(c) = \frac{12}{1-c} - \frac{3}{c}$ với $0 < c \leq \frac{1}{3}$;

Khảo sát hàm số f(c) với $0 < c \leq \frac{1}{3}$ ta có f(c)=> 9;

=> T=>9. Dấu '=' xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. ok

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-03-2016 - 07:33

---

tritanng099 Đã gửi 18-03-2016 - 23:19

Bài 5:

Áp dụng BDT quen thuộc: $\sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{(y+z)^2+(1+1)^2}$.

=> . $\sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{(1-x)^2+(1+1)^2}$.

=> $T = 2\sqrt{x+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq 2\sqrt{x+1} + \sqrt{(1-x)^2+(1+1)^2} = f(x)$

đến đây khảo sát $f(x)$ với x>=0; (f(x) đồng biến trên [0; + vô cùng);

=> min(f(x))=$2 + \sqrt{(5)}$.

dấu = xảy ra khi và chỉ khi x=0; y=z=1/2. ok

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-03-2016 - 16:48
LaTeX

---

quan1234 Đã gửi 19-03-2016 - 00:16

Câu 4 Câu đại học Vinh bị nhầm đề rồi, phải là $\frac{2x}{2+x^2} + \frac{2y}{2+y^2} + \frac{z^2}{2+z^2}$

Ta có $\frac{2x}{2+x^2} + \frac{2y}{2+y^2} = \frac{2}{x+y} \cdot \frac{2+xy}{z^2+2} = \frac{2(2+xy)}{\sqrt{(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2)}} \leq \frac{2}{\sqrt{z^2+2}}$

Vậy

$$VT \leq \frac{2}{\sqrt{z^2+2}} + \frac{z^2}{2+z^2}$$

Đặt $t = \sqrt{z^2 + 2}$, ta sẽ xét hàm $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{t^2 - 2}{t^2} \leq f(2) = \frac{3}{2}$

Dinh Xuan Hung

Đã gửi 19-03-2016 - 17:02

Trong Topic này LaTeX các bạn đang sai khá nhiều . Chú ý các bài sai LaTeX sẽ bị khoá mà không cần thông báo trước

$\boxed{9}$ (Đề thi thử ĐH môn Toán của SG&ĐT Vĩnh Phúc lần 2 năm 2016)

Cho a, b, c dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2}\right) - \sqrt{(ab + bc + ac)^3} - 2\sqrt{3}\sqrt[3]{abc}$$

$\boxed{10}$ (Đề thi thử chuyên HN Amesterdam năm 2016)

Cho a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a - 1} + \frac{b}{2b - 1} + \frac{c}{2c - 1} \geq \frac{18}{3 + ab + bc + ac}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 20-03-2016 - 09:48

Juliel

Đã gửi 19-03-2016 - 22:00

> *Vào lúc 19 Tháng 3 2016 - 17:02, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> $\boxed{9}$ (Đề thi thử ĐH môn Toán của SG&ĐT Vĩnh Phúc lần 2 năm 2016)
>
> Cho a, b, c dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $$P = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2}\right) - \sqrt{(ab + bc + ac)^3} - 2\sqrt{3}\sqrt[3]{abc}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\frac{a}{b^2+c^2} \geq \frac{a}{1-a^2} = \frac{a^2}{a(1-a)(1+a)}$$

Lại có :

$$a(1-a)(1+a) = \frac{1}{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}.(1-x).\left[(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})x\right].\left(\sqrt{3}-1\right)x$$

$$\leq \frac{1}{27(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}.\left[(1-x)+(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})x+(\sqrt{3}-1)x\right]^3 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Suy ra :

$$\frac{a}{b^2+c^2} \geq \frac{a^2}{a(1-a)(1+a)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

Hoàn toàn tương tự với hai phân thức còn lại, ta suy ra :

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Và cũng có :

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \Rightarrow -\sqrt{(ab+bc+ca)^3} \geq -\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow -2\sqrt{3}\sqrt[3]{abc} \geq -2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Do vậy nếu đặt $t=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \in (0,1]$ thì :

$$P \geq \sqrt{3}t^2 - t^3 - 2t = f(t)$$

$$f'(t) = 2\sqrt{3}t - 3t^2 - 2 < 0,\ \forall t \in (0,1)$$

Vậy f nghịch biến trên $(0,1]$. Từ đó :

$$f(t) \geq f(1) = -3+\sqrt{3}$$

Ta có :

$MinP = -3+\sqrt{3}$, đạt được khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Juliel**: 19-03-2016 - 22:08

---

tungteng532000 Đã gửi 19-03-2016 - 22:22

> *Vào lúc 18 Tháng 3 2016 - 21:13, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> Topic này dùng để "Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016"

Yêu cầu : Không đăng quá nhiều bài một lúc tránh loãng topic.Tuân thủ đúng quy định của VMF

Bài nào làm được sẽ được bôi đỏ trong Topic

$\boxed{1}$ (Đề thi thử môn Toán lần 1 chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm 2016)

Cho $a,b,c>0$ và $abc=1$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{(a+1)(b+1)bc}+\frac{b^2}{(b+1)(c+1)ca}-\frac{c^2-a^2b-ab-a-1}{(c+1)(a+1)ab}$$

Bạn ơi đề bài dấu cuối phải là dấu +

$$P=\frac{a^2}{(a+1)(b+1)bc}+\frac{b^2}{(b+1)(c+1)ca}+\frac{c^2-a^2b-ab-a-1}{(c+1)(a+1)ab}$$

Ta có:

$$P=\frac{a^2}{(a+1)(b+1)bc}+\frac{b^2}{(b+1)(c+1)ca}+\frac{c^2-(ab+1)(a+1)}{(c+1)(a+1)ab}=\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}$$

$$+\frac{b^3}{(b+1)(c+1)}+\frac{c^3}{(c+1)(a+1)}-1$$

Áp dụng bđt Holder, ta có:

$$(\sum\frac{a^3}{(a+1)(b+1)})(\sum(a+1)(b+1))(1+1+1)\geq(a+b+c)^3\Rightarrow\sum\frac{a^3}{(a+1)(b+1)}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^3}{3(ab+bc+ca+2(a+b+c)+3)}\geq\frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2+6(a+b+c)+9}$$

Đặt a+b+c=t$\Rightarrow t\geq 3$

$$P\geq\frac{t^3}{t^2+6t+9}-1\geq\frac{-1}{4}\Leftrightarrow(t-3)(4t^2+9t+9)\geq 0$$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-03-2016 - 22:38

Thanks bạn đã góp ý cho mình

---

tungteng532000 Đã gửi 19-03-2016 - 22:40

> *Vào lúc 18 Tháng 3 2016 - 22:28, ngocdz9apro đã nói:*
>
> $\boxed{6}$.Cho a,b,c>0 sao cho $a+b+c\leq\frac{3}{2}$
>
> Tìm Min $P=(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{c})$

Áp dụng bđt Holder, ta có:

$$P=(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a})\geq(3+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}})^3$$

$$\geq(3+\frac{3}{a+b+c}+\frac{3}{a+b+c})^3\geq(3+2+2)^3=343$$

Đẳng thức xảy ra khi a=b=c=$\frac{1}{2}$

Dinh Xuan Hung

Đã gửi 19-03-2016 - 22:44

$\boxed{11}$ (Đề thi thử ĐH lần thứ 16 của Vted)

Cho x, y, z là các số thực thoả mãn : $x^2+y^2+z^2=2$.Tìm GTNN của biểu thức :

$$P=|x+y-z|+|y+z-x|+|z+x-y|$$

$\boxed{12}$ Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $\left(\frac{a+b+c}{2016}\right)^2\leq 4abc$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{b}}{b+\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{ab}}$$

$\boxed{13}$ (Đề thi thử ĐH THPT Nguyễn Khuyến - TPHCM)

Cho ba số thực x, y, z thuộc đoạn $(0; 4)$ và thỏa mãn $x+y+z=6\sqrt{2}$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{16-y^2}}+\frac{1}{\sqrt{16-z^2}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 04-05-2016 - 22:00
Update bài 13

---

tungteng532000

Đã gửi 19-03-2016 - 22:56

> *Vào lúc 19 Tháng 3 2016 - 17:02, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> $\boxed{10}$ (Đề thi thử chuyên HN Amesterdam năm 2016)
>
> Cho a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a-1}+\frac{b}{2b-1}+\frac{c}{2c-1}\geq\frac{18}{3+ab+bc+ac}$$

Từ giả thiết a,b,c
$\geq 1\Rightarrow(a-1)(b-1)+(b-1)(c-1)+(c-1)(a-1)\geq 0\Leftrightarrow ab+bc+ca\geq 2(a+b+c)-3$
$\Rightarrow\frac{18}{3+ab+bc+ca}\leq\frac{9}{a+b+c}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Mặt khác đánh giá đại diện: $\frac{1}{a}\leq\frac{a}{2a-1}\Leftrightarrow 0\leq(a-1)^2$ (đúng)
Bđt đc chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tungteng532000**: 19-03-2016 - 23:01

---

hangdiemdieuhoa1999 Đã gửi 21-03-2016 - 10:21

> *Vào lúc 19 Tháng 3 2016 - 22:44, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> $\boxed{11}$ (Đề thi thử ĐH lần thứ 16 của Vted)
>
> Cho x,y,z là các số thực thoả mãn : $x^2+y^2+z^2=2$.Tìm GTNN của biểu thức :
>
> $$P=|x+y-z|+|y+z-x|+|z+x-y|$$

Mình xin phép chỉ trình bày ý tưởng:

Đặt: $|x+y-z|=a$, $|-x+y+z|=b$, $|x-y+z|=c$

Do đó ta cần tìm GTNN của $P=|a|+|b|+|c|$

Ta lại tính các đại lượng $ab+bc+ca$ và $a^2+b^2+c^2$

khi đó tìm được GTNN của P

BlackSelena Đã gửi 21-03-2016 - 15:36

Mình thì không phải loại giỏi bất đẳng thức nhưng 'đề thi Đại học' mà các bạn cứ Holder ầm ầm như thế này thì....

---

ngocdz9apro Đã gửi 21-03-2016 - 17:33

Vào lúc 19 Tháng 3 2016 - 22:40, tungteng532000 đã nói:

> Áp dụng bđt Holder, ta có:
> $P=(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a})\geq(3+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}})^3$
> $\geq(3+\frac{3}{a+b+c}+\frac{3}{a+b+c})^3\geq(3+2+2)^3=343$
> Đẳng thức xảy ra khi a=b=c=$\frac{1}{2}$

cm bdt hodelr nha

PlanBbyFESN

Đã gửi 21-03-2016 - 18:30

Vào lúc 18 Tháng 3 2016 - 22:28, ngocdz9apro đã nói:

> $\boxed{6}$.Cho a,b,c>0 sao cho $a+b+c\leq\frac{3}{2}$
> Tìm Min $P=(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{c})$

<ins>Giải</ins>: Ta nên có một lời giải thuần túy bằng AM-GM: :)

$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b};\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\frac{1}{c}+\frac{1}{a})\rightarrow(x;y;z)$

$\Rightarrow P=(3+x)(3+y)(3+z)=27+3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)+xyz\geq 27+9\sqrt[3]{(xyz)^2}$
$+27\sqrt[3]{xyz}+xyz$

Mặt khác, ta có:

$xyz=\prod(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq\frac{8}{abc}$
$\frac{3}{2}\geq a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow 0<abc\leq\frac{1}{8}$

$\Rightarrow xyz\geq 64$

$\Rightarrow P\geq 27+9\sqrt[3]{64^2}+27\sqrt[3]{64}+64$
hay $P\geq 343$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{2}$

---

ineX

Đã gửi 21-03-2016 - 18:51

> *Vào lúc 19 Tháng 3 2016 - 22:44, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> $\boxed{13}$ (Đề thi thử ĐH THPT Nguyễn Khuyến - TPHCM)
>
> Cho ba số thực x, y, z thuộc đoạn $(0;4)$ và thỏa mãn $x+y+z=6\sqrt{2}$.Chứng minh rằng:
> $\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{16-y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{16-z^2}}\geq\dfrac{8\sqrt{2}}{4}$

Đề nghị bạn xem lại đề, nếu là $\dfrac{8\sqrt{2}}{4}$ thì sao không rút gọn thành $2\sqrt{2}$

---

huya1k43pbc

Đã gửi 21-03-2016 - 21:16

14.Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An lần 1 2016: Cho
$x,y,z>0;7(x^2+y^2+z^2)=11(xy+yz+zx).Max,MinP=\dfrac{(x+y+z)^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 22-03-2016 - 20:15

Trang 1 / 11

Trở lại Bất đẳng thức và cực trị · Chủ đề chưa đọc tiếp theo →

Diễn đàn Toán học → Toán Trung học Phổ thông và Thi Đại học → Bất đẳng thức và cực trị

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung , 18-03-2016 - 21:13

---

huya1k43pbc Đã gửi 21-03-2016 - 21:20

15.Cho$a, b, c > 0; a^2 + b^2 + c^2 = 3. MinP = (a + b + c)(\sum \frac{1}{a^2b^2 + 1})$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-04-2016 - 20:48

---

phamngochung9a Đã gửi 21-03-2016 - 22:49

> *Vào lúc 21 Tháng 3 2016 - 21:16, huya1k43pbc đã nói:*
>
> 14.Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An lần 1 2016: Cho $x, y, z > 0; 7(x^2 + y^2 + z^2) = 11(xy + yz + zx). Max, MinP = \frac{(x + y + z)^3}{(x + y)(y + z)(z + x)}$

Loại bài này rất hay sử dụng tính đồng bậc ở giả thiết

Biến đổi GT thành:

$7(x + y + z)^2 = 25(xy + yz + zx)$,

Đặt:

$$\begin{cases} a = \frac{x}{x+y+z} \\ b = \frac{y}{x+y+z} \\ c = \frac{z}{x+y+z} \end{cases}$$, ta có:

$$\begin{cases} ab + bc + ca = \frac{7}{25} \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{1}{(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc} = \frac{1}{\frac{7}{25} - abc} = \frac{25}{7 - 25abc}$$

Do $abc \leq \frac{1}{27}(a + b + c)^3 = \frac{1}{27} < \frac{7}{25}$ nên mẫu của P luôn dương, do đó, ta quy về bài toán đơn giản hơn là: tìm max và min của abc.

Ta có:

$$abc = \left[\frac{7}{25} - c(1 - c)\right].c = c^3 - c^2 + \frac{7}{25}c$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, ta có: $c \leq \frac{1}{3}$

Xét hàm số

$$f(c) = c^3 - c^2 + \frac{7}{25}c f'(c) = 3c^2 - 2c + \frac{7}{25} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = \frac{1}{5} \\ c = \frac{7}{15} \end{array}\right] (\text{với } c \in \left(0; \frac{1}{3}\right])$$

$abc \le f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{125}$

Vậy: $\max P = \frac{125}{32} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{1}{5} \\ c = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Chứng minh tương tự trên, nhưng ta xét hàm $f(a) = a^3 - a^2 + \frac{7}{25}a$ với $a \in \left[\frac{1}{3}; 1\right)$, ta lại có $\min P = \frac{3375}{896} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{15} \\ b = \frac{7}{15} \\ c = \frac{1}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \\ z = 1 \end{cases}$

P.s Bài toán này cho kết quả cứ phải gọi là "đẹp đến ảo diệu". Đi thi mà không có máy tính chắc là ngồi ngậm bút đến hết giờ :D

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 21-03-2016 - 22:55

---

quangtq1998 Đã gửi 22-03-2016 - 18:22

BÀI 16(Chuyên Nguyễn Trãi)

Cho $a, b \in (0, 1); (a^3 + b^3)(a + b) = ab(1 - a)(1 - b)$

Tìm giá trị lớn nhất của : $\frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} + 3ab - a^2 - b^2$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quangtq1998**: 22-03-2016 - 18:22

---

quangtq1998 Đã gửi 22-03-2016 - 18:24

BÀI 17

Cho $x, y, z \ge 0; x + y + z = 3;$ Tìm max $P = x^2y + y^2z + z^2x$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 23-03-2016 - 19:33

---

quangtq1998 Đã gửi 22-03-2016 - 18:30

> *Vào lúc 19 Tháng 3 2016 - 22:44, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> 13 (Đề thi thử ĐH THPT Nguyễn Khuyến - TPHCM)
>
> Cho ba số thực x, y, z thuộc đoạn $(0; 4)$ và thỏa mãn $x + y + z = 6\sqrt{2}$.Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{16 - y^2}} + \frac{1}{\sqrt{16 - z^2}} \ge \frac{8\sqrt{2}}{4}$

Có : $\frac{1}{\sqrt{16 - t^2}} \ge \frac{1}{8}t$ (vì $bdt \leftrightarrow (x^2 - 8)^2 \ge 0$

Nên$P \ge \frac{1}{8}(x + y + z) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Vậy sửa là $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quangtq1998**: 22-03-2016 - 18:30

I Love MC Đã gửi 23-03-2016 - 08:04

Bài 18 : Đề thi thử đại học lần I trung học phổ thông chuyên Quốc Học-Huế

Tìm giá trị lớn và nhỏ nhất của hàm số : $y = \frac{7\sqrt{5-4x} + 2\sqrt{5+x-4x^2} - \sqrt{1+x} - 4x + 5}{\sqrt{5-4x} + 2\sqrt{1+x} + 6}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 23-03-2016 - 19:33

---

quangtq1998 Đã gửi 23-03-2016 - 18:28

> *Vào lúc 23 Tháng 3 2016 - 08:04, I Love MC đã nói:*
>
> Bài 18 : Đề thi thử đại học lần I trung học phổ thông chuyên Quốc Học-Huế
>
> Tìm giá trị lớn và nhỏ nhất của hàm số : $y = \frac{7\sqrt{5-4x} + 2\sqrt{5+x-4x^2} - \sqrt{1+x} - 4x + 5}{\sqrt{5-4x} + 2\sqrt{1+x} + 6}$

Không biết làm cách này có được không

DK : $-1 \le x \le \frac{5}{4}$

Đặt $\sqrt{5-4x} = a; b = \sqrt{x+1} \Rightarrow a^2 + 4b^2 = 9; a \in [0,3]; b \in [0, \frac{3}{2}]$

$$P = a + \frac{a-b}{a+2b+6}$$

$P \le a + \frac{a}{a+6} \le \frac{10}{3}$ Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$

$P = a + 1 - \frac{3(b+2)}{a+2b+6} \ge \frac{-3(b+2)}{2b+6} \ge \frac{-1}{6}$ Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{-5}{4}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quangtq1998**: 23-03-2016 - 18:28

---

phamngochung9a Đã gửi 23-03-2016 - 19:25

> *Vào lúc 22 Tháng 3 2016 - 18:24, quangtq1998 đã nói:*
>
> ## BÀI 17
>
> Cho $x, y, z \ge 0; x + y + z = 3;$ Tìm max $P = x^2y + y^2z + z^2x$

Giả sử y nằm giữa x và z, ta có:

$(y-z)(y-x) \le 0 \Rightarrow y^2 + xz \le xy + zy \Rightarrow y^2z + z^2x \le xyz + z^2y \Rightarrow P \le x^2y + xyz + z^2y = y(x^2 + zx + z^2) \le y(x+z)^2 = \frac{1}{2}.2y(x+z).(x+z) \le \frac{1}{54}(2x + 2y + 2z)^3 = 4$

Vậy $\max P = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

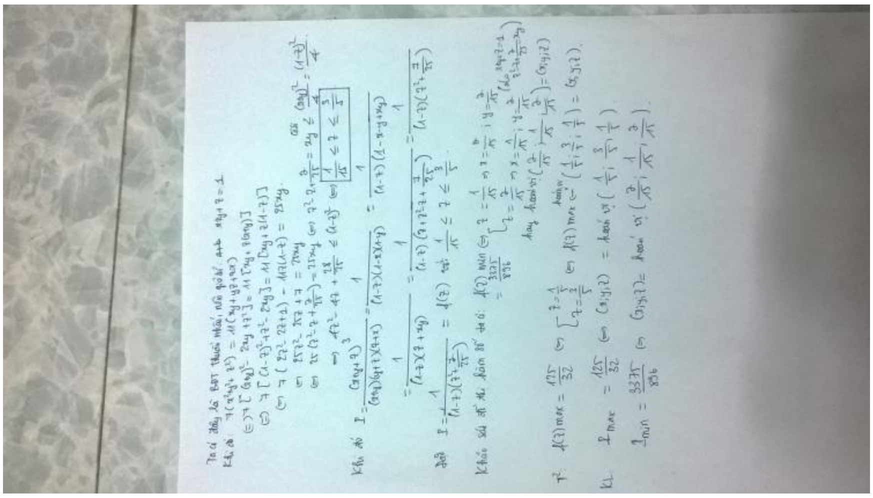
---

tritanng099 Đã gửi 24-03-2016 - 19:58

> *Vào lúc 21 Tháng 3 2016 - 21:16, huya1k43pbc đã nói:*
>
> 14.Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An lần 1 2016: Cho $x, y, z > 0; 7(x^2 + y^2 + z^2) = 11(xy + yz + zx). Max, MinP = \frac{(x+y+z)^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

Lời giải của mình là:

Hình gửi kèm



(http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_03_2016/post-138833-0-02004000-1458824280.jpg)

binhbo Đã gửi 24-03-2016 - 20:06

19.Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện ab + bc + ca = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{abc} + \frac{1}{(a+b)^3} + \frac{1}{(b+c)^3} + \frac{1}{(c+a)^3}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **binhbo**: 30-03-2016 - 21:00

tungteng532000 Đã gửi 24-03-2016 - 22:45

> *Vào lúc 21 Tháng 3 2016 - 21:20, huya1k43pbc đã nói:*
>
> 15.Cho$a, b, c > 0; a^2 + b^2 + c^2 = 3. MinP = (a+b+c)(\sum \frac{1}{a^2b^2+1})$

Ta có: $\frac{1}{a^2b^2+1} = 1 - \frac{a^2b^2}{a^2b^2+1} \geq 1 - \frac{ab}{2}$

Do đó $P \geq (a+b+c)(3 - \frac{1}{2}\sum ab) = (a+b+c)(3 - \frac{1}{4}((a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2)) = (a+b+c)(\frac{15}{4} - \frac{1}{4}(a+b+c)^2)$

Đặt t=a+b+c $\Rightarrow \sqrt{3} < t \leq 3$

$P \geq t(\frac{15}{4} - \frac{1}{4}t^2) \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t-6) \leq 0$ đúng với $\sqrt{3} < t \leq 3$

Đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1

tungteng532000 Đã gửi 24-03-2016 - 23:08

> *Vào lúc 24 Tháng 3 2016 - 20:06, binhbo đã nói:*
>
> 19.Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện ab + bc + ca = 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $$P = \frac{1}{abc} + \frac{1}{(a+b)^3} + \frac{1}{(b+c)^3} + \frac{1}{(c+a)^3}$$

Đây là 1 kết quả khá lỏng của bđt Iran 96:
Với a,b,c>=0 ta có bđt: $\sum \frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}$
Còn 1 lời giải của mình:
Áp dụng bđt AM-GM ta có:
$$\sum \frac{1}{(a+b)^3} \geq \frac{3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{3}{8abc} + \frac{3}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt{2abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{8abc} \geq \frac{5}{8}$$

$\Rightarrow P \geq \frac{11}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1

Dinh Xuan Hung Đã gửi 25-03-2016 - 22:44

20 (Đề thi thử môn Toán lần 1/2016 trường THPT Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương)

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c + abc = 4$.Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + abc}{(a + b + c)^2 - 1}$$

21 (Đề thi thử môn Toán lần 3/2016 trường THPT Chuyên Khoa học tự nhiên)

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + ab + b^2 = c(a + b + c)$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(a + c)^2}{2a^2 + 2ac + c^2} + \frac{(b + c)^2}{2b^2 + 2bc + c^2} + \frac{ab}{(a + b)^2} + \frac{ab}{a^2 + 4ab + b^2}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 12-04-2016 - 17:12

---

quangtq1998 Đã gửi 26-03-2016 - 16:03

> *Vào lúc 25 Tháng 3 2016 - 22:44, Dinh Xuan Hung đã nói:*

Đặt $a + b + c = t \Rightarrow abc = 4 - t \leq \frac{t^3}{27} \Rightarrow 4 \geq t \geq 3$

$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$

$\Leftrightarrow t^3 - 4t(ab + bc + ca) + 36 - 9t \geq 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 2t(t^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) + 36 - 9t \geq 0$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{t^3 + 9t - 36}{2t}$

$\Rightarrow P \geq \frac{\frac{t^3+9t-36}{2t} + 4 - t}{t^2 - 1} = \frac{t^3 - 2t^2 + 17t - 26}{2t(t^2 - 1)}$

$P - \frac{1}{2} \geq \frac{2(t - 3)(6 - t)}{t(t^2 - 1)} \geq 0 \Rightarrow P \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra chẳng hạn $a = b = c = 1$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quangtq1998**: 26-03-2016 - 18:27

---

ineX Đã gửi 28-03-2016 - 19:48

Sôi nổi lên chứ nhỉ!

Câu 22: Đề thi thử THPT Quốc Gia lần 1 THPT Hương Khê

Với các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$

Tìm giá trị lướn nhất của biểu thức:

$P = (x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - xz + x^2)$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **ineX**: 29-03-2016 - 10:56

---

quangtq1998 Đã gửi 28-03-2016 - 21:00

> *Vào lúc 28 Tháng 3 2016 - 19:48, ineX đã nói:*
>
> Sôi nổi lên chứ nhỉ!
>
> **Câu 22: Đề thi thử THPT Quốc Gia lần 1 THPT Hương Khê**
>
> Với các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$
>
> Tìm giá trị lướn nhất của biểu thức:
>
> $P = (x^2 - xy + y^2)(y^2 - yz + z^2)(z^2 - xz + x^2)$

Không mất tính tổng quát, giả sử $z \geq y \geq x$

nên

$$z^2 - xz + x^2 \leq (x+z)^2$$

$$x^2 - xy + y^2 = y^2 - x(y-x) \leq y^2$$

$$y^2 - yz + z^2 \leq y^2 - yz + z^2 + x(x + 2z - y) = y^2 - y(x+z) + (x+z)^2$$

Nên

$$P \leq (x+z)^2 y^2 [y^2 - y(x+z) + (x+z)^2] = 3y^3(y-3)^3 + 9y^2(y-3)^2$$

Đặt $t = y(y-3) \Rightarrow t \leq 0$

$$P - 12 \leq 3t^3 + 9t - 12 = 3(t-1)(t+2)^2 \leq 0$$

nên $P_{max} = 12$

Dấu "=" xảy ra chẳ hạn $x = 0; y = 1; z = 2$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quangtq1998**: 28-03-2016 - 21:01

Kaito Kuroba Đã gửi 02-04-2016 - 20:29

Bài 23

(Trích đề thi thử lần 2 - THPT Đăkmil - đăknông)

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c \leqslant 3abc$. Tìm Giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{\left(a^2 + c^2 + 2\right)\sqrt{b^2 + c^2}} - \frac{\left(a^4 + b^4\right)\left(ab + c^2\right)^3}{a^2\left(b^2 + c^2\right) + b^2\left(a^2 + c^2\right)} - \frac{c^3\left(a^3 + b^3\right)}{\sqrt[3]{\dfrac{a^2b + b^2c + c^2a}{3}}}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 18-04-2016 - 23:08

---

phamngochung9a

Đã gửi 02-04-2016 - 22:40

> *Vào lúc 25 Tháng 3 2016 - 22:44, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> 21 (Đề thi thử môn Toán lần 3/2016 trường THPT Chuyên Khoa học tự nhiên)
>
> Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+ab+b^2=c(a+b+c)$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
>
> $$P=\frac{(a+c)^2}{2a^2+2ac+c^2}+\frac{(b+c)^2}{2b^2+2bc+c^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{ab}{a^2+4ab+b^2}$$

Thực chất bài này là sử dụng bổ đề

$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\leq\frac{2}{1+xy}$ với $xy\leq 1$

Biến đổi giả thiết thành $(c+a)(c+b)=(a+b)^2$

Ta có:

$$P=\frac{1}{\left(\frac{a}{a+c}\right)^2+1}+\frac{1}{\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+1}+\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{1}{2+\frac{(a+b)^2}{ab}}$$

Do $\frac{a}{a+c}.\frac{b}{b+c}=\frac{ab}{(a+b)^2}\leq\frac{1}{4}<1$ nên

$$P\leq\frac{2}{1+\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}+\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{1}{2+\frac{(a+b)^2}{ab}}=\frac{2}{1+\frac{ab}{(a+b)^2}}+\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{1}{2+\frac{(a+b)^2}{ab}}$$

Đặt $\frac{ab}{(a+b)^2}=t$ (với $t\leq\frac{1}{4}$)

$$\Rightarrow P=\frac{2}{1+t}+t+\frac{1}{2+\frac{1}{t}}=\frac{2}{1+t}+t+\frac{t}{2t+1}$$

Khảo sát hàm số $f(t)=\frac{2}{1+t}+t+\frac{t}{2t+1}$ trên $\left(0;\frac{1}{4}\right]$, ta có:

$$f(t)\leq f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{121}{60}$$

Vậy $\max P=\frac{121}{60}\Leftrightarrow$ ....

---

thanhnam2000

Đã gửi 03-04-2016 - 20:57

Bài 24: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm GTNN của

$$P=\frac{16}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+1}}+\frac{xy+yz+zx+1}{x+y+z}$$

Đề thi thử Chu Văn An Sơn La

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-04-2016 - 20:48

Dinh Xuan Hung

Đã gửi 04-04-2016 - 22:44

Sory mọi người mấy hôm nay đang ôn thi nên bận quá

Bài 25 (Đề THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - Lần 3 -2016)

Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.Tìm Min

$$P = \frac{ac}{b + ac} + \frac{b}{a + bc} + \frac{9(a^3 + b^3 + c^3) + 12c^2 + 12(ab + bc + ac) + a + b + c}{6(c + ab)}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 12-04-2016 - 17:12

Trang 2 / 11

Trở lại Bất đẳng thức và cực trị · Chủ đề chưa đọc tiếp theo →

Diễn đàn Toán học → Toán Trung học Phổ thông và Thi Đại học → Bất đẳng thức và cực trị

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung , 18-03-2016 - 21:13

---

tungteng532000 Đã gửi 04-04-2016 - 23:00

> *Vào lúc 03 Tháng 4 2016 - 20:57, thanhnam2000 đã nói:*
>
> **Bài 24:** Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm GTNN của
>
> $$P=\frac{16}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+1}}+\frac{xy+yz+zx+1}{x+y+z}$$
>
> _Đề thi thử Chu Văn An Sơn La_

Bạn dùng bđt này là làm đc nhé: $\sum x \geq \sum x^2y^2$ với $\sum x^2=3$

---

tungteng532000 Đã gửi 05-04-2016 - 00:07

> *Vào lúc 04 Tháng 4 2016 - 22:44, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> Sory mọi người mấy hôm nay đang ôn thi nên bận quá
>
> Bài 25 (Đề THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - Lần 3 -2016)
>
> Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$.Tìm Min
>
> $$P=\frac{ac}{b+ac}+\frac{b}{a+bc}+\frac{9(a^3+b^3+c^3+12c^2+12(ab+bc+ac)+a+b+c)}{6(c+ab)}$$

bạn viết đề sai thì phải

---

niasco Đã gửi 11-04-2016 - 10:01

> *Vào lúc 18 Tháng 3 2016 - 21:59, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> 3 (Đề lần 2-2016- Chuyên Vĩnh phúc)
>
> Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác có chu vi là 1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của :
>
> $$T=\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{a+c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$

Bạn xem lại giúp mình, theo mình là Giá trị lớn nhất của T thì đúng hơn

Giải.

Vì a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác nên 2a,2b,2c < $a+b+c=1$ hay 0 < a,b,c < $\frac{1}{2}$

Ta có :

Đang tải [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

$1-x$ x ... g)

$\Rightarrow T \leq 18(a+b+c) - 3.3 = 9$

Vậy max T là 9 tại $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **niasco**: 11-04-2016 - 10:54

Dinh Xuan Hung

Đã gửi 12-04-2016 - 17:07

> *Vào lúc 04 Tháng 4 2016 - 22:44, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> Sory mọi người mấy hôm nay đang ôn thi nên bận quá
>
> Bài 25 (Đề THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - Lần 3 -2016)
>
> Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c = 1$.Tìm Min
>
> $$P = \frac{ac}{b+ac} + \frac{b}{a+bc} + \frac{9(a^3+b^3+c^3)+12c^2+12(ab+bc+ac)+a+b+c}{6(c+ab)}$$

Ta có:$P = \frac{ac}{ac+b} + \frac{bc}{bc+a} + \frac{9(a^3+b^3+c^3)+1}{6(c+ab)} + 2$

Áp dụng bổ đề: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}+1} (xy \geq 1)$

Khi đó ta có: $\frac{ac}{ac+b} + \frac{bc}{bc+a} \geq \frac{2c}{1+c}$

Đồng thời thì $9(a^3+b^3+c^3)+1 \geq 6\sqrt{a^3+b^3+c^3} = 6\sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)} \geq 6(a^2+b^2+c^2)$

Lại có:$(a^2+b^2) \geq \frac{(a+b)^2}{2}; ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$

Thay a+b=1-c vào thì được :$P \geq f(c) = \frac{2c}{c+1} + \frac{2(1-c)^2+4c^2}{4c+(1-c)^2} + 2 \geq \frac{5}{4} + 2 = \frac{13}{4}$

Dinh Xuan Hung

Đã gửi 12-04-2016 - 17:12

Bài 26 : (THPT Quốc Học Huế-Thi thử lần 2)

Cho $x, y, z \in [1; 3]$ thỏa mãn $y + z - 4x = 0$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2+z^2-4x^2}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-7x^4}}$$

Bài 27 (Đề thi thử môn Toán năm 2016 trường THPT ĐăkMil, ĐăkNông)

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn:$ab+bc+ac = 1$.Tìm Min biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a}{16(b+c)(a^2+bc)}} + \sqrt{\frac{b}{16(a+c)(b^2+ac)}} + \frac{a^2+1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{c}{ab}\right)$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 16-04-2016 - 20:25

---

phamngochung9a Đã gửi 15-04-2016 - 22:42

> *Vào lúc 12 Tháng 4 2016 - 17:12, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> Bài 26 : (THPT Quốc Học Huế-Thi thử lần 2)
>
> Cho $x, y, z \in [1; 3]$ thỏa mãn $y + z - 4x = 0$.Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $$P = \frac{y^2 + z^2 - 4x^2}{\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 7x^4}}$$

Từ giả thiết, ta có: $\frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 4$

$$P = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 - 4}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2.\left(\frac{y}{x}\right)^2.\left(\frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 - 7}}$$

Đặt $\begin{cases} \frac{y}{x} = a \\ \frac{z}{x} = b \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$

$P = \frac{a^2 + b^2 - 4}{\sqrt{a^2 + a^2b^2 + b^2 - 7}} = \frac{12 - 2t}{\sqrt{9 - 2t + t^2}}$ (với $t = ab$)

Đặt $f(t) = \frac{12 - 2t}{\sqrt{t^2 - 2t + 9}}$, ta có: $f'(t) < 0$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến.

Ta sẽ giới hạn giá trị của t. Ta có:

*) $t = \frac{y}{x}.\frac{z}{x} \le \frac{1}{4}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right)^2 = 4$

Vậy $f(t) \ge f(4) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

*) $a \in \left[\frac{1}{3}; 3\right], b \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$

$\Rightarrow (a - 3)(b - 3) \ge 0 \Rightarrow ab \ge 3a + 3b - 9 = 3 \Rightarrow t \ge 3$

Vậy $f(t) \le f(3) = \sqrt{3}$

Answer: $\min P = \frac{4}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow y = z = 2x$, chẳng hạn: $y = z = 2x = 2$

$\max P = \sqrt{3}$, khi chẳng hạn: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

---

phamngochung9a Đã gửi 15-04-2016 - 23:12

Bài 28: (Đề thi thử của sở GD- ĐT Thanh Hóa năm 2016)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = (a + b + c)\left(\frac{3a - b}{a^2 + ab} + \frac{3b - c}{b^2 + bc} + \frac{3c - a}{c^2 + ca}\right)$$

Bài 29: (Đề thi thử của sở GD- ĐT Bắc Giang năm 2016)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$. Chứng minh rằng:

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \geq (x+2)(y+2)(z+2)$$

Bài 30: (THPT chuyên Thái Bình- lần 3)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + 2y + 3z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P = x^2(5-6x) + 4y^2(5-12y) + z^2(45-162z)$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 18-04-2016 - 15:47

Dinh Xuan Hung Đã gửi 16-04-2016 - 08:33

> *Vào lúc 15 Tháng 4 2016 - 23:12, phamngochung9a đã nói:*
>
> **Bài 29:** (Đề thi thử của sở GD- ĐT Bắc Giang năm 2016)
>
> Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$. Chứng minh rằng:
>
> $$3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 \geq (x+2)(y+2)(z+2)$$

Từ giả thiết suy ra $0 < xy, yz, zx < 4$

Đặt $\sqrt{zy} = 2\cos A, \sqrt{xz} = 2\cos B, \sqrt{xy} = 2\cos C$, trong đó A, B, C là các góc nhọn.

Từ giả thiết suy ra

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C = 1 \Leftrightarrow (\cos C+\cos(A-B))(\cos C+\cos(A+B)$

$\Leftrightarrow \cos C+\cos(A+B) = 0$

Suy ra A, B, C là ba góc nhọn của một tam giác. Ta có

$$z = \frac{2\cos A\cos B}{\cos C}; y = \frac{2\cos A\cos C}{\cos B}; x = \frac{2\cos C\cos B}{\cos A}$$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{3(\cos A+\cos B+\cos C)^2}{2\cos A\cos B\cos C} \geq \frac{8\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \geq 4\sin A\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin A\sin B\sin C}+\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}+\frac{1}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{1}{\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3}+\frac{1}{2\left(\frac{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}{3}\right)^3}$$

$$\geq \frac{8}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

VMF

(http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_04_2016/post-125595-0-04524300-1460770486.png)

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 16-04-2016 - 08:34

Juliel Đã gửi 16-04-2016 - 20:13

> *Vào lúc 12 Tháng 4 2016 - 17:12, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> Bài 27 (Đề thi thử môn Toán năm 2016 trường THPT ĐăkMil, ĐăkNông)
>
> Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: $ab + bc + ac = 1$. Tìm Min biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a}{16(b+c)(a^2+bc)}} + \sqrt{\frac{b}{16(a+c)(b^2+ac)}} + \frac{a^2+1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{c}{ab}\right)$$

Lời giải :

Theo AM-GM :

$$\sqrt{\frac{a}{(b+c)(a^2+bc)}} = \frac{a}{\sqrt{(ab+ac)(a^2+bc)}} \geq \frac{a}{\frac{1}{2}(ab+ac+a^2+bc)} = \frac{2a}{(a+b)(a+c)}$$

Tương tự :

$$\sqrt{\frac{b}{(a+c)(b^2+ac)}} \geq \frac{2b}{(b+c)(b+a)}$$

Suy ra :

$$4P \geq \frac{2a}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b}{(b+c)(b+a)} + \frac{(a^2+1)(b+c)}{ab} = \frac{2a(b+c)+2b(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{(a^2+ab+bc+ca)(b+c)}{ab}$$

$$= \frac{2(1+ab)}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{2(1+ab)}{ab}} = 2\sqrt{\frac{4(1+ab)}{2ab}} \geq 2\sqrt{\frac{4(ab+1)}{1+ab}} = 4$$

(Chú ý rằng $ab \leq ab + bc + ca = 1$)

Từ đó ta có $MinP = 1 \Leftrightarrow a = b = 1, c = 0$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Juliel**: 16-04-2016 - 20:28

Juliel Đã gửi 16-04-2016 - 20:21

> *Vào lúc 15 Tháng 4 2016 - 23:12, phamngochung9a đã nói:*
>
> **Bài 30:** (THPT chuyên Thái Bình- lần 3)
>
> Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + 2y + 3z = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
>
> $P = x^2(5-6x) + 4y^2(5-12y) + z^2(45-162z)$

Lời giải :

Đặt $a = x, b = 2y, c = 3z$ thì $a + b + c = 4$. Khi đó :

$$P = a^2(5-6a) + b^2(5-6b) + c^2(5-6c) = 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 - 6a^3 - 6b^3 - 6c^3$$

Bằng phương pháp tiếp tuyến, chỉ ra được :

$$5a^2 - 6a^3 \leq \frac{-56}{3}a + \frac{176}{9}$$

Suy ra :

$$P \leq \frac{-56}{3}(a+b+c) + \frac{176}{3} = -16$$

$$MaxP = -16 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{9}$$

---

niasco Đã gửi 16-04-2016 - 22:14

> *Vào lúc 23 Tháng 3 2016 - 19:25, phamngochung9a đã nói:*
>
> Giả sử y nằm giữa x và z, ta có:
>
> $(y-z)(y-x) \leq 0 \Rightarrow y^2 + xz \leq xy + zy \Rightarrow y^2z + z^2x \leq xyz + z^2y \Rightarrow P \leq x^2y + xyz + z^2y = y(x^2+zx+z^2) \leq y(x+z)^2 = \frac{1}{2}.2y(x+z).(x+z) \leq \frac{1}{54}(2x+2y+2z)^3 = 4$
>
> Vậy $\max P = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

Cho mình hỏi tại sao lại giả sử y nằm giữa x và z vậy ? Vì mình thấy đa số bài toán đều giả sử y= min{x,y,z} hoặc y= max{x,y,z} khi các biến hoán vị 🙁

---

ineX Đã gửi 16-04-2016 - 23:34

Bài 31: (THPT Hàn Thuyên lần 1)

Cho các số thực x, y, z thỏa $x > 2, y > 1, z > 0$

Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2(2x + y - 3)}} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-04-2016 - 20:49

---

phamngochung9a Đã gửi 17-04-2016 - 08:48

> *Vào lúc 16 Tháng 4 2016 - 22:14, niasco đã nói:*
>
> Cho mình hỏi tại sao lại giả sử y nằm giữa x và z vậy ? Vì mình thấy đa số bài toán đều giả sử y= min{x,y,z} hoặc y= max{x,y,z} khi các biến hoán vị

Đối với các bài toán hoán vị, ta được phép giả sử **vị trí của <u>một</u> biến bất kì,** chứ không bắt buộc phải giả sử là lớn nhất hay nhỏ nhất đâu bạn. Ở đây, gs lớn nhất là vị trí đầu, gs nhỏ nhất là vị trí cuối.

> *Vào lúc 16 Tháng 4 2016 - 20:21, Juliel đã nói:*
>
> **Lời giải :**
>
> Đặt $a = x, b = 2y, c = 3z$ thì $a + b + c = 4$. Khi đó :
>
> $$P = a^2(5 - 6a) + b^2(5 - 6b) + c^2(5 - 6c) = 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 - 6a^3 - 6b^3 - 6c^3$$
>
> Bằng phương pháp tiếp tuyến, chỉ ra được :
>
> $$5a^2 - 6a^3 \le \frac{-56}{3}a + \frac{176}{9}$$
>
> Suy ra :
>
> $$P \le \frac{-56}{3}(a + b + c) + \frac{176}{3} = -16$$
>
> $$MaxP = -16 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{4}{9}$$

Xin lỗi anh nha, tại em hấp tấp gõ sai đề. Lúc đầu em cũng nghĩ dùng UTC nhưng sau đó thất bại, thấy anh làm PP này lại được kiểm tra lại đề thì.....Bây giờ thì không dùng UTC được đâu anh (em nghĩ vậy)

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 17-04-2016 - 09:19

---

phamngochung9a Đã gửi 17-04-2016 - 09:15

> *Vào lúc 15 Tháng 4 2016 - 23:12, phamngochung9a đã nói:*
>
> **Bài 30:** (THPT chuyên Thái Bình- lần 3)
>
> Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + 2y + 3z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
>
> $P = x^2(5 - 6x) + 4y^2(5 - 12y) + z^2(45 - 162z)$

Đặt $\begin{cases} x = a \\ y = 2b \\ z = 3c \end{cases}$

Dễ nhận thấy BĐT đạt điểm rơi tại $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = b = \frac{1}{2}; c = 0$ điều này khiến ta liên tưởng đến BĐT Schur.

Đồng bậc hai vế, ta cần chứng minh:

$5(a + b + c)\left(a^2 + b^2 + c^2\right) - 6\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \le (a + b + c)^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$

Vì đây là đề thi THPT QG nên sẽ phải cm lại BĐT Schur. Cách chứng minh ngắn nhất là sử dụng tính chất đối xứng.

Gs $a \ge b \ge c \ge 0$, ta có:

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - ab(a + b) - bc(b + c) - ca(c + a) = a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b) \ge a(a - b)(b - c) + b(b - a)(b - c) + c(a - c)(b - c) = (a - b)^2(b - c)$

Vậy $maxP = 1$ khi........ copy ở trên

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 17-04-2016 - 09:24

Juliel

Đã gửi 17-04-2016 - 20:29

Bài 32 (Thi thử THPT Quốc gia 2016 THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Cho a, b, c dương thoả $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Tìm GTNN :

$$P=(a+1)(b+1)(c+1)+\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-04-2016 - 20:49

quanguefa

Đã gửi 17-04-2016 - 23:31

> *Vào lúc 16 Tháng 4 2016 - 23:34, ineX đã nói:*
>
> **Bài 31**: (THPT Hàn Thuyên lần 1)
>
> Cho các số thực x, y, z thỏa $x>2, y>1, z>0$
>
> Tìm giá trị lớn nhất của:
>
> $$P=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(2x+y-3)}}-\frac{1}{y(x-1)(z+1)}$$

Bài 31: Dạng này xuất hiện trong nhiều đề thi thử rồi, trong tuyển tập bộ 3 câu khó của VMF cũng xuất hiện

Đề bị nhầm 1 chút nha, sửa lại: $P=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2-2(2x+y-3)}}-\frac{1}{y(x-1)(z+1)}$

Đặt $a=x-2, b=y-1, c=z$. Ta có a, b, c>0

$P=\frac{1}{2\sqrt{\sum a^2+1}}-\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\frac{1}{\sqrt{(1+1+1+1)(a^2+b^2+c^2+1)}}-\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}\leq\frac{1}{a+b+c+1}-\frac{27}{(a+1+b+1+c+1)^3}=\frac{1}{a+b+c+1}-\frac{27}{(a+b+c+3)^3}$

Đặt $t=a+b+c\,(t>0)$, khi đó: $P=f(t)=\frac{1}{t+1}-\frac{27}{(t+3)^3}$

Có: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=3\Rightarrow f(t)_{max}=f(3)=\frac{1}{8}$

Vậy $P\leq\frac{1}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi x=3, y=2, z=1

P/s: sao mình thấy nhiều câu thi thử trông nó có vẻ đậm chất thi HSG quá vậy nhỉ @@ rồi một số lời giải các bạn thì ôi thôi rồi luôn, holder, schur chóng hết cả mặt...

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quanguefa**: 17-04-2016 - 23:33

quanguefa

Đã gửi 17-04-2016 - 23:40

Bài 33: (lớp toán Lý Thái Tổ, thi thử lần thứ 14 năm 2015).

Cho x, y, z thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P=\frac{3x^2+3y^2}{8}+\frac{2z}{x+y}-\frac{z^2+z}{(x+1)(y+1)}-\sqrt{3}z$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quanguefa**: 17-04-2016 - 23:41

quanguefa

Đã gửi 18-04-2016 - 00:21

> *Vào lúc 03 Tháng 4 2016 - 20:57, thanhnam2000 đã nói:*
>
> **Bài 24:** Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm GTNN của
>
> $$P=\frac{16}{\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+1}}+\frac{xy+yz+zx+1}{x+y+z}$$
>
> _Đề thi thử Chu Văn An Sơn La_

Bài 24:

Đầu tiên ta chứng minh: $\sum x \geq \sum x^2y^2$

Ta có: $\sum x^2y^2 = \dfrac{(\sum x^2)^2 - \sum x^4}{2} = \dfrac{9 - \sum x^4}{2}$

Cần chứng minh: $\dfrac{9 - \sum x^4}{2} \leq \sum x \Leftrightarrow 2\sum x + \sum x^4 \geq 9$

BĐT này đúng nhờ đánh giá AM-GM: $x^4 + x + x \geq 3x^2$

Từ đó ta có: $P \geq \dfrac{16}{\sqrt{\sum x + 1}} + \dfrac{\frac{(\sum x)^2 - \sum x^2}{2} + 1}{\sum x} = \dfrac{16}{\sqrt{\sum x + 1}} + \dfrac{(\sum x)^2 - 1}{2\sum x}$

Đặt $t = x + y + z\ (t \leq 3)$. Khi đó: $P \geq f(t) = \dfrac{16}{\sqrt{t+1}} + \dfrac{t^2 - 1}{2t}$

Tính đạo hàm suy ra f(t) nghịch biến, suy ra: $f(t)_{min} = f(3) = \dfrac{28}{3} \Rightarrow P \geq \dfrac{28}{3}$

Vậy.... dấu bằng xảy ra khi x=y=z=1

Sử dụng hơi nhiều dấu sigma các bạn thông cảm

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quanguefa**: 18-04-2016 - 00:26

---

quanguefa Đã gửi 18-04-2016 - 13:06

Bài 34:

Cho x, y, z thực dương: $x + y + 1 = z$

Tìm GTNN của: $P = \sum \dfrac{x^3}{x + yz} + \dfrac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quanguefa**: 19-04-2016 - 21:26
Lần sau ghi rõ nguồn

MarkNguyen Đã gửi 18-04-2016 - 15:44

> *Vào lúc 15 Tháng 4 2016 - 23:12, phamngochung9a đã nói:*
>
> **Bài 28:** (Đề thi thử của sở GD- ĐT Thanh Hóa năm 2016)
>
> Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
>
> $$P = (a+b+c)\left(\frac{3a-b}{a^2+ab} + \frac{3b-c}{b^2+bc} + \frac{3c-a}{c^2+ca}\right)$$

Vì biểu thức P có tính thuần nhất nên chuẩn hóa $a + b + c = 1$. Ta có:

$$P = \frac{3a-b}{a^2+ab} + \frac{3b-c}{b^2+bc} + \frac{3c-a}{c^2+ca}$$

$$= \frac{4a-(a+b)}{a(a+b)} + \frac{4b-(b+c)}{b(b+c)} + \frac{4c-(c+a)}{c(c+a)}$$

$$= \frac{4}{a+b} - \frac{1}{a} + \frac{4}{b+c} - \frac{1}{b} + \frac{4}{c+a} - \frac{1}{c}$$

Dự đoán GTLN của P=9. Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{4}{a+b} - \frac{1}{a} + \frac{4}{b+c} - \frac{1}{b} + \frac{4}{c+a} - \frac{1}{c} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 9 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

$$\Leftrightarrow 9 + (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{4a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{4c}{a+b}\ (*)$$

Theo BĐT Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{b+c}\Rightarrow a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\frac{4a}{b+c}$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{cases} b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\geq\frac{4b}{c+a} \\ c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq\frac{4c}{a+b} \end{cases}$$

$\Rightarrow(*)$ đúng

$\Rightarrow P\leq 9$

Vậy GTLN của P=9 $\Leftrightarrow a=b=c$

*Nhận xét, có lẽ người ra đề nghĩ ra bài toán trên dựa vào 1 bất đẳng thức quen thuộc:

Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng:

$$9+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}$$

Trang 3 / 11

Trở lại Bất đẳng thức và cực trị · Chủ đề chưa đọc tiếp theo →

Diễn đàn Toán học → Toán Trung học Phổ thông và Thi Đại học → Bất đẳng thức và cực trị

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung , 18-03-2016 - 21:13

---

quanguefa Đã gửi 18-04-2016 - 19:08

Mọi người cho mình hỏi ngoài lề (không biết hỏi chỗ nào cho hợp lý, mod thông cảm)

1.Thi Đại Học được dùng pp chuẩn hóa BĐT không (mặc dù cũng hiếm khi cần đến).

2.Thi ĐH mình trình bày ngắn gọi như kiểu trình bày trong barem điểm thì có full điểm không (ý mình là trình bày tắt (đủ ý) kiểu đáp án chứ không phải là làm theo cách giống đáp án). Tại mình thấy đáp án thường làm gắn gọn vắn tắt (đôi khi bỏ bước nhỏ), làm kiểu đó mà kiểm tra là thầy mình trừ điểm liền

---

ngochapid Đã gửi 18-04-2016 - 22:09

Bài 35: Cho $0 \le a, b \le 1$

Tìm $maxP = \dfrac{a}{\sqrt{2b^2+5}} + \dfrac{b}{\sqrt{2a^2+5}}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-04-2016 - 17:49
Lần sau ghi rõ nguồn

Dinh Xuan Hung Đã gửi 18-04-2016 - 23:02

> *Vào lúc 18 Tháng 4 2016 - 13:06, quanguefa đã nói:*
>
> **Bài 34:**
>
> Cho x, y, z thực dương: $x + y - 1 = z$
>
> Tìm GTNN của: $P = \sum \dfrac{x^3}{x+yz} + \dfrac{14}{(x+1)\sqrt{(y+1)(z+1)}}$

Theo Cauchy_Swatch ta có : $\dfrac{x^3}{x+yz} + \dfrac{y^3}{y+xz} \ge \dfrac{(x+y)^3}{2(x+y+yz+xz)} = \dfrac{(x+y)^3}{2(x+y)(1+z)} = \dfrac{(x+y)^2}{2(z+1)} = \dfrac{(z-1)^2}{2(z+1)}$ **(Do** $x+y=z-1$**)**

Đang xử lý toán: 68%

Mà $\frac{z^3}{z+xy} = \frac{4z^3}{4z+4xy} \geq \frac{4z^3}{4z+(x+y)^2} = \frac{4z^3}{4z+(z-1)^2} = \frac{4z^3}{(z+1)^2}$

$(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)} \leq (z+1).\frac{x+y+2}{2} = \frac{(z+1)(z-1+2)}{2} = \frac{(z+1)^2}{2} => \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}} \geq \frac{28}{(z+1)^2}$

Từ đó

$=> P \geq \frac{(z-1)^2}{2(z+1)} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} + \frac{28}{(z+1)^2} => 2P \geq \frac{(z-1)^2}{z+1} + \frac{8z^3}{(z+1)^2} + \frac{56}{(z+1)^2} = \frac{(z-1)^2(z+1)+8z^3+56}{(z+1)^2} = f(z)$

Ta chứng minh $f(z) \geq \frac{53}{4} <=> \frac{(z-1)^2(z+1)+8z^3+56}{(z+1)^2} \geq \frac{53}{4}$

$<=> \frac{9z^3-z^2-z+57}{z^2+2z+1} \geq \frac{53}{4} <=> 36z^3-4z^2-4z+228 \geq 53z^2+106z+53$

$<=> 36z^3-57z^2-110z+175 \geq 0 <=> 12z^2(3z-5)+z(3z-5)-35(3z-5) \geq 0$

$<=> (3z-5)(12z^2+z-35) \geq 0 <=> (3z-5)(4z(3z-5)+7(3z-5)) \geq 0$

$<=> (3z-5)^2(4z+7) \geq 0$ **(Luôn đúng)**

Do đó $2P \geq f(z) \geq \frac{53}{4} => P \geq \frac{53}{8} => P_{Min} = \frac{53}{8} <=> \begin{cases} x=y \\ z=\frac{5}{3} \\ x+y+1=z \end{cases} <=> \begin{cases} x=y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{5}{3} \end{cases}$

Dinh Xuan Hung

Đã gửi 19-04-2016 - 16:49

> *Vào lúc 17 Tháng 4 2016 - 20:29, Juliel đã nói:*
>
> **Bài 32** (Thi thử THPT Quốc gia 2016 THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)
>
> Cho a, b, c dương thoả $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Tìm GTNN :
>
> $$P=(a+1)(b+1)(c+1)+\frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}$$

Ta có $ab+bc+ca=3abc$.

Nên $(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$

$$=\frac{4}{3}(ab+bc+ca)+a+b+c+1.$$

Mà $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)\Rightarrow a+b+c\le ab+bc+ca$.

Do đo $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\le(ab+bc+ca)^2-2(ab+bc+ca)$

Đặt $t=ab+bc+ca$, ta có $a+b+c\ge\sqrt{3t}$ nên $t\ge\sqrt{3t}\Rightarrow t\ge 3$.

$$P\ge\frac{4}{3}t+\sqrt{3t}+1+\frac{4}{\sqrt{t^2-2t+1}}=\frac{4}{3}t+\sqrt{3t}+\frac{4}{t-1}+1=f(t).$$

Xét hàm sô $f(t)$ với $t\ge 3$ ta có

$$f'(t)=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}-\frac{4}{(t-1)^2}.$$

Vì $t\ge 3$ nên $(t-1)^2\ge 4\Rightarrow\frac{1}{(t-1)^2}\le\frac{1}{4}$.

Do đó $f'(t)>0\ \forall t\ge 3$, suy ra $f(t)\ge f(3)=10\Rightarrow P\ge 10$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy GTNN của P là 10. http://diendantoanhoc.net/

[(http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_04_2016/post-125595-0-90863900-1461059367.png)](http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_04_2016/post-125595-0-90863900-1461059367.png)

Dinh Xuan Hung Đã gửi 19-04-2016 - 16:50

> *Vào lúc 18 Tháng 4 2016 - 22:09, ngochapid đã nói:*
>
> **Bài 35:** Cho $0\le a,b\le 1$
>
> Tìm $maxP=\frac{a}{\sqrt{2b^2+5}}\frac{b}{\sqrt{2a^2+5}}$

Đề của bạn có ghi thiếu gì không?

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 19-04-2016 - 16:50

---

hoduchieu01 Đã gửi 19-04-2016 - 16:58

> *Vào lúc 19 Tháng 4 2016 - 16:50, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> Đề của bạn có ghi thiếu gì không?

bài đấy đã có ở đây[http://diendantoanho...5fracbsqrt2a25/ (http://diendantoanhoc.net/topic/157468-maxpfracasqrt2b25fracbsqrt2a25/)](http://diendantoanhoc.net/topic/157468-maxpfracasqrt2b25fracbsqrt2a25/)

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **hoduchieu01**: 19-04-2016 - 16:58

hoduchieu01

Đã gửi 19-04-2016 - 17:55

phương pháp chuẩn hóa bất đẳng thức là gì vậy ai giải thích được ko

quanguefa

Đã gửi 19-04-2016 - 21:06

> *Vào lúc 19 Tháng 4 2016 - 17:55, hoduchieu01 đã nói:*
>
> phương pháp chuẩn hóa bất đẳng thức là gì vậy ai giải thích được ko

bạn xem ở đây http://diendantoanho...-chuẩn-hoa-bdt/ (http://diendantoanhoc.net/topic/65850-khong-hi%E1%BB%83u-v%E1%BB%81-ki-thu%E1%BA%ADt-chu%E1%BA%A9n-hoa-bdt/)

và đây: http://diendantoanho...-bất-đẳng-thức/ (http://diendantoanhoc.net/topic/141274-chu%E1%BA%A9n-h%C3%B3a-b%E1%BA%A5t-%C4%91%E1%BA%B3ng-th%E1%BB%A9c/)

Nhìu tài liệu về BĐT cũng có nói tới cái này mà bạn

klq nhưng câu 35 chả mang dáng dấp đề đại học tý nào :3

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quanguefa**: 19-04-2016 - 21:11

quanguefa

Đã gửi 19-04-2016 - 21:25

> *Vào lúc 18 Tháng 4 2016 - 23:02, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> **Theo Cauchy_Swatch ta có :**
>
> $$\frac{x^3}{x+yz}+\frac{y^3}{y+xz}\geq\frac{(x+y)^3}{2(x+y+yz+xz)}=\frac{(x+y)^3}{2(x+y)(1+z)}=\frac{(x+y)^2}{2(z+1)}=\frac{(z-1)^2}{2(z+1)}$$ **(Do** $x+y=z-1$**)**
>
> **Mà** $$\frac{z^3}{z+xy}=\frac{4z^3}{4z+4xy}\geq\frac{4z^3}{4z+(x+y)^2}=\frac{4z^3}{4z+(z-1)^2}=\frac{4z^3}{(z+1)^2}$$
>
> $$(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}\leq(z+1).\frac{x+y+2}{2}=\frac{(z+1)(z-1+2)}{2}=\frac{(z+1)^2}{2}=>\frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}\geq\frac{28}{(z+1)^2}$$
>
> **Từ đó**
>
> $$=>P\geq\frac{(z-1)^2}{2(z+1)}+\frac{4z^3}{(z+1)^2}+\frac{28}{(z+1)^2}=>2P\geq\frac{(z-1)^2}{z+1}+\frac{8z^3}{(z+1)^2}+\frac{56}{(z+1)^2}=\frac{(z-1)^2(z+1)+8z^3+56}{(z+1)^2}=f(z)$$

Ta chứng minh $f(z) \geq \dfrac{53}{4} <=> \dfrac{(z-1)^2(z+1)+8z^3+56}{(z+1)^2} \geq \dfrac{53}{4}$

$<=> \dfrac{9z^3-z^2-z+57}{z^2+2z+1} \geq \dfrac{53}{4} <=> 36z^3-4z^2-4z+228 \geq 53z^2+106z+53$

$<=> 36z^3-57z^2-110z+175 \geq 0 <=> 12z^2(3z-5)+z(3z-5)-35(3z-5) \geq 0$

$<=> (3z-5)(12z^2+z-35) \geq 0 <=> (3z-5)(4z(3z-5)+7(3z-5)) \geq 0$

$<=> (3z-5)^2(4z+7) \geq 0$ **(Luôn đúng)**

Do đó $2P \geq f(z) \geq \dfrac{53}{4} => P \geq \dfrac{53}{8} => P_{Min} = \dfrac{53}{8} <=> \begin{cases} x = y \\ z = \dfrac{5}{3} \\ x+y+1 = z \end{cases} <=> \begin{cases} x = y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Sr m.n mình ghi đề bị nhầm nhiều quá, để sửa lại ngay, ban hùng tự sửa đề làm luôn rồi mà lại ko nói :3

hùng ơi chỗ này hơi khó hiểu, giải thích giùm $\dfrac{x^3}{x+yz}+\dfrac{y^3}{y+xz} \geq \dfrac{(x+y)^3}{2(x+y+yz+xz)}$

---

ineX Đã gửi 19-04-2016 - 21:31

<u>Bài 36:</u> ***<u>Trích đề thi thử đại học lần 2 trường THPT Đoàn Thượng</u>***

Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2+b^2+c^2=3$

Tìm giá trị lớn nhất của:

$$A = \frac{ab}{3+c^2}+\frac{bc}{3+a^2}-\frac{a^3b^3+b^3c^3}{24a^3c^3}$$

---

quanguefa Đã gửi 19-04-2016 - 21:35

Bài 37. (trích đề KSCL Quảng Nam)

Cho a, b, c dương thỏa: $\dfrac{4a}{b}(1+\dfrac{2c}{b})+\dfrac{b}{a}(1+\dfrac{c}{a}) = 6$

Tìm GTNN: $P = \dfrac{bc}{a(b+2c)}+\dfrac{2ca}{b(c+a)}+\dfrac{2ab}{c(2a+b)}$

---

quanguefa Đã gửi 20-04-2016 - 01:10

> *Vào lúc 18 Tháng 4 2016 - 13:06, quanguefa đã nói:*
>
> **Bài 34:**
>
> Cho x, y, z thực dương: $x+y+1=z$

Tìm GTNN của: $P = \sum \frac{x^3}{x+yz} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$

Đây là cách của mình, về bản chất cũng giống cách của bạn Hùng nhưng biến đổi khác 1 tý

Thay z=x+y+1 vào biểu thức ta có:

$$\sum \frac{x^3}{x+yz} = \frac{x^3}{(x+y)(y+1)} + \frac{y^3}{(x+y)(x+1)} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)}$$

$$= \frac{x^3(x+1) + y^3(y+1) + z^3(x+y)}{(x+y)(x+1)(y+1)}$$

$$= \frac{x^3 + y^3 + x^4 + y^4 + z^3(x+y)}{(x+y)(x+y+xy+1)}$$

$$\geq \frac{\frac{(x+y)^4}{8} + \frac{(x+y)^3}{4} + z^3(x+y)}{(x+y)[\frac{(x+y)^2}{4} + x + y + 1]}$$

$$= \frac{(x+y)^3 + 2(x+y)^2 + z^3}{2(x+y)^2 + 8x + 8y + 8} = \frac{(z-1)^2(z+1) + z^3}{2(z+1)^2}$$

Phần còn lại làm giống bạn hùng

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quanguefa**: 20-04-2016 - 01:13

---

huya1k43pbc Đã gửi 23-04-2016 - 13:37

$Cho x, y, z > 0; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z}. MaxP = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$(Thi thử sở Hà tĩnh)

Juliel Đã gửi 23-04-2016 - 19:53

> *Vào lúc 19 Tháng 4 2016 - 21:31, ineX đã nói:*
>
> ***Bài 36: Trích đề thi thử đại học lần 2 trường THPT Đoàn Thượng***
>
> Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$
>
> Tìm giá trị lớn nhất của:

$$A = \frac{ab}{3+c^2} + \frac{bc}{3+a^2} - \frac{a^3b^3+b^3c^3}{24a^3c^3}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\frac{ab}{3+c^2} = \frac{ab}{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)} \le \frac{1}{4}.\frac{(a+b)^2}{(c^2+a^2)+(c^2+b^2)} \le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\right) \le \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{c^2+a^2}+\frac{b}{2c}\right)$$

Hoàn toàn tương tự :

$$\frac{bc}{3+a^2} \le \frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{c^2+a^2}+\frac{b}{2a}\right)$$

Suy ra :

$$\frac{ab}{3+c^2}+\frac{bc}{3+a^2} \le \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}\right)\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}\right)$$

Và :

$$24A \le 6 + 3\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}\right) - \left(\frac{b^3}{a^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)$$

Dễ dàng chứng minh được :

$$3x - x^3 \le 2 \quad (x > 0)$$

Suy ra :

$$24A \le 6 + \left(\frac{3b}{a}-\frac{b^3}{a^3}\right) + \left(\frac{3b}{c}-\frac{b^3}{c^3}\right) \le 6+2+2 = 10 \Leftrightarrow A \le \frac{5}{12}$$

Kết luận :

$$A_{max} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Juliel**: 23-04-2016 - 19:54

Juliel Đã gửi 23-04-2016 - 20:39

> *Vào lúc 23 Tháng 4 2016 - 13:37, huya1k43pbc đã nói:*
>
> Bài 38 : $Cho x, y, z > 0; \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{16}{x+y+z}. MaxP = \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz}$(Thi thử sở Hà tĩnh)

Lời giải :

Gỉa thiết đã cho có thể viết được dưới dạng :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}=13$$

Và :

$$P=\left(1-\frac{y}{x}\right)\left(1-\frac{z}{y}\right)\left(1-\frac{x}{z}\right)$$

Đặt $a=\frac{y}{x}, b=\frac{z}{y}, c=\frac{x}{z}$ thì $abc=1$. Gỉa thiết đã cho trở thành $a+b+c+ab+bc+ca=13$.

Và biểu thức trở thành :

$$P=(1-a)(1-b)(1-c)=(1-abc)+(ab+bc+ca-a-b-c)=13-2(a+b+c)$$

Sử dụng hai giả thiết :

$$(a+b)+c(a+b)+\frac{1}{c}+c=13 \Leftrightarrow (a+b)(c+1)=13-\frac{1}{c}-c \Leftrightarrow a+b=\frac{13c-c^2-1}{c(c+1)}$$

Thay vào P :

$$P=13-2\left(\frac{13c-c^2-1}{c(c+1)}+c\right)=\frac{-2c^3+13c^2-13c+2}{c(c+1)}=f(c), c>0$$

$$f'(c)=\frac{-2(c^2-3c+1)(c^2+5c+1)}{c^2(c+1)^2}$$

Từ đó dễ dàng thấy :

$$f_{max}=\sqrt{5} \Leftrightarrow c=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Từ đó :

Gía trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$, đạt được khi chẳng hạn $a=c=\frac{3+\sqrt{5}}{2}, b=\frac{1}{2}\left(7-3\sqrt{5}\right)$ tức $y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.x=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}.z$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Juliel**: 23-04-2016 - 20:39

---

phamngochung9a Đã gửi 23-04-2016 - 21:01

> *Vào lúc 19 Tháng 4 2016 - 21:35, quanguefa đã nói:*
>
> **Bài 37. (trích đề KSCL Quảng Nam)**
>
> Cho a, b, c dương thỏa: $\frac{4a}{b}(1+\frac{2c}{b})+\frac{b}{a}(1+\frac{c}{a})=6$
>
> Tìm GTNN: $P=\frac{bc}{a(b+2c)}+\frac{2ca}{b(c+a)}+\frac{2ab}{c(2a+b)}$

Đổi biến: $(a;b;c) \rightarrow \left(\frac{a}{2};b;\frac{c}{2}\right)$

Ta cần tìm GTNN của $P=\frac{bc}{a\left (b+c \right)}+\frac{ca}{b\left (c+a \right)}+\frac{2ab}{c\left (a+b \right)}$

Giả thiết trở thành:

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{ac}{b^{2}}+\frac{bc}{a^{2}}=3\\\Rightarrow 3\geq \frac{a^{2}+b^{2}}{ab}+c.\frac{\left (a+b \right)^{2}}{ab\left (a+b \right)}\\\geq \frac{\left (a+b \right)^{2}}{2ab}+c.\frac{a+b}{ab}$

$\Rightarrow \frac{ab}{a+b}\geq \frac{a+b}{6}+\frac{c}{3}$

Khi đó:

$P\geq \frac{\left (ac+bc \right)^{2}}{abc\left (a+b+2c \right)}+\frac{2}{c}\left (\frac{a+b}{6}+\frac{c}{3} \right)\geq \frac{4c}{a+b+2c}+\frac{a+b}{3c}+\frac{2}{3}$

Đặt $\frac{a+b}{c}=t$, ta có: $3\geq 2+2\frac{c}{\sqrt{ab}}\Rightarrow \frac{a+b}{c}\geq 4$

$P\geq \frac{4}{t+2}+\frac{t}{3}+\frac{2}{3}$

Khảo sát hàm số trên với $t\geq 4$, ta chứng minh được $P\geq \frac{8}{3}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 23-04-2016 - 21:04

---

phamngochung9a Đã gửi 23-04-2016 - 21:36

Bài 39 (Đề thi thử của sở GD-ĐT Hà Nội năm 2016)

Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^{2}+y^{2}+z^{2}=xy+xz+10yz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=8xyz-\frac{3x^{3}}{y^{2}+z^{2}}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 23-04-2016 - 21:38
Câu 40 trùng với câu 10 rồi

Dinh Xuan Hung Đã gửi 23-04-2016 - 21:39

> *Vào lúc 23 Tháng 4 2016 - 21:36, phamngochung9a đã nói:*
>
> **Bài 39** (Đề thi thử của sở GD-ĐT Hà Nội năm 2016)
>
> Xét các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^{2}+y^{2}+z^{2}=xy+xz+10yz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $$P=8xyz-\frac{3x^{3}}{y^{2}+z^{2}}$$

Đặt $x=4a;y=b;z=c$ $(a,b,c>0)$

Khi đó $P=32abc-\frac{192a^3}{b^2+c^2}$

$GT\Rightarrow 16a^2+b^2+c^2=4ab+4ac+10bc\Leftrightarrow 16a^2+(b+c)^2=4a(b+c)+12bc$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có

$4a(b+c)+12bc\leq 4a^2+(b+c)^2+12bc\Leftrightarrow 16a^2+(b+c)^2\leq 4a^2+(b+c)^2+12bc\Leftrightarrow a^2\leq bc\Leftrightarrow a^3\leq abc$

$\frac{a^3}{b^2+c^2}\leq \frac{a^3}{2bc}\leq \frac{a^3}{2a^2}=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow P\geq 31a^3-96a=f(a)$

$f'(a)=96a^2-96=0\Leftrightarrow a=1$

$\Rightarrow Min P=\underset{(0;+\infty)}{min}f(a)=f(1)=-64$

Dấu "=" xảy ra khi $\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2a=b+c & & \\ a^2=bc & & \\ a=1 & & \end{matrix}\right.\Leftrightarrow a=b=c=1\Leftrightarrow x=4;y=z=1$

Juliel Đã gửi 23-04-2016 - 22:21

Bài 40 (Thi thử ĐH 2014 THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Cho a,b,c>0 thoả $\left (3a+2b+c \right)\left (\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+ \dfrac{3}{c}\right)=30$. Tìm GTLN :

$P=\frac{b+2c-7\sqrt{72a^2+c^2}}{a}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 24-04-2016 - 15:12

Dinh Xuan Hung Đã gửi 23-04-2016 - 23:18

> *Vào lúc 23 Tháng 4 2016 - 22:21, Juliel đã nói:*
>
> Bài 40 (Thi thử ĐH 2014 THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)
>
> Cho a,b,c>0 thoả $\left (3a+2b+c \right)\left (\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+ \dfrac{3}{c}\right)=30$. Tìm GTLN :
>
> $P=\frac{b+2c-7\sqrt{72a^2+c^2}}{a}$

Đặt $b=xa,\ c=ya \Rightarrow x,y>0$. Giả thiết bài toán trở thành $(3+2x+y)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=30$

$$\Leftrightarrow 20=2x+\frac{6}{x}+y+\frac{9}{y}+\frac{6x}{y}+\frac{2y}{x}=\frac{x}{2}+\frac{3x}{2y}+\left(\frac{6}{x}+\frac{3}{2}x\right)+\left(y+\frac{9}{y}\right)+\left(\frac{9x}{2y}+\frac{2y}{x}\right)$$

$$\geq \frac{x}{2}+\frac{3x}{2y}+6+6+6 \Rightarrow x+\frac{3x}{y}\leq 4 \Rightarrow x\leq \frac{4y}{y+3}$$

Ta có $P=x+2y-7\sqrt{72+y^2}\leq \frac{4y}{y+3}+2y-7\sqrt{72+y^2}=f(y)$.

Xét hàm số $f(y)$ với $y>0$, ta có

$$f'(y)=\frac{12}{(y+3)^2}+2-\frac{7y}{\sqrt{72+y^2}} \text{ và } f''(y)=-\frac{24}{(y+3)^2}-\frac{504}{\sqrt{(72+y^2)^3}}<0,\ \forall y>0$$

(http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_04_2016/post-125595-0-21580600-1461428281.png)

Suy ra $f'(y)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $f'(3)=0 \Rightarrow f'(y)=0 \Leftrightarrow y=3$.

Lập bảng biến thiên ta suy ra $f(y) \le f(3) = -55$ hay $P \le -55$.

Đẳng thức xảy ra khi $y=3, x=2 \Leftrightarrow b=2a, c=3a$. Vậy $\max P = -55$.

(http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_04_2016/post-125595-0-90955400-1461428283.png)

Trang 4 / 11

Trở lại Bất đẳng thức và cực trị · Chủ đề chưa đọc tiếp theo →

Diễn đàn Toán học → Toán Trung học Phổ thông và Thi Đại học → Bất đẳng thức và cực trị

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung , 18-03-2016 - 21:13

VODANH9X Đã gửi 24-04-2016 - 12:28

> *Vào lúc 19 Tháng 3 2016 - 22:44, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> 12 Cho a, b, c là các số thực thoả mãn $\left(\frac{a+b+c}{2016}\right)^2 \leq 4abc$. Tìm GTLN của biểu thức:
>
> $$P = \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{b}}{b+\sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{c}}{c+\sqrt{ab}}$$

Em xin chiến bài này.

Ta có P=$\sum \frac{\sqrt{a}}{a+\sqrt{bc}} \leq \sum \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a\sqrt{bc}}}$

$= \sum \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{bc}} \leq \frac{1}{2}\sum \frac{1}{\sqrt{bc}}$

$= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}} \leq \frac{a+b+c}{\sqrt{abc}}$

Ta lại có $\frac{(a+b+c)^2}{2016^2} \leq 4abc$

Suy ra:$\frac{a+b+c}{\sqrt{abc}} \leq \frac{1}{1008}$

Suy ra P $\leq \frac{1}{1008}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 24-04-2016 - 15:12
LaTeX

Dinh Xuan Hung Đã gửi 26-04-2016 - 21:23

Bài 40 (ĐỀ THI THỬ LẦN 01 QUỲNH LƯU 3 – NGHỆ AN-Năm 2016)

Cho các số dương x, y . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2+y^2}} - \frac{2}{3(x+y)^3}$$

Đang tải [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

Bài 41 (ĐỀ THI THỬ TỈNH NAM ĐỊNH-Năm 2016)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xy + xz + 1 = x$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = (xy + xz + 2)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{4}{3z}\right)$

Bài 42 (THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình-2016)

Cho $a, b, c \in [1; +\infty)$ thỏa mãn $3(a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab$.Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a + b)^2 + a} + \frac{a}{a + c^2}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 01-05-2016 - 20:53

---

rocket Đã gửi 28-04-2016 - 15:32

Bài 43:Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2016 (lần 1)

Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi, tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{(a + c)(a + 4b + c)(a + b + c)^3}{abc\left[5(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca\right]}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 28-04-2016 - 17:37
Thêm STT

---

ineX Đã gửi 28-04-2016 - 22:36

Bài 40:

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}} \le \frac{2}{x + y}$$

Thật vậy:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2 + y^2}}\right)^2 - \frac{4}{(x + y)^2} \le \frac{8x^2 + 8y^2}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)} - \frac{4}{(x + y)^2} = \frac{-4(x - y)^4}{(x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2)(x + y)^2} \le 0$$

DO đó

$$P \le \frac{2}{x + y} - \frac{2}{3(x + y)^3}$$

Đặt $\frac{1}{x + y} = t$ với $t > 0$

xét hàm $f(t) = f(t) = 2t - \frac{2t^2}{3} \Rightarrow f'(t) = 2 - 2t^2 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -1$

Lập bảng biến thiên ta được $MaxP = \frac{4}{3}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **ineX**: 28-04-2016 - 23:01

---

ineX Đã gửi 28-04-2016 - 22:52

> *Vào lúc 26 Tháng 4 2016 - 21:23, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> Bài 41 (ĐỀ THI THỬ TỈNH NAM ĐỊNH-Năm 2016)
>
> Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xy + xz + 1 = x$
>
> Tìm giá trị lớn nhất của $P = (xy + xz + 2)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{4}{3z}\right)$

Có : $P = (1 + x)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{4}{3z}\right)$

Đổi $\frac{1}{x} = t$ thì $y + z + t = 1$

Có $0 < y, x, t < 1$ nên $1 - \frac{4}{3z} < 0$

Xét: $\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{t}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{yt}}\right)^2 \geq \left(1 + \frac{2}{y + t}\right)^2 = \left(1\frac{2}{1 - z}\right)^2 \Rightarrow P \leq \left(1 + \frac{2}{1 - z}\right)^2\left(1 - \frac{4}{3z}\right)$

Xét hàm: $f(z) = \left(1 + \frac{2}{1 - z}\right)^2\left(1 - \frac{4}{3z}\right) = \frac{(z - 3)^2}{(z - 1)^2}\left(\frac{3z - 4}{3z}\right)$

với $0 < z < 1$

Có $f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$

Đến đây lập bảng biến thiên ta thu được $MaxP = \frac{-125}{3} khix = 4, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{2}$

Juliel Đã gửi 29-04-2016 - 21:38

> *Vào lúc 26 Tháng 4 2016 - 21:23, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> Bài 42 (THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình-2016)

Cho $a, b, c \in [1; +\infty)$ thỏa mãn $3(a+b+c) = a^2+b^2+c^2+2ab$.Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{(a+b)^2+a} + \frac{a}{a+c^2}$$

Lời giải :

Giả thiết đã cho có thể viết dưới dạng :

$$3(a+b+c) = (a+b)^2+c^2$$

Áp dụng BĐT AM-GM :

$$3(a+b+c) = (a+b)^2+c^2 \leq \frac{1}{2}(a+b+c)^2 \Leftrightarrow a+b+c \leq 6 \Leftrightarrow b+c \leq 6-a$$

Theo BĐT Cauchy-Schwarz :

$$P \geq \frac{\left(a+\sqrt{a}\right)^2}{a^2+(b+c)^2+2a} = \frac{\left(a+\sqrt{a}\right)^2}{5a+3(b+c)} \geq \frac{\left(a+\sqrt{a}\right)^2}{5a+3(6-a)} = \frac{\left(a+\sqrt{a}\right)^2}{2a+18} = f(a)$$

Dễ dàng thấy $f(a)$ đồng biến trên $[1, \infty)$ nên $P \geq f(a) \geq f(1) = \frac{1}{5}$

Kết luận :

Gía trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{5}$, đạt được khi $a = 1, b = 2, c = 3$.

Juliel Đã gửi 29-04-2016 - 21:47

Bài 43 (Thi thử THPT Quốc gia 2016 THPT Lý Tự Trọng, Nam Định)

Cho a, b, c dương thoả $a+b+c = 1$. Tìm GTNN :

$$P = \frac{a^2}{(1-a)^2+5bc} + \frac{16b^2-27(a+bc)^2}{36(a+c)^2}$$

Bài 44. Cho a, b, c dương có tích bằng 1. Tìm GTNN :

$$P = \frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+y+z}} + \frac{y^3+1}{\sqrt{y^4+z+x}} + \frac{z^3+1}{\sqrt{z^4+x+y}} - \frac{8(xy+yz+zx)}{xy+yz+zx+1}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 01-05-2016 - 20:52

---

ineX Đã gửi 30-04-2016 - 22:28

Bài 45: Đề thi thử trường Đại học Hồng Đức

Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{3}{2}(xyz)^2 + x^3+y^3+z^3 - xy - yz - zx + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 01-05-2016 - 20:53

Dinh Xuan Hung Đã gửi 01-05-2016 - 11:28

> *Vào lúc 29 Tháng 4 2016 - 21:47, Juliel đã nói:*
>
> Bài 43 (Thi thử THPT Quốc gia 2016 THPT Lý Tự Trọng, Nam Định)
>
> Cho a, b, c dương thoả $a + b + c = 1$. Tìm GTNN :
>
> $$P = \frac{a^2}{(1-a)^2 + 5bc} + \frac{16b^2 - 27(a + bc)^2}{36(a + c)^2}$$

Ta có: $P = \dfrac{a^2}{(b+c)^2+5bc} + \dfrac{16b^2 - 27\left[a(a+b+c)+bc\right]^2}{36(a+c)^2}$

$$= \frac{a^2}{(b+c)^2+5bc} + \frac{16b^2 - 27\left[(a+b)(a+c)\right]^2}{36(a+c)^2} = \frac{a^2}{(b+c)^2+5bc} + \frac{4b^2}{9(a+c)^2} - \frac{3}{4}(a+b)^2$$

Ta lại có $\dfrac{a^2}{(b+c)^2+5bc} \ge \dfrac{a^2}{(b+c)^2 + \frac{5}{4}(b+c)^2} = \dfrac{4a^2}{9(b+c)^2}$

Do đó $P \ge \dfrac{4a^2}{9(b+c)^2} + \dfrac{4b^2}{9(a+c)^2} - \dfrac{3}{4}(a+b)^2 \ge \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c}\right)^2 - \dfrac{3}{4}(a+b)^2$

$$\ge \frac{2}{9}\left(\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{ba+bc}\right)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 \ge \frac{2}{9}\left(\frac{(a+b)^2}{ab+ac+ba+bc}\right)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2$$

$$\ge \frac{2}{9}\left(\frac{(a+b)^2}{2ab+(a+b)c}\right)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 \ge \frac{2}{9}\left(\frac{(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{2}+(a+b)c}\right)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2.$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{2}{9}\left(\frac{(1-c)^2}{\frac{(1-c)^2}{2}+(1-c)c}\right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2 = \frac{8}{9}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2 - \frac{3}{4}(1-c)^2.$$

[(http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_05_2016/post-125595-0-49234900-1462076897.png)](http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_05_2016/post-125595-0-49234900-1462076897.png)

Ta có $\frac{8}{9}\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2=\frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{1+c}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2$.

$\Rightarrow P\geq\frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{1+c}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2$.

Theo giả thiết $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1\Rightarrow c\in(0;1)$.

Xét hàm số $f(c)=\frac{8}{9}\left(1-\frac{2}{1+c}\right)^2-\frac{3}{4}(1-c)^2$ với $c\in(0;1)$.

Ta có $f'(c)=\frac{16}{9}\left(1-\frac{2}{c+1}\right)\frac{2}{(c+1)^2}-\frac{3}{2}(c-1)$.

$\Rightarrow f'(c)=0\Leftrightarrow\frac{32}{9}(c-1)\left(\frac{1}{(c+1)^3}-\frac{27}{64}\right)=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{3}$ vì $c\in(0;1)$.

Bảng biến thiên

c	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		$\searrow$	$-\frac{1}{9}$	$\nearrow$	

Từ BBT $\Rightarrow f(c)\geq-\frac{1}{9}$, $\forall c\in(0;1)$. Do đó $P\geq-\frac{1}{9}$.

Vậy $\text{Min}\,P=-\frac{1}{9}$, giá trị nhỏ nhất đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

[(http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_05_2016/post-125595-0-43600300-1462076902.png)](http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_05_2016/post-125595-0-43600300-1462076902.png)

tritanngo99 Đã gửi 01-05-2016 - 19:57

Bài 44:
Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{ab^2}{(b^2+ac)(c+a)}+\frac{16c^4}{(c+a)^4}$$

Bài 45:
Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $abc(a+b+c)=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}-\frac{8bc}{bc(b^2+c^2)+8}$$

Bài 46:
Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $x+y+1=z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z^2+2}{z+xy}$$

Bài 47:
Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x^2=y^2+z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{(1+2xy)z}{(x^2+y^2)(1+z^2)}+\frac{3z^2}{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}}$$

Bài 48:
Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x\geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{xz}{y^2+yx}+\frac{y^2}{xz+yz}+\frac{2(x+3z)}{x+2z}$$

Bài 49: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x^2+y^2+z^2=3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2}{y^2+yz}+\frac{y}{z+x}+\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$$

Bài 50: Cho x,y là các số dương thỏa mãn điều kiện: $x^2+y^2=xy+1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^3}{y^3+1}+\frac{y^3}{x^3+1}+\frac{24\sqrt{xy}}{x+y+2}$$

(Nguồn: Trích trong tuyển tập các đề thi thử đại học 2015 của thầy Phạm Tuấn Khải)

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanngo99**: 01-05-2016 - 21:03
Lần sau bạn nhớ ghi rõ nguồn

---

hoangson2598 Đã gửi 01-05-2016 - 20:43

Bài 51

Cho $\frac{1}{3}<x\leq\frac{1}{2}$ và $y\geq 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất:

$$P=x^2+y^2+\frac{x^2y^2}{((4x-1)y-x)^2}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 01-05-2016 - 20:52

Juliel Đã gửi 01-05-2016 - 20:48

> *Vào lúc 30 Tháng 4 2016 - 22:28, ineX đã nói:*
>
> Bài 45: Đề thi thử trường Đai hoc Hồng Đức
>
> Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$
>
> Tìm giá trị nhỏ nhất của:
>
> $$P=\frac{3}{2}(xyz)^2+x^3+y^3+z^3-xy-yz-zx+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

Lời giải :

Ta sẽ chứng minh hai kết quả sau :

Nếu $x,y,z>0$ thoả $x+y+z=3$ thì :

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx$

(2) $x^3+y^3+z^3+\frac{3}{2}(xyz)^2\geq\frac{9}{2}$

Chứng minh (1) :

Bất đẳng thức tương đương :

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq \frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-x^2-y^2-z^2\right]\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{z}\geq 9$$

Điều này đúng theo BĐT AM-GM :

$$x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x}\geq 3x$$

$$y^2+\sqrt{y}+\sqrt{y}\geq 3x$$

$$z^2+\sqrt{z}+\sqrt{z}\geq 3x$$

Chứng minh (2) :

Đặt $p=x+y+z=3$, $q=xy+yz+zx$ và $r=xyz$. Áp dụng BĐT Schur :

$$r\geq \frac{4pq-p^3}{9}=\frac{4q-9}{3}$$

Cũng có :

$$x^3+y^3+z^3=3xyz+(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]=3r+3(9-3q)=3r-9q+27$$

Suy ra :

$$x^3+y^3+z^3+\frac{3}{2}(xyz)^2=(3r-9q+27)+\frac{3}{2}r^2\geq 3.\frac{4q-9}{3}-9q+81+\frac{3}{2}.\left(\frac{4q-9}{3}\right)^2=\frac{8}{3}q^2-17q+\frac{63}{2}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh :

$$\frac{8}{3}q^2-17q+\frac{63}{2}\geq \frac{9}{2}\Leftrightarrow q\leq 3\ \vee q\geq \frac{27}{8}$$

Điều này là đúng vì $q=xy+yz+zx\leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2=3$.

Kết luận :

$$MinP=\frac{9}{2}\Leftrightarrow x=y=z=1$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Juliel**: 01-05-2016 - 20:49

Juliel Đã gửi 01-05-2016 - 21:08

> *Vào lúc 01 Tháng 5 2016 - 19:57, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 46:
>
> Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $x+y+1=z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $P=\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z^2+2}{z+xy}$

Lời giải :

Theo BĐT Cauchy-Schwarz :

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}\geq \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2xyz}=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+2xy(x+y+1)}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+2xy(x+y)}=\frac{x+y}{x+y+2xy}\geq \frac{x+y}{x+y+\frac{1}{2}(x+y)^2}=\frac{2}{x+y+2}=\frac{2}{z+1}$$

Theo AM-GM :

$$\frac{z^2+2}{z+xy} \geq \frac{4(z^2+2)}{4z+(x+y)^2} = \frac{4(z^2+2)}{4z+(1-z)^2} = \frac{4(z^2+2)}{(z+1)^2}$$

Từ đó :

$$P \geq \frac{2}{z+1} + \frac{4(z^2+2)}{(z+1)^2} = f(z)$$

Khảo sát hàm số $f(z)$ với $z > 0$ ta được :

$$MinP = \frac{13}{4} \Leftrightarrow x = y = 1, z = 3$$

Hoang Duong

Đã gửi 01-05-2016 - 22:02

Bài 51: <HSG 11 Hà Tĩnh 2015-2016>

với a,b,c>0 và $a^2+b^2+c^2+2 = a^2b^2c^2$

Chứng minh rằng: $abc(a+b+c) \geq 2(ab+bc+ca)$
<Nếu lạc chủ đề hoặc đã có xin mod xoá dùm>

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 04-05-2016 - 22:01

ZOT Murloc

Đã gửi 02-05-2016 - 01:23

> *Vào lúc 01 Tháng 5 2016 - 19:57, tritanng099 đã nói:*
>
> Bài 48:
>
> Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $P = \frac{xz}{y^2+yx} + \frac{y^2}{xz+yz} + \frac{2(x+3z)}{x+2z}$

P được viết lại như sau

$$P = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}+1} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+1} + 2\frac{\frac{x}{z}+3}{\frac{x}{z}+2}$$

Đặt

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = a \\ \frac{y}{z} = b \end{cases} \Rightarrow ab = \frac{x}{z} \geq 1$$

Biểu thức P tương đương với

$$P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + 2.\frac{ab+3}{ab+2} = \frac{a^2}{ab+a} + \frac{b^2}{ab+b} + 2.\frac{ab+3}{ab+2}$$

$$\geq \frac{(a+b)^2}{2ab+a+b} + 2.\frac{ab+3}{ab+2}(C-S) \geq \frac{(a+b)^2}{\frac{(a+b)^2}{2}+a+b} + 2.\frac{ab+3}{ab+2}$$

$$= \frac{2(a+b)}{a+b+2} + 2.\frac{ab+3}{ab+2} = 2 - \frac{4}{a+b+2} + 2.\frac{ab+3}{ab+2}$$

Theo BĐT AM-GM ta có

$$-\frac{4}{a+b+2} \geq \frac{-4}{2\sqrt{ab}+2} = \frac{-2}{\sqrt{ab}+1}$$

Suy ra

$$P \geq 2 - \frac{2}{\sqrt{ab}+1} + 2.\frac{ab+3}{ab+2}$$

Đặt $t = \sqrt{ab}$ $t \geq 1$

Ta sẽ chứng minh

$$2 - \frac{2}{t+1} + 2.\frac{a^2+3}{a^2+2} \geq \frac{11}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(2t^3+t^2+5t+3\right)}{(t+1)\left(t^2+2\right)} \geq \frac{11}{3}$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t-2)^2 \geq 0$$

BĐT trên luôn đúng

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 1 \vee a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = z \vee x = 2y = 4z$

Vậy $minP = \frac{11}{3} \Leftrightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow x = y = z \vee x = 2y = 4z$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **ZOT Murloc**: 02-05-2016 - 01:46

---

longatk08 Đã gửi 02-05-2016 - 08:00

Bài 52: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $x(y^2+z^2) = yz(y+z)$.Tìm GTNN của:

$$\frac{1}{(x+1)^2}+\left(\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\right)^2+\frac{2yz(1-x)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

(Trích đề thi thử Hoằng Hóa 4-Thanh Hóa)

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 04-05-2016 - 22:02

longatk08

Đã gửi 02-05-2016 - 08:02

> *Vào lúc 01 Tháng 5 2016 - 20:48, Juliel đã nói:*
>
> Đặt $p=x+y+z=3$, $q=xy+yz+zx$ và $r=xyz$. Áp dụng BĐT Schur :
>
> $$r\geq\frac{4pq-p^3}{9}=\frac{4q-9}{3}$$
>
> Cũng có :
>
> $$x^3+y^3+z^3=3xyz+(x+y+z)\left[(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right]=3r+3(9-3q)=3r-9q+27$$

Bạn có thể tránh dùng BĐT Schur bằng cách sử dụng nguyên lí Dirichle, giả sử $(x^2-1)(y^2-1)\geq 0$

ZOT Murloc

Đã gửi 02-05-2016 - 09:30

> *Vào lúc 02 Tháng 5 2016 - 08:00, longatk08 đã nói:*
>
> Bài 52: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa $x(y^2+z^2)=yz(y+z)$.Tìm GTNN của:
>
> $$\frac{1}{(x+1)^2}+\left(\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\right)^2+\frac{2yz(1-x)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$
>
> (Trích đề thi thử Hoằng Hóa 4-Thanh Hóa)

Đặt $P=\frac{1}{(x+1)^2}+\left(\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\right)^2+\frac{2yz(1-x)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$

Theo BĐT AM-GM ta có

$$\left(\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\right)^2\geq\frac{4yz}{(y+1)(z+1)}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2yz}{(y+1)(z+1)}.\frac{x+3}{x+1}\qquad (*)$$

Theo giả thiết ta có

$$x\left(y^2+z^2\right)=yz(y+z)\le\left(\frac{y^2+z^2}{2}\right).(y+z)\Leftrightarrow 2x\le y+z$$

$$yz(y+z)=x\left(y^2+z^2\right)\ge\frac{(y+z)^2}{2}.x\Leftrightarrow\frac{2yz}{y+z}\ge x$$

Vậy nên

$$(*)\Rightarrow P\ge\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2yz}{y+z}}{\frac{yz}{y+z}+1+\frac{1}{y+z}}.\frac{x+3}{x+1}$$

$$\ge\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2yz}{y+z}}{\frac{yz}{y+z}+1+\frac{1}{2x}}.\frac{x+3}{x+1}$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}+2.\left(1-\frac{\frac{1}{2x}+1}{\frac{yz}{y+z}+1+\frac{1}{2x}}\right).\frac{x+3}{x+1}$$

$$\ge\frac{1}{(x+1)^2}+2.\left(1-\frac{\frac{1}{2x}+1}{\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x}}\right).\frac{x+3}{x+1}$$

$$=\frac{1}{(1+x)^2}+2.\frac{x^2.(x+3)}{(x+1)^3}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{(1+x)^2}+2.\frac{x^2.(x+3)}{(x+1)^3}\ge\frac{91}{108}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(5x+17)(5x-1)^2}{108(x+1)^3}\ge 0$$

BĐT trên luôn đúng

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{5}$

Vậy $MinP = \frac{91}{108} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{5}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **ZOT Murloc**: 02-05-2016 - 09:35

Juliel

Đã gửi 02-05-2016 - 17:09

> *Vào lúc 01 Tháng 5 2016 - 22:02, Hoang Duong đã nói:*
>
> Bài 51: <HSG 11 Hà Tĩnh 2015-2016>
>
> với a,b,c>0 và $a^2 + b^2 + c^2 + 2 = a^2b^2c^2$
>
> Chứng minh rằng: $abc(a + b + c) \geq 2(ab + bc + ca)$
> <Nếu lạc chủ đề hoặc đã có xin mod xoá dùm>

Lời giải :

Ta có đẳng thức :

$$\frac{xy}{(x+z)(y+z)} + \frac{yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{zx}{(z+y)(x+y)} + \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 1$$

Gỉa thiết đã cho viết dưới dạng :

$$\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{2}{a^2b^2c^2} = 1$$

Như vậy ta thấy phải tồn tại các số dương x, y, z thoả :

$$a = \sqrt{\frac{x+y}{z}}, b = \sqrt{\frac{y+z}{x}}, c = \sqrt{\frac{z+x}{y}}$$

Khi đó ta cần chứng minh :

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}}\right)$$

Điều này là đúng vì :

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} \leq \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}} \leq \frac{\sqrt{2x}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$$

Thiết lập các kết quả tương tự rồi cộng vế theo vế, ta thu được điều phải chứng minh.

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Juliel**: 02-05-2016 - 17:10

Juliel

Đã gửi 02-05-2016 - 17:43

> *Vào lúc 01 Tháng 5 2016 - 19:57, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 50: Cho x,y là các số dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 = xy + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
>
> $P = \frac{x^3}{y^3+1} + \frac{y^3}{x^3+1} + \frac{24\sqrt{xy}}{x+y+2}$
>
> (Nguồn: Trích trong tuyển tập các đề thi thử đại học 2015 của thầy Phạm Tuấn Khải)

Lời giải :

Giả thiết đã cho tương đương :

$$x^3 + y^3 = x + y$$

Ta có :

$$\frac{x^3}{y^3+1} + \frac{y^3}{x^3+1} = \frac{x^3+y^3+1}{x^3+1} + \frac{x^3+y^3+1}{y^3+1} - 2 = \left(x^3+y^3+1\right)\left(\frac{1}{x^3+1} + \frac{1}{y^3+1}\right) - 2 = \left(x^3+y^3+1\right).\frac{x^3+y^3+2}{(x^3+1)(y^3+1)} - 2$$

Ta cũng chứng minh được :

$$(1+x^3)(1+y^3) \geq \frac{(x+y)^3}{2}$$

Thế nên :

$$\frac{x^3}{y^3+1} + \frac{y^3}{x^3+1} \leq \frac{2(x^3+y^3+1)(x^3+y^3+2)}{(x+y)^3} - 2 = \frac{2(x+y+1)(x+y+2)}{(x+y)^3} - 2$$

Và :

$$\frac{24\sqrt{xy}}{x+y+2} \leq \frac{12(x+y)}{x+y+2}$$

Vậy nếu ta đặt $x + y = t$ thì :

$$P \leq \frac{2(t+1)(t+2)}{t^3} + \frac{12t}{t+2} - 2 = f(t)$$

Ta dễ chứng minh được $t \in (0, 2]$. Khảo sát hàm số $f(t)$ trên $(0, 2]$. Ta được :

$$MaxP = 7 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$$

Trang 5 / 11

Trở lại Bất đẳng thức và cực trị · Chủ đề chưa đọc tiếp theo →

Diễn đàn Toán học → Toán Trung học Phổ thông và Thi Đại học → Bất đẳng thức và cực trị

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung , 18-03-2016 - 21:13

tritanngo99 Đã gửi 02-05-2016 - 17:47

Nếu có 10 like mình sẽ dành trọn bộ cho cách giải hay và sáng tạo này.Cảm ơn bạn

Bài 54: [Crux] Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:
$a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$

Bài 55: [Crux] Giả sử x,y là các số thực không âm thỏa mãn: $x^2+y^3\geq x^3+y^4$. Chứng minh rằng: $x^3+y^3\leq 2$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 04-05-2016 - 22:03

phamngochung9a Đã gửi 02-05-2016 - 19:44

> *Vào lúc 01 Tháng 5 2016 - 19:57, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 44:
> Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $P=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{ab^2}{(b^2+ac)(c+a)}+\frac{16c^4}{(c+a)^4}$
>
> Bài 45:
> Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $abc(a+b+c)=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $P=\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}-\frac{8bc}{bc(b^2+c^2)+8}$
>
> Bài 47:
> Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x^2=y^2+z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
> $P=\frac{(1+2xy)z}{(x^2+y^2)(1+z^2)}+\frac{3z^2}{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}}$

Bài 44:

Đặt $\begin{cases}a=xc\\b=yc\end{cases}$, biểu thức P trở thành:

$$P=\frac{x^2}{(x+y)^2}+\frac{xy^2}{\left(x+y^2\right)(x+1)}+\frac{16}{(x+1)^4}=\frac{x^2}{\left(\sqrt{x}.\sqrt{x}+y.1\right)^2}+\frac{xy^2}{\left(x+y^2\right)(x+1)}+\frac{16}{(x+1)^4}\geq\frac{x^2}{\left(x+y^2\right)(x+1)}+\frac{xy^2}{\left(x+y^2\right)(x+1)}+\frac{16}{(x+1)^4}=\frac{x}{x+1}+\frac{16}{(x+1)^4}=\frac{16}{(x+1)^4}-\frac{}{x}$$

Đặt $\frac{1}{x+1}=t$, ta có:

$P\geq 16.t^4-t+1$. Khảo sát hàm số trên với $t>0$, ta được: $P\geq\frac{13}{16}$

Bài 45:

$$P=\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}-\frac{8bc}{bc\left(b^2+c^2\right)+8}\geq\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}}-\frac{4bc}{b^2c^2+4}$$. Từ đề bài, ta có:

$a^2+ab+ca=\frac{4}{bc}$

$$\Rightarrow P\geq\frac{1}{\sqrt{bc+\frac{4}{bc}}}-\frac{4}{bc+\frac{4}{bc}}$$

Đang xử lý toán: 98%

Đặt $t = \dfrac{1}{\sqrt{bc + \frac{4}{bc}}} \Rightarrow t \le \dfrac{1}{2}$, ta có:

$P \ge t - 4t^2 \ge -\dfrac{1}{2}$

Bài 47:

Ta có:

$$[z(2xy+1)]^2 = \left[z.2xy + 1.\left(x^2 - y^2\right)\right]^2 \le \left(z^2+1\right)\left(x^2+y^2\right)^2 \Rightarrow z(2xy+1) \le \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+z^2}$$

Vậy:

$$P \le \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{3z^2}{\left(1+z^2\right)\sqrt{1+z^2}} = \frac{4}{\sqrt{z^2+1}} - \frac{3}{\left(\sqrt{1+z^2}\right)^3}$$

Đặt $t = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, ta có: $P \le 4t - 3t^3 \le \dfrac{16}{9}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 02-05-2016 - 19:57

---

phamngochung9a Đã gửi 02-05-2016 - 20:05

Các đề thi thử THPT Quốc gia của thầy Đặng Thành Nam

Bài 56: Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = ab + bc + ca + (a+b+3c)\sqrt{1 - a^2 - b^2 - c^2}$

Bài 57: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \le a \le b \le c \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - \frac{1}{10}\left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$$

Bài 58: Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{8}{(a+b)^2} + \frac{3}{(b+c)^2} + \frac{3}{(c+a)^2}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 04-05-2016 - 22:04

ZOT Murloc Đã gửi 02-05-2016 - 22:18

> *Vào lúc 02 Tháng 5 2016 - 20:05, phamngochung9a đã nói:*
>
> **Bài 58:** Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $$P = \frac{8}{(a+b)^2} + \frac{3}{(b+c)^2} + \frac{3}{(c+a)^2}$$

Ta sẽ chứng minh 2 BĐT sau

$$\begin{cases} \frac{1}{(a+c)^2} \ge b^2 \\ \frac{1}{(b+c)^2} \ge a^2 \end{cases}$$

Chứng minh BĐT đầu ,BĐT sau tương tự

$\frac{1}{(a+c)^2} \geq b^2 \Leftrightarrow \frac{(ab+bc+ca)^2}{(a+c)^2} - b^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{ac(2ab+2bc+ac)}{(a+c)^2} \geq 0$

BĐT trên đúng. Vậy BĐT phụ được chứng minh

Suy ra

$P \geq \frac{8}{(a+b)^2} + 3a^2 + 3b^2 \geq \frac{8}{(a+b)^2} + \frac{3(a+b)^2}{2} \geq 4\sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Vậy $MinP = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Mong các bạn không ra thêm bài làm loãng topic.
Còn rất nhiều bài chưa làm ở trên

ZOT Murloc Đã gửi 02-05-2016 - 22:26

> *Vào lúc 02 Tháng 5 2016 - 17:47, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 55: [Crux] Giả sử x,y là các số thực không âm thỏa mãn: $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 \leq 2$

Ta có $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4 \Rightarrow x^2 + y^3 + y^2 \geq x^3 + y^2 + y^4$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có $y^4 + y^2 \geq 2y^3$

Do đó: $x^2 + y^3 + y^2 \geq x^3 + 2y^3 \Rightarrow x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2$ (1)

Áp dụng BĐT Cauchy-Swcharz, ta có :

$\left(x^2 + y^2\right)^2 \leq (x+y)\left(x^3 + y^3\right)$

$\leq (x+y)\left(x^2 + y^2\right) \Rightarrow x^2 + y^2 \leq x + y$ (2)

Mặt khác $(x+y)^2 \leq 2\left(x^2 + y^2\right) \leq 2(x+y) \Rightarrow x + y \leq 2$ (3)

Từ (1),(2),(3) suy ra đpcm

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **ZOT Murloc**: 02-05-2016 - 22:35

ZOT Murloc Đã gửi 03-05-2016 - 00:11

> *Vào lúc 01 Tháng 5 2016 - 19:57, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 49: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $P = \frac{x^2}{y^2 + yz} + \frac{y}{z + x} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$

Đặt $\begin{cases} x = a.z \\ y = b.z \end{cases} \qquad (a.b > 0)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 1 = 3ab$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + 1 = ab$

Suy ra

$1 \le ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} ab \ge 1 \\ a+b \ge 2 \end{cases}$

Biểu thức P được viết lại như sau

$P = \frac{a^2}{b^2+b} + \frac{b}{a+1} + \frac{a^2+b^2}{a^2+1}$

$= \frac{a^2(a+1) + b^2(b+1)}{b(a+1)(b+1)} + \frac{a^2+b^2}{a^2+1}$

$= \frac{(a+b)\left(a^2 - ab + b^2 + 1\right)}{b(a+1)(b+1)} + \frac{a^2+b^2}{a^2+1}$

$= \frac{2ab.(a+b)}{b(a+1)(b+1)} + \frac{a^2+b^2}{a^2+1}$

$= \frac{2a.(a+b)}{(a+1)(b+1)} + \frac{a^2+b^2}{a^2+1} \ge \frac{2a.(a+b)}{(a+1)(b+1)} + \frac{a^2+b^2}{a^2+ab}$

$\ge 2\sqrt{\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{(a+1)(b+1)}} \ge 4\sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a+b+2)^2}}$

$= 4.\frac{x+y}{x+y+2} = 4\left(1 - \frac{2}{x+y+2}\right) \ge 4.\left(1 - \frac{2}{2+2}\right) = 2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 1 \Leftrightarrow x = y = z$

Vậy $MinP = 2 \Leftrightarrow x = y = z$

---

tritanngo99 Đã gửi 03-05-2016 - 20:08

Bài 57:

Ta có: $(a-b)(b-c)(c-a) \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \sum ab^2 \ge \sum a^2b$

Khi đó: $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{\sum a^2b + \sum ab^2 + 2abc}{abc} \le \frac{2\sum ab^2 + 2abc}{abc}$

Mặt khác ta lại có: $(a-b)(b-c) \ge 0 \;\Leftrightarrow\; ab + bc \ge ac + b^2 \;\Leftrightarrow\; a(ab+bc) \ge a(ac+b^2)$

$\Leftrightarrow\; a^2b + abc \ge a^2c + ab^2 \;\Leftrightarrow\; a^2b + abc + bc^2 \ge \sum ab^2 \;\Leftrightarrow\; \sum ab^2 \le b(a^2 + c^2 + ac)$

Khi đó $P = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} - \frac{1}{10}\left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$

$\le \frac{2\sum ab^2 + 2abc}{abc} - \frac{1}{10}\left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$

$\le \frac{2b(a^2+c^2+ac) + 2abc}{abc} - \frac{1}{10}\left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$

$= 2\left(\frac{a^2+c^2}{ac}+2\right)-\frac{1}{10}\left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$

Đến đặt $t = \left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)$.

$=>P \le f(t) = 2(t+2)-\frac{t^3}{10}$.

Ta đi chứng minh: $t \le \frac{5}{2} \Leftrightarrow a^2+c^2 \le \frac{5}{2}ac$

Thật vậy ta có:

$1 \le a \le c \le 2$. Nên dễ dàng suy ra được: $2 \le \frac{a^2+c^2}{ac} \le \frac{5}{2}. hay. 2 \le t \le \frac{5}{2}$

Đến đây khảo sát hàm f(t) trên (2;5/2)

$=> maxP = \frac{119}{16}$. Dấu = xảy ra khi a=b=1;c=2.

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanng099**: 04-05-2016 - 12:12

---

pndpnd

Đã gửi 03-05-2016 - 23:09

Cho $x, y, z > 0$ và $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm GTNN:

$P = \sqrt{\frac{3}{(x+y)^2}+z^2}+\sqrt{\frac{3}{(y+z)^2}+x^2}+\sqrt{\frac{3}{(x+z)^2}+y^2}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 04-05-2016 - 22:04

---

rocket

Đã gửi 04-05-2016 - 08:07

Bài 59. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$P = (a+b)(b+c)(c+a)+\sqrt{\frac{2016}{a+b+c}}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 04-05-2016 - 22:04

---

tritanng099

Đã gửi 04-05-2016 - 12:12

> *Vào lúc 02 Tháng 5 2016 - 20:05, phamngochung9a đã nói:*
>
> Các đề thi thử THPT Quốc gia của thầy Đặng Thành Nam
>
> **Bài 56:** Với a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2 \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $P = ab+bc+ca+(a+b+3c)\sqrt{1-a^2-b^2-c^2}$
>
> **Bài 57:** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $1 \le a \le b \le c \le 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
>
> $P = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}-\frac{1}{10}\left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$
>
> **Bài 58:** Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> $P = \frac{8}{(a+b)^2}+\frac{3}{(b+c)^2}+\frac{3}{(c+a)^2}$

Bài 57:

Ta có: $(a-b)(b-c)(c-a) \ge 0 \Leftrightarrow \sum ab^2 \ge \sum a^2b$

Khi đó: $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{\sum a^2b+\sum ab^2+2abc}{abc} \le \frac{2\sum ab^2+2abc}{abc}$

Mặt khác ta lại có: $(a-b)(b-c) \ge 0 \Leftrightarrow ab+bc \ge ac+b^2 \Leftrightarrow a(ab+bc) \ge a(ac+b^2)$

$\Leftrightarrow a^2b+abc \ge a^2c+ab^2 \Leftrightarrow a^2b+abc+bc^2 \ge \sum ab^2 \Leftrightarrow \sum ab^2 \le b(a^2+c^2+ac)$

Khi đó $P = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}-\frac{1}{10}\left(\frac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$

$\leq \dfrac{2\sum ab^2 + 2abc}{abc} - \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$

$\leq \dfrac{2b(a^2+c^2+ac)+2abc}{abc} - \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$

$= 2\left(\dfrac{a^2+c^2}{ac}+2\right) - \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{a^2+c^2}{ac}\right)^3$

Đến đặt $t = \left(\dfrac{a^2+c^2}{ac}\right)$.

$=> P \leq f(t) = 2(t+2) - \dfrac{t^3}{10}$.

Ta đi chứng minh: $t \leq \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow a^2 + c^2 \leq \dfrac{5}{2}ac$

Thật vậy ta có:

$1 \leq a \leq c \leq 2$. Nên dễ dàng suy ra được: $2 \leq \dfrac{a^2+c^2}{ac} \leq \dfrac{5}{2}. hay. 2 \leq t \leq \dfrac{5}{2}$

Đến đây khảo sát hàm f(t) trên (2;5/2)

$=> maxP = \dfrac{119}{16}$. Dấu = xảy ra khi a=b=1;c=2.

---

tritanngo99 Đã gửi 04-05-2016 - 15:31

> *Vào lúc 03 Tháng 5 2016 - 23:09, pndpnd đã nói:*
>
> Cho $x, y, z > 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm GTNN:
>
> $P = \sqrt{\dfrac{3}{(x+y)^2} + z^2} + \sqrt{\dfrac{3}{(y+z)^2} + x^2} + \sqrt{\dfrac{3}{(x+z)^2} + y^2}$

Áp dụng BĐT Mincopxki ta có:

$P = \sum \sqrt{\dfrac{3}{(x+y)^2} + z^2} \geq \sqrt{3\left(\sum \dfrac{1}{x+y}\right)^2 + (\sum x)^2}$

Mà $\left(\sum \dfrac{1}{x+y}\right)^2 \geq \dfrac{9}{2\sum x} => P \geq \sqrt{\dfrac{243}{4(\sum x)^2} + (\sum x)^2}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanngo99**: 04-05-2016 - 15:36

---

quangtq1998 Đã gửi 04-05-2016 - 19:16

> *Vào lúc 04 Tháng 5 2016 - 08:07, rocket đã nói:*
>
> Bài 59. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn abc = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $P = (a+b)(b+c)(c+a) + \sqrt{\dfrac{2016}{a+b+c}}$

Ta có :$(ab+bc+ca)^2 \geq abc(a+b+c) \Rightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{a+b+c} \leq (ab+bc+ca)$

$\rightarrow P + 1 \geq \sqrt{(a+b+c)^3} + \sqrt{\dfrac{2016}{a+b+c}}$

Xét $f(t) = t^3 + \dfrac{\sqrt{2016}}{t}$,

$f'(t) = 3t^2 - \dfrac{\sqrt{2016}}{t^2} > 0$ với mọi $t \geq \sqrt{3}$

Nên $f(\sqrt{a+b+c}) \geq f(\sqrt{3})$

Hay $P \geq f(\sqrt{3}) + 1$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quangtq1998**: 04-05-2016 - 19:20

---

tritanngo99 Đã gửi 04-05-2016 - 21:37

Bài 60: Cho a,b,c thuộc [0;1]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P = abc + (1-a)(1-b)(2-c) + \dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} + \dfrac{a}{b+c+1} + \dfrac{b}{a+c+1} + \dfrac{c}{b+a+1}$

Bài 61 Đề thi dự bị THPTQG 2015): Cho các số a,b thuộc $[\frac{1}{2};1]$. Tìm Min của:

$$P=a^5b+ab^5+\frac{6}{a^2+b^2}-3(a+b)$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 04-05-2016 - 22:01

---

tritanng099 Đã gửi 04-05-2016 - 21:57

Bài 62: Cho x,y,z thuộc [1;2]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$E=\frac{2(xy+yz+zx)}{xyz+2(2x+y+z)}+\frac{8}{2x(y+z)+yz+4}-\frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

Dinh Xuan Hung Đã gửi 04-05-2016 - 21:57

> *Vào lúc 04 Tháng 5 2016 - 21:37, tritanng099 đã nói:*
>
> Bài 61 Đề thi dự bị THPTQG 2015): Cho các số a,b thuộc $[\frac{1}{2};1]$. Tìm Min của:
>
> $$P=a^5b+ab^5+\frac{6}{a^2+b^2}-3(a+b)$$

- Do a,b thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2},1\right]$ => $1-a\geq 0, 1-b\geq 0$ => $(1-a)(1-b)\geq 0$ => $ab\geq a+b-1$

Do $a,b\geq\frac{1}{2}$ => $a+b-1\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$ => $a+b-1\geq 0$

Áp dụng bđt $m^4+n^4\geq\frac{(m+n)^4}{8}$

Từ đó ta có:

$$P=a^5b+ab^5+\frac{6}{a^2+b^2}-3(a+b)=ab(a^4+b^4)+\frac{6}{(a+b)^2-2ab}-3(a+b)$$
$$\geq(a+b-1).\frac{(a+b)^4}{8}+\frac{6}{(a+b)^2-2(a+b-1)}-3(a+b)$$
$$=\frac{(a+b)^5-(a+b)^4}{8}+\frac{6}{(a+b)^2-2(a+b)+2}-3(a+b)$$
$$=> P\geq\frac{t^5-t^4}{8}+\frac{6}{t^2-2t+2}-3t$$

(với $t=a+b$)

Ta chứng minh $P\geq -1$ <=> $\frac{t^5-t^4}{8}+\frac{6}{t^2-2t+2}-3t\geq -1$ <=> $(t-2)^2(t^5+t^4+4t^3+10t^2+16)\geq 0$

(Điều này luôn đúng)

Do đó $P\geq -1$ => $P_{min}=-1$ <=> $(a-1)(b-1)=0, a+b=2$ <=> $a=b=1$

---

tritanng099 Đã gửi 04-05-2016 - 22:00

Bài 63:Cho x,y,z thuộc [1;2]. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$F=(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$$

Mở rộng bài 63: Bài 64: Cho a,b,c,d thuộc [1;2]. Chứng minh rằng:
$(a^2+b^2+c^2+d^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}) \le 25$

Bài 65:Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn: $a+b+c \le 2$.Tìm GTNN của biểu thức:
$P = \frac{a\sqrt{a}}{a+\sqrt{ab}+b} + \frac{b\sqrt{b}}{b+\sqrt{bc}+c} + \frac{c\sqrt{c}}{c+\sqrt{ca}+a} + \frac{1}{27\sqrt{abc}}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 04-05-2016 - 22:07

---

nguyenhongsonk612 Đã gửi 04-05-2016 - 22:12

> *Vào lúc 04 Tháng 5 2016 - 21:37, tritanng099 đã nói:*
>
> Bài 60: Cho a,b,c thuộc [0;1]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
> $P = abc + (1-a)(1-b)(2-c) + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{b+a+1}$
>
> Bài 61 Đề thi dự bị THPTQG 2015): Cho các số a,b thuộc $[\frac{1}{2};1]$. Tìm Min của:
> $P = a^5b + ab^5 + \frac{6}{a^2+b^2} - 3(a+b)$

Chỗ bôi xanh sai đề rồi, đề đúng phải là $\sum \frac{1}{1+a^3}$

Giải:

$$P = abc + (1-a)(1-b) + \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) + \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3}$$

Vì $abc \leqslant 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{1+a^3} \leqslant \frac{3}{1+abc}$

Ta sẽ C/m $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1\,(*)$

Giả sử $a \geqslant b \geqslant c$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \leqslant \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+b+1} + \frac{c}{c+b+1} = 1 - \frac{1-a}{b+c+1}$$

cần C/m $(1-a)(1-b)(1-c) - \frac{1-a}{b+c+1} \le 0 \Leftrightarrow (1-b)(1-c)(b+c+1) \leqslant 1$

Áp dụng $AM-GM$ ta được $(1-b)(1-c)(b+c+1) \leqslant \left(\frac{1-b+1-c+b+c+1}{3}\right)^3 = 1$

Vậy $(*)$ được C/m

Có $(1-a)(1-b) = 1-(a+b)+ab \leqslant 1 - 2\sqrt{ab} + ab = (1-\sqrt{ab})^2 \leqslant (1-\sqrt{abc})^2$

$$P \le abc + (1-\sqrt{abc})^2 + 1 + \frac{3}{1+abc} = 2\sqrt{abc}(\sqrt{abc}-1) + 2 + \frac{3}{1+abc} \leqslant 2+3 = 5$$

Vậy Max $P = 5$ khi $a = b = c = 0$

---

tritanng099 Đã gửi 04-05-2016 - 22:21

Bài 66: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: a+b+c=ab+bc+ca. Tìm GTNN của biểu thức:
$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2} + \frac{b^3}{c^2-ca+a^2} + \frac{c^3}{a^2-ab+b^2}$

Bài 67: Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2 \leq 3$.Tìm GTNN của biểu thức:
$P=\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+ca}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 05-05-2016 - 16:57

NTA1907 Đã gửi 05-05-2016 - 13:04

> *Vào lúc 04 Tháng 5 2016 - 22:21, tritanng099 đã nói:*
>
> Bài 66: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: a+b+c=ab+bc+ca. Tìm GTNN của biểu thức:
>
> $\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}$
>
> Bài 67: Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2 \leq 3$.Tìm GTNN của biểu thức:
>
> $P=\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+ca}$

Bài 66:

Áp dụng Svac-xơ ta có:

$$\sum\frac{a^4}{ab^2-abc+ac^2}\geq\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-3abc}$$

Ta chứng minh: $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-3abc}\geq a+b+c$

$\Leftrightarrow a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)\geq 0$(luôn đúng theo Schur)

$\Rightarrow \sum\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}\geq a+b+c\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}=3$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Bài 67:

Áp dụng Svac-xơ ta có:

$P\geq\frac{9}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}\geq\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}\geq\frac{9}{2.3}=\frac{3}{2}$

Dấu = xảy ra\Leftrightarrow a=b=c=1

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **NTA1907**: 05-05-2016 - 13:30

---

tritanng099 Đã gửi 05-05-2016 - 15:30

Bài 68: Cho a,,b,c là các số thực dương thỏa mãn: a+b+c=3. Tìm Max của biểu thức:

a^2b+b^2c+c^2a+abc+4abc(3-ab-bc-ca)

Trang 6 / 11

Trở lại Bất đẳng thức và cực trị · Chủ đề chưa đọc tiếp theo →

Diễn đàn Toán học → Toán Trung học Phổ thông và Thi Đại học → Bất đẳng thức và cực trị

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung , 18-03-2016 - 21:13

tritanngo99 Đã gửi 05-05-2016 - 15:34

Bài 69: Cho 3 số dương x,y,z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sum \frac{x^3}{x^2 + 2yz} \geq 1$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanngo99**: 05-05-2016 - 15:34

NTA1907 Đã gửi 05-05-2016 - 17:42

> *Vào lúc 05 Tháng 5 2016 - 15:34, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 69: Cho 3 số dương x,y,z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng:
>
> $$\sum \frac{x^3}{x^2 + 2yz} \geq 1$$

Áp dụng AM-GM ta có:

$$\sum \frac{x^3}{x^2 + 2yz} \geq \sum \frac{x^3}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ta có: $x^3 + x^3 + 1 \geq 3x^2$

Tương tự cộng vế theo vế:

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) - 3 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx) \geq 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

tritanngo99

Đã gửi 05-05-2016 - 18:37

> *Vào lúc 05 Tháng 5 2016 - 17:42, NTA1907 đã nói:*
>
> Áp dụng AM-GM ta có:
>
> $$\sum \frac{x^3}{x^2+2yz} \geq \sum \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$$
>
> Ta có: $x^3+x^3+1 \geq 3x^2$
>
> Tương tự cộng vế theo vế:
>
> $2(x^3+y^3+z^3) \geq 3(x^2+y^2+z^2)-3 = 3(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx) \geq 2(x^2+y^2+z^2)$
>
> $\Rightarrow x^3+y^3+z^3 \geq x^2+y^2+z^2$
>
> $\Rightarrow$ đpcm
>
> Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Bài này mình vừa nghĩ ra, dùng holder :

Áp dụng BDT holder ta có:

$$\sum \frac{x^3}{x^2+2yz} * \sum(x^2+2yz)*(1+1+1) \geq (x+y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow \sum \frac{x^3}{x^2+2yz} * (x+y+z)^2 * 3 \geq (x+y+z)^3$$
$$\Leftrightarrow \sum \frac{x^3}{x^2+2yz} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Mặt khác $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) => (a+b+c) \geq 3$

$$=> \sum \frac{x^3}{x^2+2yz} \geq 1$$

Dấu = xảy ra khi x=y=z=1.

phamngochung9a

Đã gửi 05-05-2016 - 20:01

> *Vào lúc 02 Tháng 5 2016 - 22:18, ZOT Murloc đã nói:*
>
> Ta sẽ chứng minh 2 BĐT sau
>
> $$\begin{cases} \frac{1}{(a+c)^2} \geq b^2 \\ \frac{1}{(b+c)^2} \geq a^2 \end{cases}$$

Chứng minh BĐT đầu ,BĐT sau tương tự

$$\frac{1}{(a+c)^2} \geq b^2 \Leftrightarrow \frac{(ab+bc+ca)^2}{(a+c)^2} - b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac(2ab+2bc+ac)}{(a+c)^2} \geq 0$$

BĐT trên đúng. Vậy BĐT phụ được chứng minh

Suy ra

$$P \geq \frac{8}{(a+b)^2} + 3a^2 + 3b^2 \geq \frac{8}{(a+b)^2} + \frac{3(a+b)^2}{2} \geq 4\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Vậy $MinP = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Mong các bạn không ra thêm bài làm loãng topic. Còn rất nhiều bài chưa làm ở trên

Không biết có spam hay không nhưng hình như

$$\begin{cases} c = 0 \\ a = b = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

không thỏa mãn điều kiện giả thiết, bạn ạ

Giả thiết là $ab + bc + ca = 1$ mà

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 05-05-2016 - 20:04

phamngochung9a

Đã gửi 05-05-2016 - 20:21

> *Vào lúc 04 Tháng 5 2016 - 21:57, tritanng099 đã nói:*
>
> Bài 62: Cho x,y,z thuộc [1;2]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
>
> $$E = \frac{2(xy+yz+zx)}{xyz+2(2x+y+z)} + \frac{8}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

$(y-2)(z-2) \geq 0 \Rightarrow yz+4 \geq 2y+2z$

$$xyz+2(2x+y+z) = x(yz+4)+2y+2z \geq x.(2y+2z)+2(y+z) = 2(x+1)(y+z)$$
$$2x(y+z)+yz+4 \geq 2x(y+z)+2y+2z = 2(x+1)(y+z)$$

Vậy:

$$E \leq \frac{xy+yz+zx+4}{(x+1)(y+z)} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1} \leq 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{\frac{(y+z)^2}{4}+4}{2(y+z)} - \frac{y+z+4}{\frac{y+z}{2}+1} \leq \frac{1}{2} + \frac{(y+z)^2+16}{8(y+z)} - \frac{2(y+z)+8}{y+z+2}$$

Đặt $y+z=t$, khi đó: $t \in [2;4]$ và:

$$E \leq \frac{1}{2} + \frac{t^2+16}{8t} - \frac{2t+8}{t+2}$$

Khảo sát hàm số trên với $t \in [2;4]$, ta được: $E \leq -\frac{7}{6}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 05-05-2016 - 20:22

nguyenhongsonk612

Đã gửi 05-05-2016 - 20:53

> *Vào lúc 04 Tháng 5 2016 - 21:57, tritanng099 đã nói:*
>
> Bài 62: Cho x,y,z thuộc [1;2]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
>
> $$E = \frac{2(xy+yz+zx)}{xyz+2(2x+y+z)} + \frac{8}{2x(y+z)+yz+4} - \frac{y+z+4}{\sqrt{yz}+1}$$

Làm như này có được không nhỉ?

Giải:

Ta có

$xyz + 2(2x + y + z) - 2x(y + z) - yz - 4 = (x - 1)(y - 2)(z - 2) \geqslant 0$

$\Rightarrow xyz + 2(2x + y + z) \geqslant 2x(y + z) + yz + 4$

Mà $y, z \in [1; 2] \Rightarrow yz \leqslant 4 \ \Rightarrow 2x(y + z) + yz + 4 \geqslant 2(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow xyz + 2(2x + y + z) \geqslant 2(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow E \leqslant 1 + \frac{8}{2x(y + z) + yz + 4} - \frac{y + z + 4}{\sqrt{yz} + 1}$$

Có $(x - 1)(y - 1)(z - 1) \geq 0 \Leftrightarrow xyz \geqslant xy + yz + zx - (x + y + z) + 1$

$(x - 2)(y - 2)(z - 2) \leqslant 0 \Leftrightarrow xyz \leqslant 2(xy + yz + zx) - 4(x + y + z) + 8$

$\Rightarrow 2(xy + yz + zx) - 4(x + y + z) + 8 \geqslant xy + yz + zx - (x + y + z) + 1$

$\Leftrightarrow x(y + z) + 7 - 3x \geqslant 3(y + z)$

mà $x(y + z) + yz + 7 - 3x \leq x(y + z) + yz + 4; 3(y + z) \geqslant 6\sqrt{yz}$

$\Rightarrow x(y + z) \geqslant 6\sqrt{yz} - yz - 4$

$$\Rightarrow E \leq 1 - \frac{8}{yz - 12\sqrt{yz} + 4} - \frac{2(\sqrt{yz} + 2)}{\sqrt{yz} + 1}$$

Đặt $t = \sqrt{yz} \Rightarrow t \in [1; 2]$

$$\Rightarrow E \leq 1 - \frac{8}{t^2 - 12t + 4} - \frac{2(t + 2)}{t + 1} \leqslant \frac{-7}{6}$$

$\Leftrightarrow (t - 2)(t^2 - 21t + 46) \leqslant 0$ (Đúng)

$$\Rightarrow E \leqslant \frac{-7}{6}$$

Vậy Max $P = \dfrac{-7}{6} \ \Leftrightarrow x = 1; y = z = 2$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **nguyenhongsonk612**: 05-05-2016 - 20:56

---

phamngochung9a Đã gửi 05-05-2016 - 21:04

> *Vào lúc 04 Tháng 5 2016 - 22:00, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 63:Cho x,y,z thuộc [1;2]. Tìm giá trị lớn nhất của:
> $F = (x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$

$$F = 3+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $2 \geq x \geq y \geq z \geq 1$

Xét các tích sau:

$$\left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{y}{z}-1\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{z} \leq \frac{x}{z}+1$$
$$\left(\frac{y}{x}-1\right)\left(\frac{z}{y}-1\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{y} \leq \frac{z}{x}+1$$

Vậy:

$$F \leq 5+2\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

Đặt $t = \frac{x}{z}$, dễ chứng minh: $t \in [1;2]$

Khi đó: $F \leq 5+2\left(t+\frac{1}{t}\right)$

Khảo sát hàm số trên với $t \in [1;2]$, ta được $F \leq 10$

ZOT Murloc

Đã gửi 05-05-2016 - 22:36

> *Vào lúc 05 Tháng 5 2016 - 20:01, phamngochung9a đã nói:*
>
> Không biết có spam hay không nhưng hình như
>
> $$\begin{cases} c = 0 \\ a = b = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$
>
> không thỏa mãn điều kiện giả thiết, bạn ạ
>
> Giả thiết là $ab+bc+ca = 1$ mà

Oops. Cảm ơn bạn nhé Mình lộn mất rồi. Mà nếu theo lời người ra bài thì số 3 phải thay bằng số 1 thì ms chuẩn đề thầy Nam :V Nếu nt thì dấu bằng sẽ là c=0,a=b=1. Mình đoán là có nhầm lẫn

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **ZOT Murloc**: 05-05-2016 - 22:36

---

tritanngo99 Đã gửi 05-05-2016 - 23:06

Bài 70: Cho $0 \le c \le b \le a \le 1$. Tìm min của biểu thức:

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{(a-c)^2}{3}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanngo99**: 05-05-2016 - 23:15

---

tritanngo99 Đã gửi 05-05-2016 - 23:13

Bài 71:Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 \ge a + b + c$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \sum \frac{a^2}{b+c}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanngo99**: 05-05-2016 - 23:15

---

tritanngo99 Đã gửi 05-05-2016 - 23:18

Bài 72: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác với $a + b + c = 3$. Tìm Min của:

$$P = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanngo99**: 05-05-2016 - 23:18

---

tritanngo99 Đã gửi 05-05-2016 - 23:20

Bài 73: Cho a,b,c>0 và abc=1. Chứng minh:

$$\sum \frac{2}{a^2(b+c)} \ge 3$$

---

tritanngo99

Đã gửi 05-05-2016 - 23:23

Bài 74: Cho x,y,x là các số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$\sum\frac{x}{1-x^2}$$

---

tritanngo99

Đã gửi 05-05-2016 - 23:33

Bài 75: Cho $x,y,z\geq 1$.Tìm GTNN của biểu thức:

$$\sum\left(\frac{x^2}{1+x^3}\right)+\sqrt{\frac{8+x^2y^2z^2}{3}}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanngo99**: 05-05-2016 - 23:34

---

nguyenhongsonk612

Đã gửi 05-05-2016 - 23:38

> *Vào lúc 05 Tháng 5 2016 - 23:20, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 73: Cho a,b,c>0 và abc=1. Chứng minh:
>
> $$\sum\frac{2}{a^2(b+c)}\geq 3$$

Giải

BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{(bc)^2}{b+c}+\dfrac{(ca)^2}{c+a}+\dfrac{(ab)^2}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$

Áp dụng Cauchy Schwarz và $AM-GM$
ta được

$$VT\geqslant\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(a+b+c)}\geqslant\frac{3abc(a+b+c)}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}$$

Dấu "=" khi $a=b=c=1$

Bạn nên đăng những bài đậm chất thi ĐH thì hợp lí hơn với tên của TOPIC này!!

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **nguyenhongsonk612**: 05-05-2016 - 23:40

---

tritanngo99 Đã gửi 05-05-2016 - 23:54

Bài 76: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx+2$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P=\frac{3x(x^2+y^2+z^2)}{(x+y+z)^2}+\frac{8(y^2+z^2)}{2y^2+2z^2+xy+xz}$$

---

tritanngo99 Đã gửi 06-05-2016 - 08:37

Bài 77: Cho $x,y,z>0$ và $xy^2z^2+x^2z+y=3z^2$. Tìm max của

$$P=\frac{z^4}{1+z^4(x^4+y^4)}$$

NTA1907 Đã gửi 06-05-2016 - 11:20

> *Vào lúc 06 Tháng 5 2016 - 08:37, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 77: Cho $x,y,z>0$ và $xy^2z^2+x^2z+y=3z^2$. Tìm max của
>
> $$P=\frac{z^4}{1+z^4(x^4+y^4)}$$

Do $z>0$ nên từ $xy^2z^2+x^2z+y=3z^2\Rightarrow xy^2+\frac{x^2}{z}+\frac{y}{z^2}=3$

Áp dụng AM-GM ta có:

$$(x^2y^2+y^2)+(x^2+\frac{x^2}{z^2})+(\frac{y^2}{z^2}+\frac{1}{z^2})\geq 2(xy^2+\frac{x^2}{z}+\frac{y}{z^2})=6$$

$$P=\frac{z^4}{1+z^4(x^4+y^4)}=\frac{1}{\frac{1}{z^4}+x^4+y^4}$$

Đặt $a=\frac{1}{z^2},b=x^2,c=y^2(a,b,c>0)\Rightarrow P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$

Theo AM-GM ta chứng minh được:

$$3(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ca+a+b+c)-3=2(x^2y^2+y^2+x^2+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{1}{z^2})-3\geq 9$$

$\Rightarrow P \leq \frac{1}{3}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

NTA1907

Đã gửi 06-05-2016 - 12:39

> *Vào lúc 05 Tháng 5 2016 - 23:18, tritanng099 đã nói:*
>
> Bài 72: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác với $a + b + c = 3$. Tìm Min của:
>
> $P = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc$

Áp dụng nguyên lí Đi-rích-lê ta có:

$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a + b - 1 \Rightarrow abc \geq ac + bc - c = c(a+b) - c = c(3-c) - c = 2c - c^2$

Khi đó ta có:

$$P \geq \frac{3}{2}(a+b)^2 + 3c^2 + 4(2c - c^2) = \frac{3}{2}(3-c)^2 + 8c - c^2 = \frac{c^2}{2} - c + \frac{27}{2} = \frac{(c-1)^2 + 26}{2} \geq 13$$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

---

tritanng099

Đã gửi 06-05-2016 - 19:51

Bài 78: Cho ba số thực a,b,c thay đổi thuộc [1;2] và thỏa mãn: $a + b + c \leq 4$.

Chứng minh đẳng thức: $\sum \frac{a^2}{bc+2} > \frac{2}{3}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanng099**: 06-05-2016 - 19:54

Trang 7 / 11

Trở lại Bất đẳng thức và cực trị · Chủ đề chưa đọc tiếp theo →

Diễn đàn Toán học → Toán Trung học Phổ thông và Thi Đại học → Bất đẳng thức và cực trị

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung , 18-03-2016 - 21:13

---

tritanngo99 Đã gửi 06-05-2016 - 19:53

Bài 79: Với các số thực $0 \le a, b, c \le 2 thỏa mãn$: a+b+c=3$.

Tìm Min của $P = \sum \sqrt{a+1}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanngo99**: 06-05-2016 - 19:53

---

quangtq1998 Đã gửi 06-05-2016 - 21:18

> *Vào lúc 06 Tháng 5 2016 - 19:53, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 79: Với các số thực $0 \le a, b, c \le 2 thỏa mãn$: a+b+c=3$. Tìm Min của$P=\sum \sqrt{a+1}$

(Đề thi thử chuyên KHTN 2015)

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$ nên $2 \ge a \ge 1$

Ta có : $\sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \ge \sqrt{b+c+1} + 1 = \sqrt{4-a} + 1$ (đúng với mọi $ab \ge 0$)

nên $P \ge \sqrt{a+1} + \sqrt{4-a} + 1 = f(a)$

$f'(1.5) = 0,$

$f(2) = f(1) = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$,

$f(1.5) = 1 + \sqrt{10}$

Do đó $P \ge \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **quangtq1998**: 06-05-2016 - 21:19

---

longatk08 Đã gửi 08-05-2016 - 05:41

Bài 80: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac \le 3$. Tìm GTNN của:

$$\frac{12}{4ab + (a+b)(c+3)} + \frac{\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{2c^2}$$

---

quangtq1998 Đã gửi 09-05-2016 - 18:45

Bài 81, Cho $a, b, c > 0$

thỏa mãn $a^2b^2 + b^2c^2 + 1 \le 3b$

Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{4b^2}{(2b+1)^2} + \frac{8}{(3+c)^2}$$

---

phamngochung9a Đã gửi 09-05-2016 - 20:53

> *Vào lúc 05 Tháng 5 2016 - 22:36, ZOT Murloc đã nói:*
>
> Oops. Cảm ơn bạn nhé Mình lộn mất rồi. Mà nếu theo lời người ra bài thì số 3 phải thay bằng số 1 thì ms chuẩn đề thầy Nam :V Nếu nt thì dấu bằng sẽ là c=0,a=b=1. Mình đoán là có nhầm lẫn

Đề bài không sai đâu bạn. Sau nhiều thời gian suy nghĩ, mình có lời giải này, bạn xem hộ mình nhé.

$$P=\frac{8}{(a+b)^2}+\frac{3}{(b+c)^2}+\frac{3}{(c+a)^2}=\frac{8}{(a+b)^2}+3.\frac{(ab+bc+ca)^2}{(b+c)^2}+3.\frac{(ab+bc+ca)^2}{(c+a)^2}=\frac{8}{(a+b)^2}+3a^2+3b^2+6abc\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)+3.\frac{b^2c^2}{(b+c)^2}+3.\frac{c^2a^2}{(c+a)^2}\geq\frac{8}{(a+b)^2}+3$$

Đặt $a+b=t$

Nếu $a+b\geq 2$, ta có:

$$P\geq\frac{8}{(a+b)^2}+3(a+b)^2-6=\frac{8}{t^2}+3t^2-6\geq 8$$

Nếu $a+b\leq 2$, ta có:

$$P\geq\frac{8}{t^2}+3t^2-\frac{3}{8}t^4\geq 8$$

Vậy $P_{\min}=1\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=1\\c=0\end{cases}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 09-05-2016 - 21:03

ZOT Murloc Đã gửi 10-05-2016 - 00:42

> *Vào lúc 09 Tháng 5 2016 - 18:45, quangtq1998 đã nói:*
>
> Bài 81, Cho $a,b,c>0$
> thỏa mãn $a^2b^2+b^2c^2+1\leq 3b$
>
> Tìm giá trị nhỏ nhất của :
>
> $$P=\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{4b^2}{(2b+1)^2}+\frac{8}{(3+c)^2}$$
>
> Mới thi học kì xong nè

Bổ đề: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{8}{(x+y)^2}$

Chứng minh:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\geq\frac{2}{xy}\geq\frac{2.4}{(x+y)^2}=\frac{8}{(x+y)^2}$$

$a^2b^2+b^2c^2+1\leq 3b$

$\Leftrightarrow a^2+c^2+\frac{1}{b^2}\leq\frac{3}{b}$

Đặt $\begin{cases} a = x \\ \frac{1}{b} = y \\ c = z \end{cases}$

Bài toán tương đương với

$$\begin{cases} z^2 + y^2 + z^2 \leq 3y \\ P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \end{cases}$$

Ta có

$$P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{2}+1\right)^2} + \frac{8}{(z+3)^2}$$

Áp dụng bổ đề ta có

$$P \geq \frac{8}{\left(x + \frac{y}{2} + 2\right)^2} + \frac{8}{(z+3)^2} \geq \frac{64}{\left(x + z + 5 + \frac{y}{2}\right)^2}$$

Theo bài ra

$$3y \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq (2x - 1) + (4y - 4) + (2z - 1)$$

$$\Leftrightarrow x + z + \frac{y}{2} \leq 3$$

Suy ra

$$P \geq \frac{64}{(3+5)^2} = 1$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy................

---

phamngochung9a

Đã gửi 10-05-2016 - 19:31

Bài 82: (Chuyên Đại học Vinh lần 3 năm 2016)

Cho x, y, z là những số thực thuộc khoảng $(1; 4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P = 2.\frac{(y+z-x)^2}{yz} + \sqrt{3}.\frac{(z+x-y)^2}{zx} - 2\sqrt{3}.\frac{(x+y-z)^2}{xy}$

HOANG LINH DAN

Đã gửi 13-05-2016 - 05:46

Bài 83: (Phổ Thông Năng Khiếu - Tp.HCM - 2016)

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 4(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}) + 2a^3 - a + b^4 + b^2 - b + c^3 + c^2$

Juliel

Đã gửi 14-05-2016 - 17:15

> *Vào lúc 08 Tháng 5 2016 - 05:41, longatk08 đã nói:*
>
> Bài 80: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac \leq 3$. Tìm GTNN của:
>
> $$\frac{12}{4ab+(a+b)(c+3)} + \frac{\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{2c^2}$$

Lời giải :

Ta có :

$$(a^2+1)(b^2+1) = (a+b)^2 + (ab-1)^2$$

$$2(c^2+1) = (c+1)^2 + (c-1)^2$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz :

$\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} = \sqrt{\left[(a+b)^2+(ab-1)^2\right].\left[(c+1)^2+(c-1)^2\right]} \geq (a+b)(c+1) + (1-ab)(c-1) = (a+b+c+ab+bc+ca+abc+1) - 2(1+abc) = (a+1)(b+1)$

Từ đó :

$$\frac{\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}}{(a+1)(b+1)} = \frac{(a+1)(b+1)(c+1)-2(1+abc)}{(a+1)(b+1)} = c+1-\frac{2(1+abc)}{(a+1)(b+1)}$$

Theo giả thiết :

$$\frac{12}{4ab+(a+b)(c+3)} = \frac{12}{3(a+b+ab)+(ab+bc+ca)} \geq \frac{12}{3(ab+a+b+1)} = \frac{4}{(a+1)(b+1)}$$

Từ đó mà :

$$P \geq \frac{2(1-abc)}{(a+1)(b+1)} + c + 1 + \frac{1}{2c^2}$$

Chú ý rằng :

$$3 \geq ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1$$

$$c + \frac{1}{2c^2} = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} + \frac{1}{2c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{3}{2}$$

Như vậy ta được :

$$P \geq \frac{5}{2}$$

$$MinP = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Dinh Xuan Hung

Đã gửi 14-05-2016 - 17:56

> *Vào lúc 10 Tháng 5 2016 - 19:31, phamngochung9a đã nói:*
>
> **Bài 82:** (Chuyên Đại học Vinh lần 3 năm 2016)
>
> Cho x, y, z là những số thực thuộc khoảng $(1; 4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P = 2.\frac{(y+z-x)^2}{yz} + \sqrt{3}.\frac{(z+x-y)^2}{zx} - 2\sqrt{3}.\frac{(x+y-z)^2}{xy}$

Đặt $a = \sqrt{x}; b = \sqrt{y}; c = \sqrt{z}$ Khi đó $a, b, c \in (1; 2)$ nên tồn tại tam giác ABC có ba cạnh là a, b, c

$P = 2.\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{b^2c^2} + \sqrt{3}.\frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{c^2a^2} - 2\sqrt{3}.\frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{a^2b^2}$

$= 2(2cosA)^2 + \sqrt{3}(2cosB)^2 - 2\sqrt{3}(2cosC)^2$

$= 8.\frac{1+cos2A}{2} + 4\sqrt{3}.\frac{1+cos2B}{2} - 8\sqrt{3}.\frac{1+cos2C}{2}$

$= 4 - 2\sqrt{3} + 4cos2A + 2\sqrt{3}cos2B - 4\sqrt{3}cos2C(1)$

Giả sử tam giác ABC có và bán kính đường tròn ngoại tiếp là O và R khi đó:

$\left(\sqrt{3}\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$

\displaystyle{\Leftrightarrow 8R^2+R^2\left (4\sqrt{3}cos\left (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB} \right) \right -4cos(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})-2\sc

$\Leftrightarrow 4cos2A + 2\sqrt{3}cos2B - 4\sqrt{3}cos2C \leq 8(2)$

Từ (1)(2) $\Rightarrow P \leq 4 - 2\sqrt{3} + 8 = 12 - 2\sqrt{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $y = 2x; z = \left(2+\sqrt{3}\right)x; x \in \left(1; 4\left(2-\sqrt{3}\right)\right)$

---

tuanyeubeo2000

Đã gửi 16-05-2016 - 21:48

Bài 84 : Cho a,b,c >0 . CMR:

$\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tuanyeubeo2000**: 16-05-2016 - 21:52

HDTterence2k

Đã gửi 16-05-2016 - 22:15

> *Vào lúc 16 Tháng 5 2016 - 21:48, tuanyeubeo2000 đã nói:*
>
> Bài 84 : Cho a,b,c >0 . CMR:
>
> $\frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{a+1} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

<=> $(\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1}) + (\frac{b}{c} - \frac{b+1}{c+1}) + (\frac{c}{a} - \frac{c+1}{a+1}) \geq 0$ <=> $\frac{a-b}{b(b+1)} + \frac{b-c}{c(c+1)} + \frac{c-a}{a(a+1)} \geq 0$ <=> $(a-b)(\frac{1}{b(b+1)} - \frac{1}{a(a+1)}) + (b-c)(\frac{1}{c(c+1)} - \frac{1}{a(a+1)}) \geq$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **HDTterence2k**: 16-05-2016 - 22:53

---

tuanyeubeo2000

Đã gửi 16-05-2016 - 22:28

> *Vào lúc 16 Tháng 5 2016 - 22:15, HDTterence2k đã nói:*
>
> <=> $(\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1}) + (\frac{b}{c} - \frac{b+1}{c+1}) + (\frac{c}{a} - \frac{c+1}{a+1}) \geq 0$ <=> $\frac{a-b}{b(b+1)} + \frac{b-c}{c(c+1)} + \frac{c-a}{a(a+1)} \geq 0$ <=> $(a-b)(\frac{1}{b(b+1)} - \frac{1}{a(a+1)}) + (b-c)(\frac{1}{c(c+1)} - \frac{1}{a(a+1}$

giả sử c = min $\{a, b, c\}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tuanyeubeo2000**: 16-05-2016 - 22:28

HDTterence2k Đã gửi 16-05-2016 - 22:47

> *Vào lúc 16 Tháng 5 2016 - 22:28, tuanyeubeo2000 đã nói:*
>
> giả sử c = min $\{a, b, c\}$

oh mình quên chưa ghi mình sẽ sửa lại . cám ơn bạn , do bđt hoán vị nên giả sử c =min (a,b,c) ta có đpcm

---

ngothithuynhan100620 Đã gửi 18-05-2016 - 18:35

Bài 85:Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3xy$.Tìm Min của:

$$P = \frac{x^2}{y^2 + yz} + \frac{y}{z + x} + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 20-05-2016 - 22:23

---

tritanng099 Đã gửi 20-05-2016 - 10:24

Bài 86:Cho x,y là các số thực thỏa mãn: $x, y \in [1; 3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x^3 + x(y - 2x) + 3} + \frac{y + 1}{(x + 2y + 2)(y + 1) - 6y + 2} + \frac{4\sqrt{5(x + y + 1)}}{25}$$

Bài 87:Cho x,y là các số không âm thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x + z)\sqrt{\frac{z}{x^2 + y^2}} + \frac{3x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8}{16z} + \frac{z}{2} - \frac{y}{4} - \frac{1}{8}$$

Bài 88:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $4z^2 + 41 = 9xy(2z + 3)$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 9zx}} + \frac{1}{2\sqrt{10}}(z^2 + 5)$$

Bài 89:Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn [1;3] thỏa mãn: a+b+c=6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

Bài 90:Xét số thực x. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{3(2x^2 + 2x + 1)}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 - \sqrt{3})x + 3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + (3 + \sqrt{3})x + 3}}$$

Bài 91:Với các số thực dương a,b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = ab + 1$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$P = \sqrt{7 - 3ab} + \frac{a - 2}{a^2 + 1} + \frac{b - 2}{b^2 + 1}$$

Bài 92:Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn. Chứng minh BDT:

$$\sum \frac{x + 1}{y + 1} \leq \sum \frac{x}{y}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tritanng099**: 21-05-2016 - 18:39

---

ineX Đã gửi 20-05-2016 - 19:52

Bài 93 (THPT Bỉm Sơn lần I)

Cho x,y,z thuộc [0; 2] thỏa: $x + y + z = 3$

Tìm min:

$$P = \sum \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} + \sum \sqrt{xy}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 20-05-2016 - 22:24

Dinh Xuan Hung Đã gửi 20-05-2016 - 22:27

Chú ý: Mọi người đăng bài thì phải đánh số thứ tự ai không đánh số thứ tự sẽ bị phạt 1 điểm nhắc nhở ! Gửi nhiều bài thì cho hết vào một bài viết tránh viết mỗi bài mỗi bài viết làm loãng Topic.

Mong mọi người đọc và chấp hành nội quy! Thân

P/s:Ai giành về PDF có thể tổng hợp đề bài và lời giải ở TOPIC được không?

---

ineX Đã gửi 20-05-2016 - 22:45

> *Vào lúc 20 Tháng 5 2016 - 22:27, Dinh Xuan Hung đã nói:*
>
> ***P/s:Ai giành về PDF có thể tổng hợp đề bài và lời giải ở TOPIC được không?***

mình có thể tổng hợp được topic này thành dạng PDF

---

tuanyeubeo2000 Đã gửi 21-05-2016 - 00:34

> *Vào lúc 20 Tháng 5 2016 - 19:52, ineX đã nói:*
>
> Bài 93 (THPT Bỉm Sơn lần I)
>
> Cho x,y,z thuộc [0; 2] thỏa: $x + y + z = 3$
>
> Tìm min:

$$P = \sum \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} + \sum \sqrt{xy}$$

$$\left(x^2 + y^2 + 1 + 1\right)\left(1 + 1 + 1 + z^2\right) \ge (x + y + z + 1)^2 \Rightarrow \sum \frac{1}{x^2 + y^2 + 2} \le \sum \frac{z^2 + 3}{(x + y + z + 1)^2} = \frac{\sum x^2 + 9}{16} \Rightarrow P \le \frac{\sum x^2 + 9}{16} + \sum \sqrt{xy} \le \frac{\sum x^2 + 9}{16} + \frac{\sum xy + 3}{2} = \frac{(x + y + z)^2 + 33}{16}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tuanyeubeo2000**: 21-05-2016 - 00:35

Trang 8 / 11

[Trở lại Bất đẳng thức và cực trị](#) · [Chủ đề chưa đọc tiếp theo →](#)

Diễn đàn Toán học → Toán Trung học Phổ thông và Thi Đại học → Bất đẳng thức và cực trị

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung , 18-03-2016 - 21:13

phamngochung9a

Đã gửi 21-05-2016 - 19:03

> *Vào lúc 21 Tháng 5 2016 - 00:34, tuanyeubeo2000 đã nói:*
>
> $$\left(x^2+y^2+1+1\right)\left(1+1+1+z^2\right) \geq (x+y+z+1)^2 => \sum \frac{1}{x^2+y^2+2} \leq \sum \frac{z^2+3}{(x+y+z+1)^2} = \frac{\sum x^2+9}{16} => P \leq \frac{\sum x^2+9}{16} + \sum \sqrt{xy} \leq \frac{\sum x^2+9}{16} + \frac{\sum xy+3}{2} = \frac{(x+y+z)^2}{}$$

Hix, đề bài yêu cầu tìm GTNN mà bạn ????

phamngochung9a

Đã gửi 21-05-2016 - 19:39

> *Vào lúc 20 Tháng 5 2016 - 10:24, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 86:Cho x,y là các số thực thỏa mãn: $x, y \in [1; 3]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $$P = \frac{x}{x^3 + x(y-2x) + 3} + \frac{y+1}{(x+2y+2)(y+1) - 6y + 2} + \frac{4\sqrt{5(x+y+1)}}{25}$$
>
> Bài 87:Cho x,y là các số không âm thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
> Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $$P = (x+z)\sqrt{\frac{z}{x^2+y^2}} + \frac{3x^2+4y^2+8z^2+8}{16z} + \frac{z}{2} - \frac{y}{4} - \frac{1}{8}$$
>
> Bài 88:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $4z^2 + 41 = 9xy(2z+3)$.
> Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $$P = \frac{x}{\sqrt{x^2+9yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+9zx}} + \frac{1}{2\sqrt{10}}(z^2+5)$$
>
> Bài 89:Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn [1;3] thỏa mãn: a+b+c=6. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
> $$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab+bc+ca} - \frac{1}{2}abc$$
>
> Bài 90:Xét số thực x. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $$P = \frac{\sqrt{3(2x^2+2x+1)}}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+(3-\sqrt{3})x+3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+(3+\sqrt{3})x+3}}$$
>
> Bài 91:Với các số thực dương a,b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = ab + 1$. Tìm GTLN của biểu thức:
> $$P = \sqrt{7-3ab} + \frac{a-2}{a^2+1} + \frac{b-2}{b^2+1}$$
>
> Bài 92:Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn. Chứng minh BĐT:
> $$\sum \frac{x+1}{y+1} \leq \sum \frac{x}{y}$$

Bài 88:

Đặt $A = \sum \frac{x}{\sqrt{x^2+9yz}}$. Theo BĐT *Holder*, ta có:

$$A^2\left[x\left(x^2+9yz\right) + y\left(y^2+9zx\right) + z\left(z^2+9xy\right)\right] \geq (x+y+z)^3 \Rightarrow A^2 \geq \frac{(x+y+z)^3}{x^3+y^3+z^3+27xyz}$$

Mà: $\frac{(x+y+z)^3}{x^3+y^3+z^3+27xyz} - \frac{9}{10} = \frac{x^3+y^3+z^3+30(x+y)(y+z)(z+x) - 243xyz}{\left(x^3+y^3+z^3+27xyz\right)} \geq 0$

$$\Rightarrow A \geq \sqrt{\frac{9}{10}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+9yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+9zx}} \geq \sqrt{\frac{9}{10}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+9xy}}$$

Ta sẽ chứng minh: $z^2 + 9xy \geq 10$, thật vậy:

$$z^2 + 9xy - 10 = z^2 + \frac{4z^2+41}{2z+3} - 10 = \frac{(z-1)^2(11z+2)}{2z+3} \geq 0$$

Do đó:

$$P \geq \sqrt{\frac{9}{10}} + \frac{1}{2\sqrt{10}}\left(z^2+5\right) - \frac{z}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} + \frac{1}{2\sqrt{10}}\left(z^2-2z+5\right) \geq \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Vậy $\min P = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 89: Chính là đề thi THPT Quốc gia năm ngoái mà . Lên Google search cả đống

Bài 90: Trong đề đầu tiên của ấn phẩm **Ba câu phân loại....** của diễn đàn.

Bài 91:

$$P = \frac{1}{2}.2.\sqrt{7-3ab} + \frac{ab(a+b)+a+b-2\left(a^2+b^2\right)-4}{a^2b^2+ab+2} \leq \frac{11-3ab}{4} + \frac{ab(a+b)+a+b-2ab-6}{a^2b^2+ab+2}$$

Từ đề bài: $1 = a^2 + b^2 - ab \geq \frac{1}{4}(a+b)^2 \Rightarrow a + b \leq 2$

Vậy: $P \leq \frac{11-3ab}{4} - \frac{4}{a^2b^2+ab+2}$

Đặt $t = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq 1$, khi đó:

$$P \leq \frac{11-3t}{4} - \frac{4}{t^2+t+2}$$

Khảo sát hàm số trên với $t \in (0; 1]$, ta được $P \leq 1$

Bài 92:

Vừa có người giải ở trên mà. Tuy nhiên, ta cũng có thể tổng quát hóa bài toán là:

$$\sum \frac{a+t}{b+t} \leq \sum \frac{a}{b} \quad \forall t \geq 0$$

P.s: Sao dạo này không thấy **Dinh Xuan Hung** bôi đỏ mấy bài làm rồi nhỉ. Nhìn khó quá, không biết bài nào giải rồi, bài nào chưa giải

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 21-05-2016 - 19:56

---

tien123456789 Đã gửi 21-05-2016 - 22:46

Mình cũng xin đóng góp một số bài

Bài 93:cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc=1.CMR

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{4}{(1+a+b+c)^2} \geq 1$$

Bài 94:cho ba số thực a,b,c sao cho $c = min\{a; b; c\} \geq 1$.hãy tìm GTNN của biểu thức

$$S = \frac{9}{(2a+b)^2} + \frac{36}{4(2b+a)^2 + 45(c-1)^2} + \sqrt{a+b+c-1}$$

Bài 95:cho 3 số thực x,y,z thỏa mãn xyz=x+y+zvaf z>0.hãy tìm GTLN của biểu thức

$$M = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{y^2+1} + \frac{6z}{\sqrt{(z^2+1)^3}}$$

Bài 96:cho a,b,c>0 và a+4b+9c=1 chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{1296}$$

Bài 97:cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn a+b+c=1.Tìm GTLN của:

P=$9xy + 10yz + 11zx$

Bài 99:cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = xy + 2z$.Tìm GTNN:

$$P = \left(\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{x^2+z^2}\right)^2 + \frac{8z^3}{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tien123456789**: 23-05-2016 - 20:12
Lần sau ghi đúng STT

---

tuanyeubeo2000

Đã gửi 22-05-2016 - 02:11

Bài 100 : Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn : xyz=1 . Tìm min của :

$P = \sum \frac{x^3+1}{\sqrt{x^4+y+z}} - \frac{8\sum xy}{(\sum xy)+1}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 22-05-2016 - 16:59
Bài BĐT Thứ 100 :)

---

tuanyeubeo2000

Đã gửi 22-05-2016 - 02:13

> *Vào lúc 21 Tháng 5 2016 - 19:03, phamngochung9a đã nói:*
>
> Hix, đề bài yêu cầu tìm GTNN mà bạn ????

vâng cảm ơn bạn nhé , mình xin lỗi không đọc kĩ

---

tuanyeubeo2000

Đã gửi 22-05-2016 - 13:29

> *Vào lúc 20 Tháng 5 2016 - 19:52, ineX đã nói:*
>
> Bài 93 (THPT Bỉm Sơn lần I)
>
> Cho x,y,z thuộc [0; 2] thỏa: $x+y+z=3$
>
> Tìm min:
>
> $$P = \sum \frac{1}{x^2+y^2+2} + \sum \sqrt{xy}$$

Thực ra hôm trước mình có đọc đề bài là tìm max , còn nếu tìm min thì mình thử gửi cách như sau ***(Lời giải bởi bác Triển - FB :Dinh de Tai)*** :

$Không\ mất\ tính\ tổng\ quát\ giả\ sử\ :\ x \ge y \ge z => 2 \ge x \ge 1\ và\ y+z \ge 1 - > xy > 0.\ Ta\ có: \frac{1}{x^2+y^2+2} \ge \frac{1}{x^2+(y+z)^2+2}; \frac{1}{y^2+z^2+2} \ge \frac{1}{(y+z)^2+2}. Mặt\ k$

---

tpdthltvp

Đã gửi 22-05-2016 - 16:41

> *Vào lúc 21 Tháng 5 2016 - 22:46, tien123456789 đã nói:*
>
> Bài 96:cho a,b,c>0 và a+4b+9c=1 chứng minh rằng
>
> $a^3+b^3+c^3 \ge \frac{1}{1296}$

Áp dụng BĐT *Holder*:

$$(a^3+b^3+c^3)(1^3+2^3+3^3)(1^3+2^3+3^3) \ge (a+4b+9c)^3$$

$$\Leftrightarrow 1296(a^3+b^3+c^3) \ge 1(\text{do} a+4b+9c=1) \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \ge \frac{1}{1296}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{1}{36}, b = \frac{1}{18}, c = \frac{1}{12}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tpdthltvp**: 22-05-2016 - 16:42

---

chidungdijiyeon

Đã gửi 22-05-2016 - 18:56

> *Vào lúc 04 Tháng 4 2016 - 23:00, tungteng532000 đã nói:*
>
> Bạn dùng bđt này là làm đc nhé: $\sum x \ge \sum x^2y^2$ với $\sum x^2 = 3$

bài này giá trị của nó là mấy vậy bạn?

yeutoanmanhliet

Đã gửi 22-05-2016 - 20:50

> *Vào lúc 04 Tháng 5 2016 - 21:57, tritanngo99 đã nói:*
>
> Bài 62: Cho x,y,z thuộc [1;2]. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
>
> $E=\frac{2(xy+yz+zx)}{xyz+2(2x+y+z)}+\frac{8}{2x(y+z)+yz+4}-\frac{y

các bạn chỉ mình cách gõ đc ko mình có đáp án nhưng ko biết gõ

tuanyeubeo2000

Đã gửi 23-05-2016 - 00:05

> *Vào lúc 22 Tháng 5 2016 - 20:50, yeutoanmanhliet đã nói:*
>
> các bạn chỉ mình cách gõ đc ko mình có đáp án nhưng ko biết gõ

http://s1.daumcdn.ne...romestore.html (http://s1.daumcdn.net/editor/fp/service_nc/pencil/Pencil_chromestore.html%C2%A0)

cậu dùng cái này hoặc dùng ngay phần mềm gõ LATEX của diễn đàn chú ý nè : trước có ()*saukếtthúccó*()

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tuanyeubeo2000**: 23-05-2016 - 02:46

tien123456789

Đã gửi 23-05-2016 - 16:27

bài 101:(chuyên thái bình lần 5)

cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn a+b+c=1.CMR

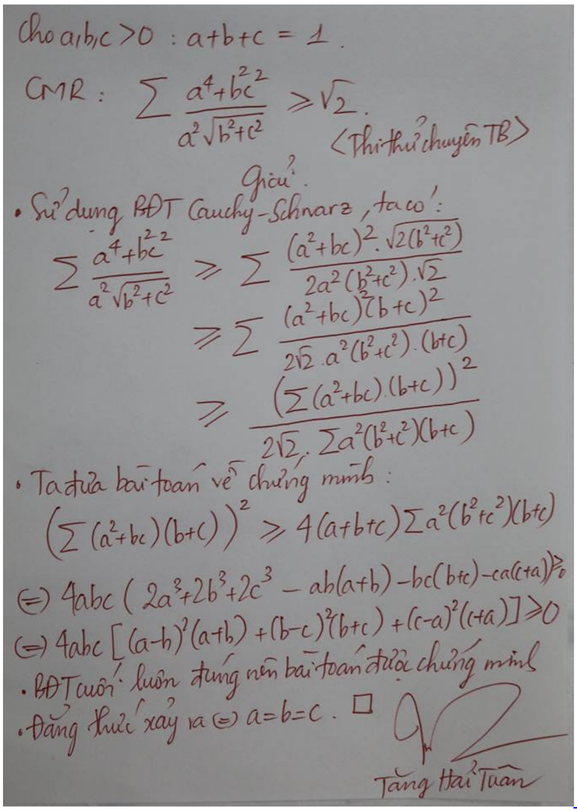
$$\frac{a^4+b^2c^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^4+a^2c^2}{b^2\sqrt{a^2+c^2}}+\frac{c^4+a^2b^2}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\geq\sqrt{2}$$

Dinh Xuan Hung

Đã gửi 23-05-2016 - 17:38

> *Vào lúc 23 Tháng 5 2016 - 16:27, tien123456789 đã nói:*
>
> bài 101:(chuyên thái bình lần 5)
>
> cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn a+b+c=1.CMR
>
> $$\frac{a^4+b^2c^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^4+a^2c^2}{b^2\sqrt{a^2+c^2}}+\frac{c^4+a^2b^2}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\geq\sqrt{2}$$

Lời giải của Thầy Tăng Hải Tuân (https://www.facebook.com/tanghaituan.vlpt?fref=photo)


Cho $a,b,c>0$: $a+b+c = 1$.

CMR: $\sum \frac{a^4+b^2c^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} \ge \sqrt{2}$.

<Thi thử chuyên TB>

Giải:

• Sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\sum \frac{a^4+b^2c^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} \ge \sum \frac{(a^2+bc)^2.\sqrt{2(b^2+c^2)}}{2a^2(b^2+c^2).\sqrt{2}}$$
$$\ge \sum \frac{(a^2+bc)^2(b+c)^2}{2\sqrt{2}.a^2(b^2+c^2).(b+c)}$$
$$\ge \frac{\left(\sum(a^2+bc).(b+c)\right)^2}{2\sqrt{2}.\sum a^2(b^2+c^2)(b+c)}$$

• Ta đưa bài toán về chứng minh:

$$\left(\sum(a^2+bc)(b+c)\right)^2 \ge 4(a+b+c)\sum a^2(b^2+c^2)(b+c)$$

$\Leftrightarrow 4abc\left(2a^3+2b^3+2c^3 - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a)\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow 4abc\left[(a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)\right] \ge 0$

• BĐT cuối luôn đúng nên bài toán được chứng minh

• Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$. □

Tăng Hải Tuân

(http://diendantoanhoc.net/uploads/monthly_05_2016/post-125595-0-12581500-1463999880.jpg)

---

tritanngo99 Đã gửi 23-05-2016 - 17:56

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$\sum a^2 + 9\sum ab \ge 10\sum a$

(Chú ý: giải bằng PP hàm số).

---

tuanyeubeo2000 Đã gửi 23-05-2016 - 18:23

> *Vào lúc 23 Tháng 5 2016 - 16:27, tien123456789 đã nói:*
>
> bài 101:(chuyên thái bình lần 5)
>
> cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn a+b+c=1.CMR
>
> $$\frac{a^4+b^2c^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^4+a^2c^2}{b^2\sqrt{a^2+c^2}} + \frac{c^4+a^2b^2}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} \ge \sqrt{2}$$

Đặt $P = \frac{a^4}{a^2\sqrt{b^2+c^2}} \overset{C-S}{\ge} \frac{(\sum a^2)^2}{\sum a\sqrt{a^2b^2+a^2c^2}} \ge \frac{(\sum a^2)^2}{\sqrt{2(\sum a^2)(\sum a^2b^2}} \ge \frac{(\sum a^2)^2}{\sqrt{\frac{2}{3}(\sum a^2)^3}} \ge \frac{\sqrt{3(\sum a^2)}}{\sqrt{2}} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} Q = \sum \frac{a^2b^2}{c^2\sqrt{a^2+b^2}} = \sum \frac{a^4b^4}{a^2b^2c\sqrt{a^2c^2+b^2c^2}} \ge \frac{(\sum a^2b^2)^2}{\sum a^2b^2c\sqrt{a^2c^2+b^2c^2}} \ge$

---

phamngochung9a Đã gửi 23-05-2016 - 19:52

> *Vào lúc 21 Tháng 5 2016 - 22:46, tien123456789 đã nói:*
>
> Mình cũng xin đóng góp một số bài
>
> Bài 94:cho ba số thực a,b,c sao cho $c = min\{a; b; c\} \ge 1$.hãy tìm GTNN của biểu thức
>
> S=$\frac{9}{(2a+b)^2} + \frac{36}{4(2b+a)^2+45(c-1)^2} + \sqrt{a+b+c-1}$

Anh Bí xem lại đề Bài 93 nhá, BĐT sai với $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{3} \\ c = 3 \end{cases}$

Còn Bài 95 thì hình như giả thiết gõ sai dấu của y thì phải

Bài 94:

Ta sẽ chứng minh: $4(2b+a)^2+45(c-1)^2 \le 4(2b+a+3c-3)^2$

Thật vậy, BĐT trên tương đương với:

$24(2b+a)(c-1) \ge 9(c-1)^2 \Leftrightarrow 3(c-1)(16b+8a-3c+3) \ge 0(TRUE)$

Suy ra:

$$S \ge \frac{9}{(2a+b)^2}+\frac{9}{(2b+a+3c-3)^2}+\sqrt{a+b+c-1} \ge \frac{72}{(3a+3b+3c-3)^2}+\sqrt{a+b+c-1} = \frac{8}{(a+b+c-1)^2}+\frac{\sqrt{a+b+c-1}}{4}+\frac{\sqrt{a+b+c-1}}{4}+\frac{\sqrt{a+b+c-1}}{4}+\frac{\sqrt{a+b+}}{4}$$

---

phamngochung9a

Đã gửi 23-05-2016 - 20:11

> *Vào lúc 21 Tháng 5 2016 - 22:46, tien123456789 đã nói:*
>
> Mình cũng xin đóng góp một số bài
>
> Bài 97:cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn a+b+c=1.Tìm GTLN của:
>
> P=$9xy+10yz+11zx$

Thế $z=1-x-y$ vào P, ta có:

$P=9xy+10y(1-x-y)+11x(1-x-y)=-11x^2+x(11-12y)+10y-10y^2$

Coi biểu thức trên là tam thức bậc hai đối với x, ta có:

$$P \le \frac{-\Delta}{4.(-11)} = \frac{(11-12y)^2+44\left(10y-10y^2\right)}{44} = \frac{-296y^2+176y+121}{44} \le \frac{495}{148}$$

Vậy $\max P=\frac{495}{148} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{25}{74} \\ y=\frac{11}{37} \\ z=\frac{27}{74} \end{cases}$

---

tien123456789

Đã gửi 23-05-2016 - 20:13

> *Vào lúc 23 Tháng 5 2016 - 19:52, phamngochung9a đã nói:*
>
> Anh Bí xem lại đề Bài 93 nhá, BĐT sai với $\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{3} \\ c=3 \end{cases}$
>
> Còn Bài 95 thì hình như giả thiết gõ sai dấu của y thì phải
>
> Bài 94:
>
> Ta sẽ chứng minh: $4(2b+a)^2+45(c-1)^2 \le 4(2b+a+3c-3)^2$
>
> Thật vậy, BĐT trên tương đương với:
>
> $24(2b+a)(c-1) \ge 9(c-1)^2 \Leftrightarrow 3(c-1)(16b+8a-3c+3) \ge 0(TRUE)$
>
> Suy ra:
>
> $$S \ge \frac{9}{(2a+b)^2}+\frac{9}{(2b+a+3c-3)^2}+\sqrt{a+b+c-1} \ge \frac{72}{(3a+3b+3c-3)^2}+\sqrt{a+b+c-1} = \frac{8}{(a+b+c-1)^2}+\frac{\sqrt{a+b+c-1}}{4}+\frac{\sqrt{a+b+c-1}}{4}+\frac{\sqrt{a+b+c-1}}{4}+\sqrt{}$$

nhìn nhầm đề

---

phamngochung9a

Đã gửi 23-05-2016 - 21:21

> *Vào lúc 21 Tháng 5 2016 - 22:46, tien123456789 đã nói:*
>
> Mình cũng xin đóng góp một số bài
>
> Bài 93:cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc=1.CMR

$$\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{4}{(1+a+b+c)^2}\geq 1$$

Chắc chỉ có cách trâu bò ni mới xơi được:

Đặt $\begin{cases}\frac{1}{a+1}=x\\ \frac{1}{b+1}=y\\ \frac{1}{c+1}=z\end{cases}$

Ta có:

$$abc=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=1\Leftrightarrow 2xyz=1-x-y-z+xy+yz+zx$$

Khi đó:

$$VT=x^2+y^2+z^2+\frac{(1+xy+yz+zx-x-y-z)^2}{(x+y+z-1)^2}$$

Đặt $\begin{cases}p=x+y+z\\ q=xy+yz+zx\end{cases}$, ta cần chứng minh:

$$p^2-2q+\frac{(1+q-p)^2}{(p-1)^2}\geq 1\Leftrightarrow p^2(p-1)^2-2q(p-1)^2+1+p^2+q^2+2q-2pq-2p\geq p^2-2p+1\Leftrightarrow p^2(p-1)^2-2p^2q+4pq-2q+q^2+2q-2pq\geq 0\Leftrightarrow p^2(p-1)^2-2p(p-1$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 23-05-2016 - 21:21

---

tien123456789 Đã gửi 23-05-2016 - 21:44

> *Vào lúc 23 Tháng 5 2016 - 21:21, phamngochung9a đã nói:*

Chắc chỉ có cách trâu bò ni mới xơi được:

Đặt $\begin{cases}\frac{1}{a+1}=x\\ \frac{1}{b+1}=y\\ \frac{1}{c+1}=z\end{cases}$

Ta có:

$$abc=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=1\Leftrightarrow 2xyz=1-x-y-z+xy+yz+zx$$

Khi đó:

$$VT=x^2+y^2+z^2+\frac{(1+xy+yz+zx-x-y-z)^2}{(x+y+z-1)^2}$$

Đặt $\begin{cases}p=x+y+z\\ q=xy+yz+zx\end{cases}$, ta cần chứng minh:

$$p^2-2q+\frac{(1+q-p)^2}{(p-1)^2}\geq 1\Leftrightarrow p^2(p-1)^2-2q(p-1)^2+1+p^2+q^2+2q-2pq-2p\geq p^2-2p+1\Leftrightarrow p^2(p-1)^2-2p^2q+4pq-2q+q^2+2q-2pq\geq 0\Leftrightarrow p^2(p-1)^2-2p$$

cách khác

đặt p=a+b+c và q=ab+bc+ca,khi đó ta có

(1+a)(1+b(1+c)=p+q+2 và

$$1-\sum\frac{1}{(1+a)^2}=1-\frac{\sum(1+a)^2(1+b)^2}{(p+q+2)^2}=1-\frac{[\sum(1+a)(1+b)]^2-2(p+q+2)(a+b+c+3)}{(p+q+2)^2}=1-\frac{(2p+q+3)^2-2(p+q+2)(p+3)}{(p+q+2)^2}=\frac{4q+8-(p-1)^2}{(p+q+2)^2}$$

khi đó ta cần chứng minh

$$\frac{4}{(p+1)^2}\geq\frac{4q+8-(p-1)^2}{(p+q+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(p^2-2q-3\right)^2\geq 0$$

đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1

tuanyeubeo2000

Đã gửi 23-05-2016 - 22:30

Bài 102 (Thi thử Chuyên Nguyễn Huệ lần 3)

$Cho \quad x,y,z>0 \quad thõa \quad mãn: \quad 5(\sum x^2)=9(xy+2yz+zx) Tìm \quad max \quad của \quad P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}$

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung, 18-03-2016 - 21:13

Trang 10 / 11

tien123456789

Đã gửi 24-05-2016 - 10:26

> ***Vào lúc 23 Tháng 5 2016 - 22:30, tuanyeubeo2000 đã nói:***
>
> ***Bài 102*** (Thi thử Chuyên Nguyễn Huệ lần 3)
>
> $Cho \quad x,y,z>0 \quad thõa \quad mãn: \quad 5(\sum x^2)=9(xy+2yz+zx)$
>
> $Tìm \quad max \quad của \quad P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}$

ta có $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$

$\Leftrightarrow 9x(y+z)-5x^2=5(x^2+y^2)-18yz\geq -2(y+z)^2 \Rightarrow 2(y+z)^2+9x(y+z)-5x^2$

$\geq 0 \Leftrightarrow 2(y+z)\geq x$

khi đó P=

$$\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}\leq \frac{2(y+z)}{\frac{(y+z)^2}{2}}-\frac{1}{27(y+z)^3}=\frac{4}{y+z}-\frac{1}{27(y+z)^3}=4t-\frac{t^3}{27}$$

với t=$\frac{1}{y+z}$

đến đây xét hàm là xong

tuanyeubeo2000

Đã gửi 24-05-2016 - 17:13

> ***Vào lúc 24 Tháng 5 2016 - 10:26, tien123456789 đã nói:***
>
> ta có $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$
>
> $\Leftrightarrow 9x(y+z)-5x^2=5(x^2+y^2)-18yz\geq -2(y+z)^2 \Rightarrow 2(y+z)^2+9x(y+z)-5x^2\geq 0$
>
> $\Leftrightarrow 2(y+z)\geq x$
>
> khi đó P=$\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}\leq \frac{2(y+z)}{\frac{(y+z)^2}{2}}-\frac{1}{27(y+z)^3}=\frac{4}{y+z}-\frac{1}{27(y+z)^3}=4t-\frac{t^3}{27}$
>
> với t=$\frac{1}{y+z}$
>
> đến đây xét hàm là xong

max =16 :), cách bạn đúng rồi :)

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tuanyeubeo2000**: 24-05-2016 - 17:13

tien123456789

Đã gửi 24-05-2016 - 19:24

Bài 103:cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn 9ab+17bc+14ac+12c-18>0 và$a^2+b^2+c^2=14$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

P=$\frac{8(7+ab)\sqrt{5}}{3\sqrt{9ab+17bc+14ac+12c-18}}+\frac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 24-05-2016 - 20:27

phamngochung9a

Đã gửi 24-05-2016 - 19:53

Bài 104:Cho a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $0 < \dfrac{ab+bc+ca-abc}{ab+bc+ca-1} \le 1.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\left[\left(\frac{a+b+c-abc}{ab+bc+ca-1}\right)^2+2\right]$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **Dinh Xuan Hung**: 24-05-2016 - 20:27

phamngochung9a

Đã gửi 24-05-2016 - 21:07

> ***Vào lúc 24 Tháng 5 2016 - 19:24, tien123456789 đã nói:***
>
> Bài 103:cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn 9ab+17bc+14ac+12c-18>0 và $a^2+b^2+c^2=14$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
>
> P= $\dfrac{8(7+ab)\sqrt{5}}{3\sqrt{9ab+17bc+14ac+12c-18}}+\dfrac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$

Gặp bài này mới thấy rõ được tầm quan trọng của việc lựa chọn điểm rơi....

Từ giả thiết, ta có:

$$\left(a^2+b^2\right)(1+4) \ge (a+2b)^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2 \ge \frac{(a+2b)^2}{5}$$

$$\Rightarrow 18 \ge \frac{(a+2b)^2}{5}+\frac{5}{9}c^2+\frac{4}{9}c^2+4$$

$$\ge \frac{2}{3}c(a+2b)+\frac{4}{3}c$$

$$\Rightarrow c(a+2b)+4c \le 27$$

$$\Rightarrow 12c \le 81-3ca-6bc$$

Vậy:

$$P \ge \frac{4\left[(a+b)^2+c^2\right]\sqrt{5}}{3\sqrt{9ab+11bc+11ca+63}}+\frac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$$

$$\ge \frac{2\sqrt{5}(a+b+c)^2}{3\sqrt{\frac{9}{2}(a+b+c)^2+2c(a+b)}}+\frac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$$

$$\ge \frac{2\sqrt{5}(a+b+c)^2}{3\sqrt{\frac{9}{2}(a+b+c)^2+\frac{(a+b+c)^2}{2}}}+\frac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$$

$$= \frac{2}{3}(a+b+c)+\frac{36}{\sqrt{a+b+c+3}}$$

Đặt $a+b+c=t$ và xét hàm là ngon roài :D

Vậy $\min P = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 24-05-2016 - 21:12

taitueltv

Đã gửi 24-05-2016 - 23:25

> ***Vào lúc 18 Tháng 3 2016 - 22:49, tritanngo99 đã nói:***
>
> Bài 3:

> Không mất tính tổng quát: giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow c \leq \frac{1}{3}$
>
> $\Rightarrow a+b \geq a+c \geq b+c$
>
> $\Rightarrow T \geq 3\left(\frac{4}{a+b} - \frac{1}{c}\right)$
>
> $=> T \geq \frac{12}{1-c} - \frac{3}{c}$
>
> Đặt $f(c) = \frac{12}{1-c} - \frac{3}{c}$ với $0 < c \leq \frac{1}{3}$;
>
> Khảo sát hàm số f(c) với $0 < c \leq \frac{1}{3}$ ta có f(c)=> 9;
>
> => T=>9. Dấu '=' xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. ok

Bài này bạn giải bị nhầm thì phải, sao $f(c) \geq 9$ được nhỉ

---

tien123456789

Đã gửi 25-05-2016 - 08:36

> ***Vào lúc 24 Tháng 5 2016 - 19:53, phamngochung9a đã nói:***
>
> Bài 104:Cho a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $0 < \frac{ab+bc+ca-abc}{ab+bc+ca-1} \leq 1.$
> Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
> $$P = \left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\left[\left(\frac{a+b+c-abc}{ab+bc+ca-1}\right)^2 + 2\right]$$

lời giải của dinh de tai
đầu tiên chúng ta dễ dàng chứng minh bổ đề quen thuộc $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$
Nếu $ab+bc+ca \geq 9$ thì $6(a+b+c)^2 \geq 18(ab+bc+ca) \geq 18.9 = 162 > 81$
Nếu $ab+bc+ca \leq 9$ thì ta có $abc(a+b+c) \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$ ta có

$$P \geq \frac{3\left[(a+b+c)^2 - abc(a+b+c)\right]^2}{(ab+bc+ca-1)^2} + 6(a+b+c)^2$$

$$\geq \frac{\left[9(ab+bc+ca) - (ab+bc+ca)^2\right]^2}{3(ab+bc+ca-1)^2} + 18(ab+bc+ca)$$

.
từ giả thuyết ta dễ dàng suy ra được $abc \geq 1 \Rightarrow ab+bc+ca \geq 3$.Đặt t=ab+bc+ca
đến đây xét hàm là xong
MinP=81 đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tien123456789**: 25-05-2016 - 14:43

---

phamngochung9a

Đã gửi 25-05-2016 - 09:26

> ***Vào lúc 25 Tháng 5 2016 - 08:36, tien123456789 đã nói:***
>
> đầu tiên chúng ta dễ dàng chứng minh bổ đề quen thuộc $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2$
> Nếu $ab+bc+ca \geq 9$ thì $6(a+b+c)^2 \geq 18(ab+bc+ca) \geq 18.9 = 162 > 81$
> Nếu $ab+bc+ca \leq 9$ thì ta có $abc(a+b+c) \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$ ta có
> $$P \geq \frac{3\left[(a+b+c)^2 - abc(a+b+c)\right]^2}{(ab+bc+ca-1)^2} + 6(a+b+c)^2 \geq \frac{\left[9(ab+bc+ca) - (ab+bc+ca)^2\right]^2}{3(ab+bc+ca-1)^2} + 18(ab+bc+ca)$$
> .
> từ giả thuyết ta dễ dàng suy ra được $abc \geq 1 \Rightarrow ab+bc+ca \geq 3$.Đặt t=ab+bc+ca
> đến đây xét hàm là xong

> MinP=81 đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1

Lúc đầu tui cũng giải cách ni nè, nhưng cách ni sai rùi
Chỗ

$$(a+b+c)^2-abc\left(a+b+c\right)\geq 3\left(ab+bc+ca\right)-\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}$$

Ta không thể suy ra được rằng:

$$\left[(a+b+c)^2-abc\left(a+b+c\right)\right]^2\geq\left[3\left(ab+bc+ca\right)-\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}\right]^2$$

vì ta chưa biết dấu của $3\left(ab+bc+ca\right)-\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}$

Một ví dụ đơn giản. Chẳng hạn
$5>-9\Rightarrow 5^2>(-9)^2???$
Nếu muốn bình phương được, ta phải chứng minh cho

$$3\left(ab+bc+ca\right)-\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}>0$$

$\Leftrightarrow ab+bc+ca<9$
Điều này không hề đúng

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 25-05-2016 - 09:48

---

tien123456789

Đã gửi 25-05-2016 - 09:45

> ***Vào lúc 25 Tháng 5 2016 - 09:26, phamngochung9a đã nói:***
>
> Lúc đầu tui cũng giải cách ni nè, nhưng cách ni sai rùi
> Chỗ
>
> $$(a+b+c)^2-abc\left(a+b+c\right)\geq 3\left(ab+bc+ca\right)-\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}$$
>
> Ta không thể suy ra được rằng:
>
> $\left[(a+b+c)^2-abc\left(a+b+c\right)\right]^2\geq\left[3\left(ab+bc+ca\right)-\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}\right]$ vì ta chưa biết dấu của
>
> $$3\left(ab+bc+ca\right)-\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}$$
>
> Một ví dụ đơn giản. Chẳng hạn
> $5>-9\Rightarrow 5^2>(-9)^2???$
> Nếu muốn bình phương được, ta phải chứng minh cho
>
> $$3\left(ab+bc+ca\right)-\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}>0$$
>
> $\Leftrightarrow ab+bc+ca<9$
> Điều này không hề đúng

chỗ$3(ab+bc+ca)-\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}\geq 0$ với $ab+bc+ca\leq 9$
sai ở chỗ là chưa biết dấu của $(a+b+c)^2-abc(a+b+c)$

---

phamngochung9a

Đã gửi 25-05-2016 - 09:59

> ***Vào lúc 25 Tháng 5 2016 - 09:45, tien123456789 đã nói:***
>
> chỗ$(ab+bc+ca)-\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}\geq 0$ với $ab+bc+ca\leq 9$
> sai ở chỗ là chưa biết dấu của $(a+b+c)^2-abc(a+b+c)$

Ui, tôi nhầm tí, bạn giải đúng rồi đó:
Ta chứng minh được

$$(a+b+c)^2-abc\left(a+b+c\right)\geq 3\left(ab+bc+ca\right)-\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{3}\geq 0$$

thì hiển nhiên $(a+b+c)^2-abc(a+b+c)\geq 0$ rồi

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **phamngochung9a**: 25-05-2016 - 10:01

tien123456789

Đã gửi 25-05-2016 - 10:57

bài 105:(Trường THPT Cao Bá Quát)cho các số thực dương x,y,z.Tìm GTNN của biểu thức

$$\frac{9}{7x+y+4\sqrt{xy}+18\sqrt[3]{xyz}}+\frac{1}{2}(x+y+z)^2+2$$

tuanyeubeo2000

Đã gửi 25-05-2016 - 11:14

> ***Vào lúc 25 Tháng 5 2016 - 08:36, tien123456789 đã nói:***
>
> đầu tiên chúng ta dễ dàng chứng minh bổ đề quen thuộc $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2$
> Nếu $ab+bc+ca\geq 9$ thì $6(a+b+c)^2\geq 18(ab+bc+ca)\geq 18.9=162>81$
> Nếu $ab+bc+ca\leq 9$ thì ta có $abc(a+b+c)\leq\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$ ta có
> $$P\geq\frac{3\left[(a+b+c)^2-abc(a+b+c)\right]^2}{(ab+bc+ca-1)^2}+6(a+b+c)^2\geq\frac{\left[9(ab+bc+ca)-(ab+bc+ca)^2\right]^2}{3(ab+bc+ca-1)^2}+18(ab+bc+ca)$$
> .
> từ giả thuyết ta dễ dàng suy ra được $abc\geq 1\Rightarrow ab+bc+ca\geq 3$.Đặt t=ab+bc+ca
> đến đây xét hàm là xong
> MinP=81 đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1

sau nhờ người khác thì ghi nguồn vào nhé bạn 😁

tuanyeubeo2000

Đã gửi 25-05-2016 - 11:16

> ***Vào lúc 25 Tháng 5 2016 - 11:16, tuanyeubeo2000 đã nói:***

> ***Vào lúc 25 Tháng 5 2016 - 08:36, tien123456789 đã nói:***
>
> đầu tiên chúng ta dễ dàng chứng minh bổ đề quen thuộc $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 3(a+b+c)^2$
> Nếu $ab+bc+ca\geq 9$ thì $6(a+b+c)^2\geq 18(ab+bc+ca)\geq 18.9=162>81$
> Nếu $ab+bc+ca\leq 9$ thì ta có $abc(a+b+c)\leq\frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$ ta có
> $$P\geq\frac{3\left[(a+b+c)^2-abc(a+b+c)\right]^2}{(ab+bc+ca-1)^2}+6(a+b+c)^2\geq\frac{\left[9(ab+bc+ca)-(ab+bc+ca)^2\right]^2}{3(ab+bc+ca-1)^2}+18(ab+bc+ca)$$
> .
> từ giả thuyết ta dễ dàng suy ra được $abc\geq 1\Rightarrow ab+bc+ca\geq 3$.Đặt t=ab+bc+ca
> đến đây xét hàm là xong
> MinP=81 đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1

với lại lần sau ghi rõ ra sao có $abc\geq 1$ được bạn nhé , vì điều kiện vậy bạn chưa chứng minh mẫu âm hay dương

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tuanyeubeo2000**: 25-05-2016 - 11:19

tuanyeubeo2000

Đã gửi 25-05-2016 - 11:21

<u>Bài 106 :</u> (THPT NAM SÁCH- HẢI DƯƠNG)

$Cho \quad a,b,c>0 \quad thõa \quad mãn \quad : \quad x+y+z=3 \quad .CMR:$

$$P=\sum \frac{x(y+z)}{4-yz} \geq 2xyz$$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tuanyeubeo2000**: 25-05-2016 - 16:13

tungteng532000

Đã gửi 25-05-2016 - 15:26

> ***Vào lúc 25 Tháng 5 2016 - 11:21, tuanyeubeo2000 đã nói:***
>
> ***Bài 106 :*** (THPT NAM SÁCH- HẢI DƯƠNG)
>
> $Cho \quad a,b,c>0 \quad thõa \quad mãn \quad : \quad a+b+c=3 \quad .CMR:$
>
> $$P=\sum \frac{x(y+z)}{4-yz} \geq 2xyz$$

Bđt cần chứng minh tương đương:

$$T=\sum \frac{b+c}{bc(4-bc)} \geq 2$$

Lại có: $b+c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow T \geq \sum \frac{2\sqrt{bc}}{bc(4-bc)} = \sum \frac{2}{\sqrt{bc}(4-bc)}$

Đặt $\sqrt{ab}=x, \sqrt{bc}=y, \sqrt{ca}=z$ suy ra $x+y+z \leq 3$, ta có: $T \geq \sum \frac{2}{x(4-x^2)}$

Ta chứng minh:

$$\frac{1}{x(4-x^2)} \geq \frac{1}{3}-\frac{1}{9}(x-1) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x-1+\sqrt{10})(1+\sqrt{10}-x)}{9x(4-x^2)} \geq 0$$

đúng với $0<x<3$

Tương tự ta có: $T \geq 2-\frac{2}{9}(x+y+z-3) \geq 2$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1.

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tungteng532000**: 25-05-2016 - 15:32

tuanyeubeo2000

Đã gửi 25-05-2016 - 16:12

> ***Vào lúc 25 Tháng 5 2016 - 15:26, tungteng532000 đã nói:***
>
> Bđt cần chứng minh tương đương:
>
> $$T=\sum \frac{b+c}{bc(4-bc)} \geq 2$$
>
> Lại có: $b+c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow T \geq \sum \frac{2\sqrt{bc}}{bc(4-bc)} = \sum \frac{2}{\sqrt{bc}(4-bc)}$
>
> Đặt $\sqrt{ab}=x, \sqrt{bc}=y, \sqrt{ca}=z$ suy ra $x+y+z \leq 3$, ta có: $T \geq \sum \frac{2}{x(4-x^2)}$
>
> Ta chứng minh: $\frac{1}{x(4-x^2)} \geq \frac{1}{3}-\frac{1}{9}(x-1) \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x-1+\sqrt{10})(1+\sqrt{10}-x)}{9x(4-x^2)} \geq 0$
>
> đúng với $0<x<3$
>
> Tương tự ta có: $T \geq 2-\frac{2}{9}(x+y+z-3) \geq 2$ (đpcm)
>
> Đẳng thức xảy ra khi a=b=c=1.

đoạn sau bạn có thể xử lý bằng C-S mà , sao phải dùng tiếp tuyến cho phức tạp nó nhỉ

tien123456789

Đã gửi 25-05-2016 - 18:10

Bài 107:Chứng Minh Rằng với mọi a,b,c dương,ta đều có:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2$$

tien123456789

Đã gửi 25-05-2016 - 19:05

bài 108:Cho các số thực không âm thỏa mãn a+b+c=$\frac{3}{2}$.Tìm GTNN của biểu thức

P=$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$

nguyenhongsonk612

Đã gửi 25-05-2016 - 21:14

> ***Vào lúc 18 Tháng 5 2016 - 18:35, ngothithuynhan100620 đã nói:***
>
> Bài 85:Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=3xy$.Tìm Min của:
>
> $P=\frac{x^2}{y^2+yz}+\frac{y}{z+x}+\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$

$\boxed{\text{Bài toán 85}}$

Áp dụng BĐT $AM-GM$ ta có

$3xy=x^2+y^2+z^2\geqslant 2xy+z^2\Rightarrow z^2\leqslant xy\Rightarrow z\leqslant\sqrt{xy}$

$\rightarrow\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}\geqslant\frac{\frac{(x+y)^2}{2}}{x^2+xy}=\frac{x+y}{2x}=\frac{1+\frac{y}{x}}{2}$

Theo BĐT $AM-GM$ thì

$$\frac{x^2}{y^2+yz}+\frac{y}{z+x}\geqslant 2\sqrt{\frac{x^2y}{y(z+x)(z+y)}}=\frac{2x}{\sqrt{(z+x)(z+y)}}\geqslant\frac{4x}{2z+x+y}$$

$$\geqslant\frac{4x}{2\sqrt{xy}+x+y}=\frac{4x}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}=\frac{4}{\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2}$$

Từ các điều trên ta có

$$P\geqslant\frac{1+\frac{y}{x}}{2}+\frac{4}{\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2}$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{y}{x}}(t>0)$

$$\Rightarrow P\geqslant f(t)=\frac{1+t^2}{2}+\frac{4}{(1+t)^2}$$

Khảo sát hàm $f(t)$ trên $(0;+\infty)$ ta được $f(t)\geqslant f(1)=2$

Vậy Min $P=2\Leftrightarrow x=y=z$

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **nguyenhongsonk612**: Hôm qua, 08:27

Dinh Xuan Hung

Đã gửi 25-05-2016 - 21:18

Bài 109: (Đề thi thử SD và ĐT tỉnh Ninh Bình 2016)

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $\frac{1}{c^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$P=\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{a+2c}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Tổng hợp các bài BĐT trong các đề thi thử THPT Quốc Gia môn Toán năm 2016

Bắt đầu bởi Dinh Xuan Hung, 18-03-2016 - 21:13

tien123456789

Đã gửi 25-05-2016 - 22:04

> Bài 109: (Đề thi thử SD và ĐT tỉnh Ninh Bình 2016)
>
> Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $\frac{1}{c^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :
>
> $$P=\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{a+2c}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ta có $\frac{1}{c^{2}}= 2(\frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}})\geq (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^{2}\Leftrightarrow \frac{1}{c}\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow ab\geq c(a+b)$
$P=\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{a+2c}+\frac{c}{\sqrt{a^{2}+b^{2}+c^{2}}}\geq \frac{(a+b)^{2}}{2ab+c(a+b)}+\frac{1}{\sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}}{c^{2}}+1}}\geq \frac{(a+b)^{2}}{4ab}+\frac{1}{\sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}}{c^{2}}+1}}$
mà theo giả thiết $\frac{1}{c^{2}}= \frac{1}{a^{2}}+\frac{1}{b^{2}}\Rightarrow c^{2}=\frac{a^{2}b^{2}}{2(a^{2}+b^{2})}$ nên suy ra
$P\geq \frac{a^{2}+b^{2}}{4ab}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2(\frac{a^{2}+b^{2}}{ab})^{2}+1}}$
đặt $\frac{a^{2}+b^{2}}{ab}= t$ sau đó xét hàm là xong

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tien123456789**: 25-05-2016 - 22:07

phamngochung9a

Đã gửi 25-05-2016 - 22:26

> bài 108:Cho các số thực không âm thỏa mãn a+b+c=$\frac{3}{2}$.Tìm GTNN của biểu thức
> P=$(a^{2}+1)(b^{2}+1)(c^{2}+1)$

Ta sẽ chứng minh:
$\left (a^{2}+1 \right)\left (b^{2}+1 \right)\left (c^{2}+1 \right)\geq \frac{5}{16}\left (a+b+c+1 \right)^{2}$
Thật vậy:
$\left (a^{2}+1 \right)\left (b^{2}+1 \right)\left (c^{2}+1 \right)\\=\left (a^{2}b^{2}+a^{2}+b^{2}+1 \right)\left (c^{2}+1 \right)\\=\left (a^{2}b^{2}+\frac{1}{16}+a^{2}+b^{2}+\frac{15}{16} \right)\left (c^{2}+1 \right)\\\geq \left (a^{2}+\frac{1}{2}ab+b^{2}+\frac{15}{16} \right)\left (c^{2}+1 \right)\\\geq \left [\frac{5}{8}\left (a+b \right)^{2}+\frac{15}{16} \right]\left (c^{2}+1 \right)$
Vậy ta chỉ cần chứng minh:
$\left [\frac{5}{8}\left (a+b \right)^{2}+\frac{15}{16} \right]\geq \frac{5}{16}\left (a+b+c+1 \right)^{2}\\\Leftrightarrow \left [2\left (a+b \right)^{2}+3 \right]\left (c^{2}+1 \right)\geq \left (a+b+c+1 \right)^{2}$
Đặt $a+b=x$, bằng biến đổi tương đương, dễ chứng minh:
$2x^{2}+3\geq \left (x+1 \right)^{2}+1$
$\Rightarrow \left (2x^{2}+3 \right)\left (c^{2}+1 \right)\geq \left [\left (x+1 \right)^{2}+1 \right]\left (1+c^{2} \right)\\\geq \left (x+c+1 \right)^{2}\rightarrow Q.E.D$

tungteng532000

Đã gửi 25-05-2016 - 22:53

> Bài 107:Chứng Minh Rằng với mọi a,b,c dương,ta đều có:
> $\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$\geq 2$

Ta có: $(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-1)+(\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}-1)=(a-b)^2(\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{2c}{(a+b)(b+c)(c+a)})+(a-c)(b-c)(\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(b+c)(c+a)})$
Giả sử $a\geq b\geq c$
Đang tải [MathJax]/jax/output/SVG/config.js $\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{2c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq \frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{a+b}{(a+b)(b+c)

(c+a)}=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(b+c)(c+a)}=\frac{c^2}{(ab+bc+ca)(b+c)(c+a)}>0$
$\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{1}{(b+c)(c+a)}=\frac{c^2}{(ab+bc+ca)(b+c)(c+a)}>0$
Bđt được chứng minh, đẳng thức xảy ra khi a=b=c.

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **tungteng532000**: 25-05-2016 - 22:54

nguyenhongsonk612

Đã gửi Hôm qua, 01:16

> Bài 109: (Đề thi thử SD và ĐT tỉnh Ninh Bình 2016)
>
> Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn : $\frac{1}{c^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :
>
> $$P=\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{a+2c}+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Cách giải **bài 109**
http://diendantoanho...raccsqrta2b2c2/ (http://diendantoanhoc.net/topic/139622-pfracabcfracbacfraccsqrta2b2c2/)
Mình thấy đây là bài toán không phải mới nên lười gõ

Bài viết đã được chỉnh sửa nội dung bởi **nguyenhongsonk612**: Hôm qua, 01:17

Dinh Xuan Hung

Đã gửi Hôm qua, 11:31

Bài 110 (Đề thi thử lần 2 chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai năm 2016)

Cho x,y dương thỏa mãn : $x^4+y^4+\frac{4}{xy}=9xy-3$. Tìm GTLN của biểu thức : $P=\frac{1}{(x^3+y^3)(x^2+y^2)}-\frac{1}{1+2xy}$