# ĐỀ TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN LÀO CAI

## MÔN: TOÁN CHUYÊN NGÀY: 9/6/2016

*Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)*

**Câu 1 (2 điểm).** Cho biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với $0 \le x \ne 4$.

a) Rút gọn $P$; b)Tính giá trị của $P$ với $x = 4 - 2\sqrt{3}$;

c) Tìm $x$ để $P < \frac{5}{2}$; d) Tìm $x$ để $P$ nhận giá trị nguyên.

**Câu 2 (2 điểm).**

1. Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0 \quad (1)$. Tìm tất cả giá trị của $m$ để phương trình $(1)$ có 2 nghiệm $x_1, x_2$ sao cho $\frac{1}{\sqrt{x_1^4+x_2^4}}$ đạt giá trị lớn nhất.
2. Cho đường thẳng $(d) : y = 3x + 6$ và đường thẳng $(d') : y = (m^2 - 2m)x + 2m$.

   Tìm $m$ để đường thẳng $(d)$ song song với $(d')$.

**Câu 3 (2 điểm).**

a) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$

Tìm $m$ để hệ có nghiệm duy nhất $x, y$ sao cho $x^3 - y^3 = 64$.

b) Quãng đường AB dài 150km. Một ô tô đi từ A đến B rồi dừng lại nghỉ 15 phút và đi tiếp 50 km nữa để đến C với vận tốc lớn hơn khi đi từ A đến B là 15 km/h. Tính vận tốc của ô tô khi đi trên quãng đường AB. Biết tổng thời gian kể từ khi ô tô xuất phát từ A đến khi tới C là 3 giờ 25 phút.

**Câu 4 (1 điểm).** Cho $a, b, c$ là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$. Chứng minh

$$\frac{1}{8a^2+1} + \frac{1}{8b^2+1} + \frac{1}{8c^2+1} \ge 1.$$

**Câu 5 (3 điểm).** Cho tam giác nhọn ABC (AB<AC) nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến BC. Gọi P, Q lần lượt là chân đường cao kẻ từ H đến AB, AC. Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M, đường thẳng MA cắt đường tròn $(O)$ tại $K$ với $K \not\equiv A$. Gọi $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCP.

a) Chứng minh các tứ giác APHQ, BPQC nội tiếp;

b) Chứng minh $MP.MQ = MB.MC$ và $MB.MC = MK.MA$;

c) Chứng minh $AKPQ$ là tứ giác nội tiếp;

d) Chứng minh $I, H, K$ thẳng hàng.

—Hết—

# GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN
# THPT CHUYÊN LÀO CAI NĂM 2016

Mọi trao đổi về lời giải, xin liên hệ số điện thoại bên dưới:

***Giáo viên Đào Xuân Tiềm: 0983.827.929***

***Giáo viên Nguyễn Quang Tân: 0985.038.967***

**Câu 1.** Cho biểu thức$P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{2+5\sqrt{x}}{4-x}, x \geq 0, x \neq 4$

a) Với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$P = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4} + \frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{x-4} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$$
$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{x-4}$$
$$= \frac{3x-6\sqrt{x}}{x-4} = \frac{3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

b) Tính P khi $x = 4-2\sqrt{3}$. Ta có $x = 4-2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}-1\right)^2$ nên:

$$P = \frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}-1+2} = \frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}+1} = \frac{3\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} = \frac{3\left(4-2\sqrt{3}\right)}{2} = 6-3\sqrt{3}$$

c) Giải bất phương trình $P < \frac{5}{2}$.

$P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 6\sqrt{x} < 5\sqrt{x}+10 \quad (\text{do } \sqrt{x}+2 > 0)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 10 \Leftrightarrow 0 \leq x < 100$

Vậy : $\begin{cases} 0 \leq x < 100 \\ x \neq 4 \end{cases}$

d) Ta có $P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{3\left(\sqrt{x}+2\right)-6}{\sqrt{x}+2} = 3 - \frac{6}{\sqrt{x}+2}$

Để P nguyên thì $\frac{6}{\sqrt{x}+2}$ là số nguyên, khi đó $t = \sqrt{x}+2$ là ước của 6.

Nhưng do $x \geq 0$ nên $t = \sqrt{x}+2 \in \{2;3;6\}$ tương ứng $x \in \{0;1;16\}$.

Vậy $x \in \{0;1;16\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 2.**

1. Để phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2^2 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$.

   Khi đó theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1.x_2 = -m \end{cases}$

$x_1^4 + x_2^4 = \left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2(x_1x_2)^2 = \left[(-4)^2 + 2m\right]^2 - 2m^2$

$= 2(m+4)^2 + 48(m+4) + 32 \geq 32$ với $\forall m \geq -4$

$\Rightarrow x_1^4 + x_2^4 \geq 32 \Rightarrow \sqrt{x_1^4 + x_2^4} \geq 4\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1^4+x_2^4}} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{1}{\sqrt{x_1^4+x_2^4}}$ bằng $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ khi $m = -4$.

2. $d//d' \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m = 3 \\ 2m \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right. \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$

**Câu 3.**

1. Từ phương trình hai $\Rightarrow y = 2x - m - 5$ thay vào phương trình $(1)$ ta được

   $(m+1)x = m^2 + 2m + 1$ $(*)$

   Để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

   Khi đó $(*) \Leftrightarrow x = m + 1 \Rightarrow y = m - 3$.

   Theo đề bài $x^3 - y^3 = 64 \Rightarrow (m+1)^3 - (m-3)^3 = 64$

   $\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 (\text{lọai}) \\ m = 3 (\text{thỏa mãn}) \end{array}\right.$

2. Goi $v(km/h)$ là vận tốc ô tô trên quãng đường $AB$ $(v > 0)$.

   Thời gian ô tô đi hết quãng đường $AB$ là $\frac{150}{v}$.

   Thời gian ô tô đi hết quãng đường $BC$ là $\frac{50}{v+15}$.

   Theo giả thiết ta có phương trình:

   $\dfrac{150}{v} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{50}{v+15} = \dfrac{41}{12}$

   $\Leftrightarrow 19v^2 - 915v - 13500 = 0$

   $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 60 \ \ (\text{thỏa mãn}) \\ v = -\dfrac{225}{19} \ \ (\text{loại}) \end{array}\right.$

   Vậy $v = 60km/h$

**Câu 4.** Cho $a, b, c$ là các số dương thỏa mãn: $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$. Chứng minh

$$\frac{1}{8a^2+1} + \frac{1}{8b^2+1} + \frac{1}{8c^2+1} \geq 1.$$

Ta có:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=2 \Rightarrow 3-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1})=1$$
$$\Rightarrow \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=1$$

Trở lại bất đẳng thức:

$$\frac{1}{8a^2+1}+\frac{1}{8b^2+1}+\frac{1}{8c^2+1}\geq 1 \Leftrightarrow 3-(\frac{1}{8a^2+1}+\frac{1}{8b^2+1}+\frac{1}{8c^2+1})\leq 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{8a^2}{8a^2+1}+\frac{8b^2}{8b^2+1}+\frac{8c^2}{8c^2+1}\leq 2 \Leftrightarrow \frac{4a^2}{8a^2+1}+\frac{4b^2}{8b^2+1}+\frac{4c^2}{8c^2+1}\leq 1$$

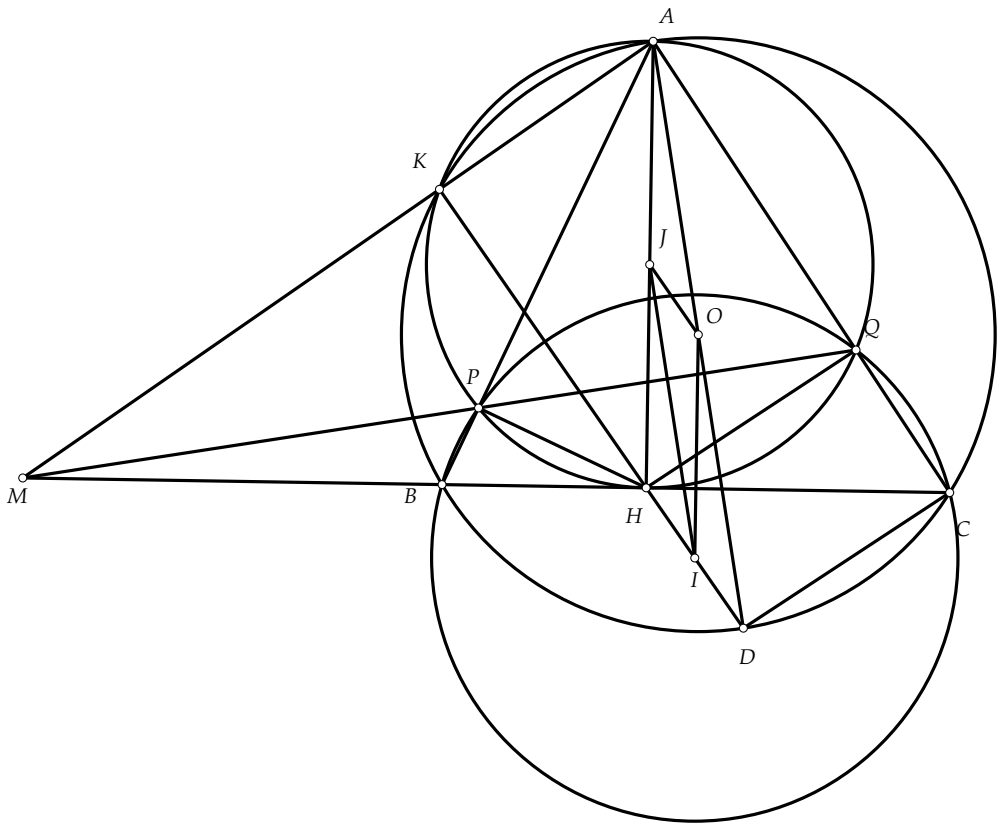
Bây giờ ta sẽ chứng minh:

$$\frac{4a^2}{8a^2+1}\leq \frac{a}{a+1} \Leftrightarrow 4a^3+4a^2\leq 8a^3+a$$
$$\Leftrightarrow 0\leq 4a^3-4a^2+a \Leftrightarrow 0\leq 4a^2-4a+1 \Leftrightarrow 0\leq (2a-1)^2$$

Tương tự: $\frac{4b^2}{8b^2+1}\leq \frac{b}{b+1}$ và $\frac{4c^2}{8c^2+1}\leq \frac{c}{c+1}$

Cộng các bất đẳng thức trên lại ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$.




**Câu 5.**

a) Do $\widehat{APH}=\widehat{AQH}=90^\circ \Rightarrow \widehat{APH}+\widehat{AQH}=180^\circ$ nên $APHQ$ là tứ giác nội tiếp;

Do APHQ nội tiếp nên $\widehat{APQ}=\widehat{AHQ}$.

Mà $\widehat{AHQ}+\widehat{QHC}=90^\circ$ và $\widehat{QHC}+\widehat{QCH}=90^\circ$.

Nên $\widehat{AHQ}=\widehat{QCH}$ hay $\widehat{APQ}=\widehat{QCB}$. Vậy $BPQC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét tam giác MPB và MCQ có góc M chung

$\widehat{MPB} = \widehat{MCQ}$ (vì tứ giác BPQC nội tiếp).

Nên $\triangle MPB$ đồng dạng với $\triangle MCQ$ nên $\frac{MP}{MC} = \frac{MB}{MQ}$ hay $MP.MQ = MC.MB$.

Hoàn toàn tương tự ta có: $MB.MC = MK.MA$.

c) Từ ý b) ta có: $MK.MA = MP.MQ$ nên $\frac{MK}{MP} = \frac{MQ}{MA}$.

Hai tam giác $\triangle MKP$ và $\triangle MQA$ lại có góc M chung nên đồng dạng.

Suy ra: $\widehat{MKP} = \widehat{MQA}$ nên tứ giác KPQA nội tiếp.

d) Do $P, Q$ nằm trên đường tròn đường kính AH

mà KPQA là tứ giác nội tiếp nên $K$ cũng thuộc đường tròn đường kính AH

suy ra $\widehat{AKH} = 90^\circ$ hay $HK \perp AK \quad (*)$.

Gọi J là trung điểm AH. Vẽ đường kính AD của đường tròn $(O)$.

Ta có $AJ \perp BC$. Vì OI là trung trực BC nên $OI \perp BC$. Suy ra: $AJ \parallel OI \quad (1)$.

Vì IJ là trung trực của PQ nên $IJ \perp PQ \quad (2)$.

Mặt khác $\widehat{AQP} = \widehat{ABC}$ (tứ giác BPQC nội tiếp).

Và $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ (hai góc nội tiếp chắn cung $\overset{\frown}{AC}$).

Nên $\widehat{OAQ} + \widehat{AQP} = \widehat{OAQ} + \widehat{ADC} = 90^\circ$.

Suy ra $AO \perp PQ \quad (3)$.

Từ $(2)$ và $(3)$ ta có: $AO \parallel IJ \quad (4)$.

Từ $(3)$ và $(4)$ ta có: $AJIO$ là hình bình hành nên $AJ = OI$ suy ra $JH = OI$.

Do đó $JHIO$ là hình bình hành nên $HI \parallel OJ$.

Vì $OJ$ là trung trực của $AK$ nên $OJ \perp AK$, suy ra $HI \perp AK \quad (**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có: I, H, K thẳng hàng.