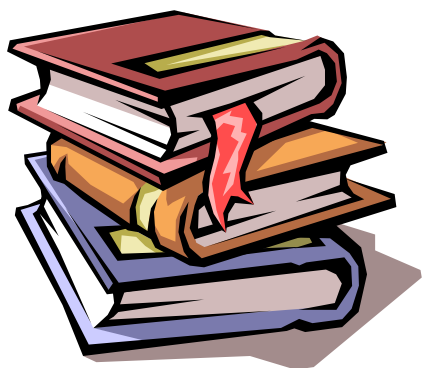


TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU



ĐỀ TÀI NGHIÊN CỨU KHOA HỌC
NGUYÊN LÝ DIRICHLET VÀ ỨNG DỤNG
TRONG VIỆC GIẢI CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Tác giả: Ngô Minh Ngọc Richard

Lớp: 10CT

GVCN: Thầy Nguyễn Văn Quang

NĂM HỌC 2014 – 2015

LỜI NÓI ĐẦU

Trong các kì thi chọn đội tuyển, chọn học sinh giỏi các cấp hiện nay, các bài toán Đại số sơ cấp đang xuất hiện ít dần trong các đề thi, thay vào đó là sự xuất hiện ngày càng nhiều của các bài toán Số học, Tổ hợp. Các bài toán này chiếm tỉ lệ khá cao trong thang điểm. Đặc biệt, câu Tổ hợp thường được học sinh mặc định ngầm là câu khó nhất trong đề thi. Tuy nhiên, nếu nắm vững một số phương pháp, câu Tổ hợp hoàn toàn có thể được giải quyết. Một trong những phương pháp cơ bản nhất là sử dụng nguyên lí Dirichlet, hay còn gọi là nguyên lí “chuồng và thỏ”, nguyên lí ngăn kéo, v.v... Nguyên lí Dirichlet có nội dung khá đơn giản, song lại là công cụ quan trọng và có nhiều ứng dụng sâu sắc trong toán học.

Trong giới hạn khuôn khổ đề tài, tác giả xin được trình bày các khái niệm về nguyên lí Dirichlet và ứng dụng của nguyên lí trong 2 dạng toán: *Tổ hợp* và *Bất đẳng thức*. Do đã có nhiều tài liệu viết về các bài toán sử dụng Dirichlet nên các bài toán trong được tác giả đưa ra trong phần ứng dụng là những bài toán hay và mang tính chọn lọc. Hy vọng đề tài sẽ giúp ích cho những ai chưa quen với việc sử dụng Dirichlet để giải toán.

Mặc dù rất cố gắng nhưng chắc chắn đề tài vẫn còn những thiếu sót, mong người đọc thông cảm và góp ý để đề tài được hoàn thiện hơn.

Phần I:

KHÁI NIỆM VỀ NGUYÊN LÝ DIRICHLET

1. Vài nét về nguyên lý Dirichlet:



Nguyên lý Dirichlet được đặt theo tên của nhà toán học người Đức *Johann Dirichlet* (1805-1859). Ông là người đầu tiên đề xuất và phát biểu nguyên lý này vào năm 1834. Nguyên lý này có rất nhiều ứng dụng quan trọng trong hầu hết các lĩnh vực toán học. Đối với các bạn học sinh, đây là công cụ không thể thiếu khi gặp những bài toán mà các phương pháp thông thường không mang lại hiệu quả.

2. Nguyên lý Dirichlet:

- Nguyên lý Dirichlet có nhiều cách phát biểu khác nhau, sau đây là cách phát biểu dưới dạng “ngăn kéo”:

Nếu xếp n vật vào m ($m \geq 2$) ngăn kéo thì luôn tồn tại ít nhất 1 ngăn có chứa ít nhất $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ vật. (Kí hiệu $[a]$ để chỉ số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn a).

Hoặc: Nếu xếp $nm + k$ ($n > k$) vật vào m ngăn kéo thì luôn tồn tại ít nhất 1 ngăn có chứa ít nhất $n + 1$ vật.

Chứng minh: Giả sử tất cả các ngăn đều có nhiều nhất là m vật, khi đó tổng số vật sẽ không vượt quá mn , điều này vô lý. Do đó nguyên lý được chứng minh.

- Lợi thế của nguyên lý Dirichlet là ta có thể chỉ ra sự tồn tại của một đối tượng mà không cần quan tâm đến tính chất của đối tượng đó. Chẳng hạn khi ta *phân hoạch một tập hợp gồm 10 phần tử thành 3 tập con*, thì dù ta không biết những phần tử đó là gì, ta vẫn có thể khẳng định rằng *tồn tại một tập con có chứa ít nhất 4 phần tử*.

- Khi giải toán, muốn áp dụng nguyên lý Dirichlet, cần phải nhận ra hai yếu tố, đó là “vật” và “ngăn”. Có khá nhiều bài toán, hai yếu tố này xuất hiện khá mập mờ trong đề bài, đòi hỏi chúng ta phải có kỹ năng để nhận ra chúng. Các bài toán trong phần II sẽ cho chúng ta thấy rõ hơn điều này.

Phần II:

ỨNG DỤNG CỦA NGUYÊN LÍ DIRICHLET TRONG CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

1. Tổ hợp:

❖ Do đã có nhiều chuyên đề nói về các bài toán *Tổ hợp* nên tác giả chỉ xin đưa ra những bài toán hay và mang tính tiêu biểu.

Ví dụ 1: Cho bảng ô vuông kích thước 2000×2001 (hàng $\times$ cột). Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho ta có thể tô màu k ô vuông con của bảng thỏa mãn điều kiện: hai ô vuông con nào được tô màu cũng không có đỉnh chung.

VMO 2001 – Bảng B

Giải:

Đánh số các hàng từ trái qua phải, các cột từ trên xuống dưới.

Quy ước: ô có tọa độ $(i; j)$, $(i, j \in \mathbb{N}^*, i \leq 2000, j \leq 2001)$, là ô nằm ở hàng i , cột j

- Chia bảng ô vuông như sau:

	1	2	3	4	...	1999	2000	2001
1								
2								
3								
4								
⋮								
⋮								
⋮								
1999								
2000								

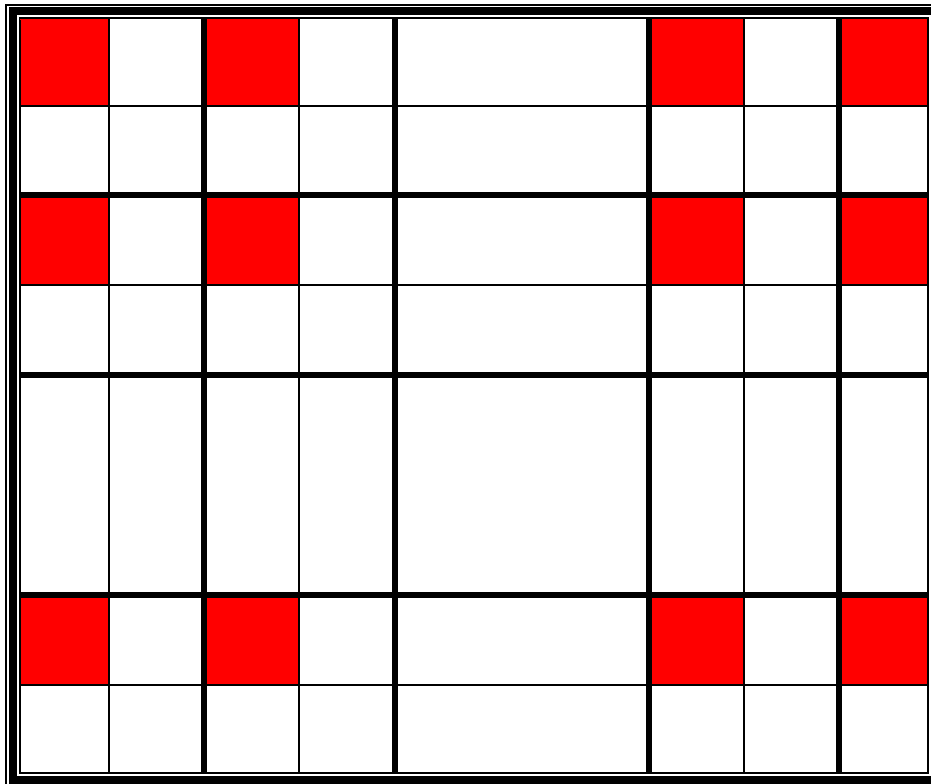
Dễ thấy rằng bảng ô vuông được chia thành 1000.1001 miền phân biệt.

- Giả sử có nhiều hơn 1000.1001 ô vuông được tô màu. Theo nguyên lý Dirichlet, có ít nhất hai ô vuông được tô màu nằm trong cùng một miền, tức là tồn tại hai ô vuông được tô màu có chung đỉnh, điều này trái với giả thiết.

Suy ra, $k \leq 1000.1001$

- Ta sẽ chỉ ra cách tô thỏa $k = 1000.1001$:

Tô tất cả các ô có tọa độ $(2x - 1, 2y - 1), \forall x, y \in \mathbb{N}^*, x \leq 1000, y \leq 1001$



Dễ thấy cách tô trên thỏa đề và số ô được tô là 1000.1001

Vậy, giá trị lớn nhất của k là 1000.1001

➤ Nhận xét: Đây là bài toán khá dễ, ý tưởng chia bảng ô vuông thành các miền phân biệt là rất rõ ràng.

Ví dụ 2: Với mỗi số nguyên dương $n, (n \geq 2)$, ta xét một bảng ô vuông $n \times n$. Mỗi ô vuông con được tô bởi màu đỏ hoặc màu xanh. Tìm số n nhỏ nhất sao cho với mỗi cách tô ta luôn chọn được một hình chữ nhật kích thước $m \times k$ ($2 \leq m, k \leq n$) mà bốn ô vuông con ở 4 góc của hình chữ nhật này có cùng màu.

Đề thi chọn đội tuyển HSG lớp 10 – KHTN Hà Nội (2014 – 2015)

Giải:

Gọi một hình chữ nhật (HCN) thoả mãn đề bài là một HCN tốt.

❖ Với $n \in \{2; 3; 4\}$ thì tồn tại cách tô sao cho không tồn tại HCN tốt.

Ta chứng minh: $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 5$, hình vuông $n \times n$ luôn tồn tại một HCN tốt.

❖ Với $n = 5$, xét hình vuông 5×5 :

Theo nguyên lí Dirichlet, mỗi cột luôn tồn tại ít nhất 3 ô cùng màu.

❖ Nếu tồn tại một cột có 5 ô đỏ (xanh), dễ thấy luôn tồn tại một HCN tốt với 4 đỉnh màu xanh (đỏ).

❖ Nếu tồn tại một cột có 4 ô đỏ hoặc xanh. Giả sử cột đó có 4 ô đỏ:
Ta thấy rằng trong 4 cột còn lại nếu có nhiều hơn một cột có 2 ô đỏ thì sẽ tồn tại một HCN tốt với 4 đỉnh màu đỏ. Do đó trong 4 cột còn lại chỉ có nhiều nhất một cột có 2 ô đỏ. Tức là ta sẽ có 3 cột có ít nhất 4 ô xanh, do đó tồn tại một HCN tốt với 4 đỉnh màu xanh.

❖ Xét trường hợp tất cả các cột được tô 3 ô đỏ, 2 ô xanh hoặc 3 ô xanh, 2 ô đỏ:
Theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 3 cột có 3 ô được tô cùng màu, không mất tổng quát giả sử các ô này được tô cùng màu đỏ.

Xét 4 hàng bất kì trong 5 hàng. Do hàng còn lại có tối đa 3 ô đỏ nên tổng số ô đỏ của 3 cột ở 4 hàng này không nhỏ hơn:

$$3 \cdot 3 - 3 = 6 = 4 + 2$$

Do đó theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại 2 cột có cùng ô đỏ ở 2 trong 4 hàng này nên tồn tại một HCN tốt với 4 đỉnh màu đỏ.

Vậy, luôn tồn tại một HCN tốt trong hình vuông 5×5 .

Với $n > 5$, hình vuông $n \times n$ chứa hình vuông 5×5 nên luôn tồn tại một HCN tốt.

Vậy, $n = 5$ là giá trị nhỏ nhất thoả mãn đề bài.

➤ **Nhận xét:** Đây là câu tổ hợp của đề thi chọn đội tuyển của trường KHTN được đăng trên Diễn đàn VMF. Ý tưởng đến khá tự nhiên thông qua việc cố gắng tìm một cách vẽ thoả trường hợp $n = 5$. Tác giả đoán rằng không thể vẽ được như vậy, và ý tưởng sử dụng nguyên lí Dirichlet được nảy sinh. Công việc còn lại chỉ là chia trường hợp và giải quyết bài toán.

Ví dụ 3: Cho A và B là hai tập con của tập $\{1; 2; 3; \dots; 100\}$ thỏa $|A| = |B|$ và $|A \cap B| = \emptyset$. Xác định số phần tử lớn nhất của tập $A \cup B$ sao cho với $n \in A$, ta luôn có $2n + 2 \in B$.

Đề thi đề nghị Olympic truyền thống 30/4 (2011-2012)

Giải:

Vì $2n + 2 \in B$ mà $B \subset \{1; 2; 3; \dots; 100\}$ nên: $2n + 2 \leq 100 \Rightarrow n \leq 49$

Do đó: $A \subset \{1; 2; 3; \dots; 49\}$

Ta chia tập $\{1; 2; 3; \dots; 49\}$ thành 33 tập con như sau:

Nhóm 1: Gồm 16 tập con chứa đúng 2 phần tử: $\{1; 4\}, \{2; 6\}, \{3; 8\}, \{5; 12\}, \{7; 16\}, \{9; 20\}, \{10; 22\}, \{11; 24\}, \{13; 28\}, \{14; 30\}, \{15; 32\}, \{17; 36\}, \{18; 38\}, \{19; 40\}, \{21; 44\}, \{23; 48\}$. Các tập này đều có dạng $\{x, 2x + 2\}$.

Nhóm 2: Gồm 17 tập con chứa đúng 1 phần tử: $\{25\}, \{26\}; \{27\}, \{29\}, \{31\}, \{33\}, \{34\}, \{35\}, \{37\}, \{39\}, \{41\}, \{42\}, \{43\}, \{45\}, \{46\}, \{47\}, \{49\}$.

Nếu $|A| \geq 34$, khi đó theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất một trong 16 tập con ở nhóm một có 2 phần tử đều thuộc tập A , tức là tồn tại 2 số x và $2x + 2$ cùng thuộc tập A , điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Suy ra, $|A| \leq 33 \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2|A| \leq 66$

Ta chọn hai tập A, B như sau:

Chọn tập A : $A = \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 10; 11; 13; 14; 15; 17; 18; 19; 21; 23;$

$25; 26; 27; 29; 31; 33; 34; 35; 37; 39; 41; 42; 43; 45; 46; 47; 49\}$

Chọn tập B : $B = \{2n + 2 | n \in A\}$

Rõ ràng 2 tập A, B thỏa đề và $|A \cup B| = 66$

Vậy, số phần tử lớn nhất của tập $|A \cup B|$ là 66.

➤ Nhận xét: Bản chất bài toán khá đơn giản, tuy nhiên để giải đúng nó thì cần phải có sự kiên nhẫn trong việc phân hoạch tập $\{1; 2; 3; \dots; 49\}$. Đây là một trong những bài rất dễ sai đáp số.

Ví dụ 4: Cho tập $X = \{1; 2; 3; \dots; 15\}$. Gọi M là một tập con của X thỏa điều kiện tích 3 phần tử bất kì của M đều không phải là số chính phương. Tìm số phần tử lớn nhất của M .

IMO Shortlist 1994

Giải:

Gọi bộ ba phần tử bất kì của X có tích là số chính phương là một bộ xấu.

Chia tập X thành 5 tập con như sau:

$$A_1 = \{1; 4; 9\}, A_2 = \{2; 6; 12\}, A_3 = \{3; 5; 15\}, A_4 = \{7; 8; 14\}, B = \{10; 11; 13\}$$

Ta thấy rằng các bộ ba phần tử của $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ đều là các bộ xấu.

Nếu $|M| \geq 12$ thì theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 2 trong 5 tập trên là tập con của M , suy ra có ít nhất một bộ xấu được chứa trong M . Suy ra $|M| \leq 11$.

Giả sử $|M| = 11$. Áp dụng nguyên lí Dirichlet, có 1 trong 5 tập trên là tập con của M . Để M không chứa bộ xấu thì tập B phải là tập con của M , các tập $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ mỗi tập có 2 phần tử thuộc M .

Vì $B \subset M$ nên ta có $10 \in M$. Ta có hai bộ xấu đi với 10 là $(2; 5; 10), (6; 10; 15)$.

Dễ thấy rằng thấy rằng nếu cả 3 và 12 không thuộc M thì sẽ có ít nhất một trong hai bộ xấu trên được chứa trong M .

Suy ra $3 \in M$ và $12 \in M$. Tuy nhiên ta lại có hai bộ xấu đi với 3 và 12 là hai bộ $(3; 12; 1), (3; 12; 9)$. Mặt khác 1 và 9 đều thuộc tập A_1 , nên chắc chắn có ít nhất một trong hai phần tử này thuộc M . Điều này đồng nghĩa với việc một trong hai bộ xấu trên sẽ được chứa trong M , gây mâu thuẫn với giả thiết.

Suy ra, $|M| \leq 10$.

Ta sẽ chỉ ra tập M có đúng 10 phần tử thỏa yêu cầu đề bài:

$$M = \{1; 4; 5; 6; 7; 10; 11; 12; 13; 14\}$$

Vậy, số phần tử lớn nhất của M là 10.

➤ **Nhận xét:** Bài toán này cũng thuộc dạng phân hoạch tập hợp như bài trên, nhưng lại là một bài toán khá khó, đòi hỏi tính tư duy tổ hợp cao. Việc chia tập hợp để chỉ ra $|M| \leq 11$ là điều dễ nhận ra, nhưng để chỉ ra $|M| \leq 10$ thì lại là cả một vấn đề. Đây là một bài toán rất hay và thú vị.

Ví dụ 5: Cho $n + 1$ số nguyên dương khác nhau và nhỏ hơn $2n$. Chứng minh tồn tại ba số trong $n + 1$ số đó mà một số bằng tổng hai số kia.

Giải:

Gọi $n + 1$ số nguyên dương đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$

Không mất tổng quát giả sử: $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} \leq 2n - 1$

Đặt $b_i = a_i - a_1$ ($i = 2, 3, \dots, n + 1$).

Suy ra: $1 \leq b_2 < b_3 < \dots < b_n < b_{n+1} \leq 2n - 1$

Xét dãy $2n$ số $a_2, a_3, \dots, a_{n+1}; b_2; b_3; \dots; b_{n+1}$. Các số này nhận $2n - 1$ giá trị khác nhau nên theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 2 số trong dãy trên bằng nhau.

Mặt khác ta có: $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, \forall i \neq j, 2 \leq i, j < n + 1$

Ngoài ra $a_i \neq b_i, \forall i = 2, 3, \dots, n + 1$ (do $a_1 \neq 0$)

Suy ra tồn tại $a_x = b_y$ ($x \neq y, 2 \leq x, y \leq n + 1$)

Hay $a_x = a_y - a_1 \Leftrightarrow a_1 + a_x = a_y$

Vậy, ta có điều phải chứng minh.

➤ **Nhận xét:** Đây là một bài toán thuộc dạng xây dựng dãy số. Ý tưởng là tạo ra một dãy có $2n$ số và nhận $2n - 1$ giá trị khác nhau, từ đó suy ra trong dãy có hai số bằng nhau. Đề tuyển sinh của trường chuyên Nguyễn Du Đắk Lắk (2014 – 2015) có một câu tương tự với $n = 2013$, nhưng lại cho giả thiết là các số tự nhiên nên không thể chứng minh được.

Ví dụ 6: Cho 2014 số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng luôn tồn tại 729 số có tổng chia hết cho 729.

Đề thi chọn đội tuyển tỉnh – chuyên Nguyễn Du Đắk Lắk (2014-2015)

Giải:

❖ Ta chứng minh bổ đề đơn giản:

Trong 5 số tự nhiên bất kì luôn tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 3. (1)

Chứng minh: Gọi 5 số tự nhiên đã cho là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Gọi 5 số dư của 5 số này khi chia cho 3 tương ứng là b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 .

- Nếu các số $b_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ chỉ nhận cùng một giá trị 0,1,2 thì dễ thấy 3 số bất kì trong a_i đều có tổng chia hết cho 3.
 - Nếu các số b_i nhận 2 giá trị trong 3 giá trị 0,1,2 thì theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 3 số có giá trị bằng nhau. Giả sử $b_1 = b_2 = b_3$ thì $a_1 + a_2 + a_3 : 3$.
 - Nếu các số b_i nhận cả 3 giá trị 0,1,2. Giả sử $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 2$ thì dễ thấy $a_1 + a_2 + a_3 : 3$.
- Vậy, bổ đề (1) được chứng minh.
- ❖ Ta chứng minh bổ đề tiếp theo:

Trong 53 số tự nhiên bất kì luôn tồn tại 53 số có tổng chia hết cho 27. (2)

Chứng minh:

Gọi tập 53 số tự nhiên đã cho là A . Ta có: $|A| = 53 = 17 \cdot 3 + 2$

Áp dụng bổ đề (1), tồn tại 3 phần tử có tổng chia hết cho 3, gọi tổng này là B_1

Bỏ đi 3 phần tử trên, áp dụng bổ đề (1), tồn tại 3 phần tử có tổng chia hết cho 3, gọi tổng này là B_2

Cứ tiếp tục làm như vậy...

Mà ta có: $53 = 3 \cdot 17 + 2$ nên suy ra tồn tại 17 số B_i có tính chất tương tự.

Xét 17 số $B_i (i \in \{1; 2; \dots; 17\})$, chứng minh tương tự như trên, ta có $17 = 5 \cdot 3 + 2$ nên tồn tại 5 số $C_j (j \in \{1; 2; 3; 4; 5\})$ sao cho mỗi số là tổng của 3 số B_i và chia hết cho 3. Mặt khác các số B_i này chia hết cho 3 nên suy ra các số C_j chia hết cho 9.

Xét 5 số C_j ở trên, áp dụng bổ đề (1), tồn tại số D sao cho D là tổng của 3 số C_j và $D : 3$. Mặt khác các số C_j này chia hết cho 9 nên suy ra $D : 27$. Ngoài ra, D còn là tổng của $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ phần tử của A .

Từ đây suy ra bổ đề (2) được chứng minh.

❖ Trở lại bài toán: Ta chứng minh bài toán vẫn còn đúng với 1457 số tự nhiên. Gọi tập 1457 số tự nhiên đã cho là X . Áp dụng bổ đề (2), chứng minh tương tự như trên, tồn tại tổng $S : 27 \cdot 27 = 729$ và S tổng của $27 \cdot 27 = 729$ phần tử của X .

Vậy, bài toán được chứng minh.

➤ **Nhận xét:** Mấu chốt của bài toán là việc phát hiện ra $729 = 3^6$ để đưa bài toán về các bổ đề đơn giản hơn. Bài toán này còn có thể tổng quát hóa như sau:

Trong $2n - 1$ số luôn tồn tại n số có tổng chia hết cho n .

Lời giải của bài toán tổng quát này tương đối dài và được đăng trên báo *Toán học và Tuổi trẻ* số 383, tác giả xin phép không nêu lên ở đây.

➤ **Chú ý:** Lời giải trên đi theo con đường: $3 \rightarrow 3^3 \rightarrow 3^6$. Ta có thể chứng minh được bài toán bằng cách sử dụng bổ đề (1) mà không cần chứng minh bổ đề (2). Tuy nhiên theo tác giả cách làm trên sẽ ngắn gọn hơn.

➤ **Nhận xét chung:** Ý tưởng của các bài toán trên là tạo ra hai yếu tố “vật” và “ngăn kéo” để áp dụng nguyên lí Dirichlet. Đó có thể là “điểm” và “miền”, “phần tử” và “tập hợp”, v.v... Nắm được hai yếu tố này thì bài toán trở nên đơn giản. Tuy nhiên cũng có một số bài toán mà việc áp dụng nguyên lí Dirichlet chỉ là bước khởi đầu cho một chuỗi suy luận, đánh giá logic như bài toán ở VD4. Hy vọng nhưng bài toán trên sẽ giúp các bạn góp nhặt những kinh nghiệm trong việc giải toán *Tổ hợp*.

2. Bất đẳng thức (BĐT):

❖ Ứng dụng của nguyên lý Dirichlet trong việc giải các bài toán Đại số sơ cấp (phương trình, hệ phương trình,...) là không đáng kể. Tuy nhiên, vẫn có một số bài toán Đại số được giải bằng phương pháp sử dụng nguyên lý Dirichlet, điển hình là một số bài toán về BĐT ba biến đối xứng.

❖ Trong phương pháp này, thường thì ta dự đoán điểm rơi của BĐT rồi đánh giá một số đại lượng $f(a) = f(b) = f(c) = 0$ sao cho hợp lý. Mục đích là để đánh giá các đại lượng không thuận nhất.

❖ Ta sẽ xét ba VD mở đầu để thấy được sự hiệu quả của phương pháp trên:

Ví dụ 1: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

➤ BĐT trên có thể chứng minh bằng BĐT Schur bậc 3. Tuy nhiên, chúng ta thử sẽ giải quyết nó bằng cách sử dụng nguyên lý Dirichlet:

Giải:

Xét 3 số $a - 1, b - 1, c - 1$. Áp dụng nguyên lý Dirichlet, có ít nhất 2 trong 3 số trên cùng dấu. Không mất tổng quát giả sử $a - 1$ và $b - 1$ cùng dấu, ta có:

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b \Leftrightarrow 2abc \geq 2ac + 2bc - 2c$$

Ta cần chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ac + 2bc - 2c + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

➤ Nhận xét: Đây là ví dụ cơ bản nhất về phương pháp sử dụng nguyên lý Dirichlet. Trong ví dụ trên, ta đã dự đoán điểm rơi tại $a = b = c = 1$, rồi sử dụng nguyên lý Dirichlet đánh giá các đại lượng $a - 1, b - 1, c - 1$, sau đó sử dụng phép nhóm bình phương để hoàn tất chứng minh. Có thể thấy rằng phương pháp này đã làm cho BĐT đơn giản đi rất nhiều. Trong các VD số 4, 5, 6, ta sẽ thấy được sự hiệu quả của phương pháp này khi kết hợp với phương pháp dồn biến.

Ví dụ 2: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$abc + \sqrt[3]{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)} \geq ab + bc + ca$$

Giải:

Áp dụng nguyên lí Dirichlet, trong 3 số $a-1, b-1, c-1$ có ít nhất 2 số cùng dấu. Không mất tổng quát giả sử $a-1$ và $b-1$ cùng dấu, ta có:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b \Leftrightarrow abc + c \geq ac + bc$$

Áp dụng BĐT Hölder ta có:

$$(1^3 + a^3)(1^3 + b^3)(c^3 + 1) \geq (c + ab)^3$$

$$\text{Suy ra: } abc + \sqrt[3]{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)} \geq abc + c + ab \geq ac + bc + ab$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

➤ Nhận xét: Cảm giác ban đầu về bài toán là sự phức tạp với lớp căn bậc ba và các biểu thức không thuần nhất với nhau. Tuy nhiên lời giải bằng nguyên lí Dirichlet ở trên lại cho thấy điều ngược lại.

Ví dụ 3: Cho $a, b, c \geq 0$, chứng minh rằng:

$$abc + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \geq a + b + c$$

Giải:

Áp dụng nguyên lí Dirichlet, trong 3 số $a-1, b-1, c-1$ có ít nhất 2 số cùng dấu. Không mất tính tổng quát giả sử $a-1$ và $b-1$ cùng dấu, ta có:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a + b - 1$$

Như vậy ta cần chứng minh:

$$c(a+b-1) + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}[(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2] \geq a + b + c$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq \sqrt{2}(a+b-2)(1-c)$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz (C-S) và BĐT AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned}(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 &\geq \frac{(a+b-2)^2}{2} + (c-1)^2 \\ &\geq \sqrt{2}|(a+b-2)(c-1)| \geq \sqrt{2}(a+b-2)(c-1)\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

➤ Nhận xét: Đây là đề thi tuyển sinh lớp 10 KHTN – Hà Nội. Khó có thể kiểm được lời giải nào phù hợp hơn cho BĐT này, đặc biệt là trong áp lực phòng thi.

➤ Như vậy qua ba VD trên, bước đầu ta đã thấy được sự hiệu quả của phương pháp sử dụng nguyên lí Dirichlet trong một số BĐT đối xứng không thuần nhất.

➤ Bây giờ ta sẽ xét một số BĐT sử dụng phương pháp dồn biến bằng cách sử dụng các BĐT kinh điển kết hợp với nguyên lí Dirichlet:

Ví dụ 4: Chứng minh BĐT sau đúng với mọi số thực dương a, b, c :

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)^2}$$

➤ Nhận xét: Với một BĐT thuần nhất phức tạp như trên thì điều đầu tiên ta nghĩ tới là sử dụng phương pháp chuẩn hóa để làm đơn giản hóa bài toán.

Giải:

BĐT đã cho thuần nhất với 3 biến a, b, c nên ta chuẩn hóa $a + b + c = 1$.

BĐT được viết lại thành:

$$\frac{(1-2a)^2}{3a^2-2a+1} + \frac{(1-2b)^2}{3b^2-2b+1} + \frac{(1-2c)^2}{3c^2-2c+1} \geq \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Xét 3 số $a - \frac{1}{3}, b - \frac{1}{3}, c - \frac{1}{3}$. Áp dụng nguyên lí Dirichlet thì ít nhất 2 có trong 3 số trên cùng dấu. Giả sử 2 số đó là $b - \frac{1}{3}$ và $c - \frac{1}{3}$, ta có:

$$0 \leq \left(b - \frac{1}{3}\right)\left(c - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow b^2 + c^2 \leq \left(\frac{2}{3} - a\right)^2 + \frac{1}{9}$$

Bây giờ áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$\frac{(1-2b)^2}{3b^2-2b+1} + \frac{(1-2c)^2}{3c^2-2c+1} \geq \frac{(2-2b-2c)^2}{3(b^2+c^2)-2(b+c)+2}$$

$$= \frac{4a^2}{3\left(\frac{2}{3} - a\right)^2 + \frac{1}{3} - 2(1-a) + 2} = \frac{12a^2}{9a^2 - 6a + 5}$$

Mặt khác, ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2 + \left(\frac{2}{3} - a\right)^2 + \frac{1}{9} = 2a^2 - \frac{4}{3}a + \frac{5}{9}$$

Vậy ta chỉ còn phải chứng minh BĐT một biến a sau:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-2a)^2}{3a^2 - 2a + 1} + \frac{12a^2}{9a^2 - 6a + 5} \geq 3a^2 - 2a + \frac{5}{6} \\ \Leftrightarrow & \frac{(1-2a)^2}{3a^2 - 2a + 1} + \frac{12a^2}{9a^2 - 6a + 5} - \frac{1}{2} \geq 3a^2 - 2a + \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{(3a-1)^2(13a^2 - 6a + 5)}{2(3a^2 - 2a + 1)(9a^2 - 6a + 5)} \geq \frac{1}{3}(3a-1)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{(3a-1)^2(54a^4 - 72a^3 + 33a^2 - 14a - 5)}{6(3a^2 - 2a + 1)(9a^2 - 6a + 5)} \leq 0 \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh: $54a^4 - 72a^3 + 33a^2 - 14a - 5 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (a-1)[a(54a^2 - 18a^2 + 15) + 1] - 4 \leq 0 (*)$$

Vì $a, b, c > 0$, $a + b + c = 1 \Rightarrow 0 < a < 1 \Rightarrow (*)$ đúng.

Vậy, BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

➤ Chú ý 1: Ta không nên chuẩn hóa $a + b + c = 3$ vì sẽ làm các hệ số trong BĐT lớn hơn, vô tình gây nên khó khăn cho các bước biến đổi tiếp theo.

➤ Chú ý 2: Ở bước phân tích nhân tử để chứng minh BĐT một biến sau cùng, nếu ta đã dự đoán được đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = k$ thì sẽ luôn xuất hiện nhân tử $a - k$ hoặc $(a - k)^2$.

Ví dụ 5: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:

$$\frac{1}{5a^2 - 4a + 11} + \frac{1}{5b^2 - 4b + 11} + \frac{1}{5c^2 - 4c + 11} \leq \frac{1}{4}$$

Giải:

Xét 3 số $a - 1, b - 1, c - 1$. Áp dụng nguyên lí Dirichlet thì ít nhất 2 có trong 3 số trên cùng dấu. Giả sử 2 số đó là $b - 1$ và $c - 1$, ta có:

$$0 \leq (b - 1)(c - 1) \Leftrightarrow b^2 + c^2 \leq (2 - a)^2 + 1$$

Ta thấy rằng không thể áp dụng ngay BĐT C-S vì BĐT sẽ bị đổi chiều. Ta sẽ biến đổi BĐT như sau:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5a^2 - 4a + 11} - \frac{1}{20} &\leq \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5b^2 - 4b + 11} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5c^2 - 4c + 11} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{2[b^2 + (2b - 1)^2]}{5b^2 - 4b + 11} + \frac{2[c^2 + (2c - 1)^2]}{5c^2 - 4c + 11} &\geq \frac{9 + 4a - 5a^2}{5a^2 - 4a + 11} (*) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} VT_{(*)} &\geq \frac{(3b - 1)^2}{5b^2 - 4b + 11} + \frac{(3c - 1)^2}{5c^2 - 4c + 11} \geq \frac{[3(b + c) - 2]^2}{5(b^2 + c^2) - 4(b + c) + 22} \\ &\geq \frac{(7 - 3a)^2}{5(2 - a)^2 + 5 - 4(3 - a) + 22} = \frac{9a^2 - 42a + 49}{5a^2 - 16a + 35} \end{aligned}$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{9a^2 - 42a + 49}{5a^2 - 16a + 35} &\geq \frac{9 + 4a - 5a^2}{5a^2 - 4a + 11} \\ \Leftrightarrow \frac{2(a - 1)^2(35a^2 - 103a + 112)}{(5a^2 - 16a + 35)(5a^2 - 4a + 11)} &\geq 0 \end{aligned}$$

BĐT này hiển nhiên đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

➤ Chú ý: Nếu ta biến đổi BĐT thành:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5a^2 - 4a + 11} &\leq \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5b^2 - 4b + 11} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5c^2 - 4c + 11} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{(2b - 1)^2 + b^2 + 1^2 + 1^2}{5b^2 - 4b + 11} + \frac{(2c - 1)^2 + c^2 + 1^2 + 1^2}{5c^2 - 4c + 11} &\geq \frac{8}{5a^2 - 4a + 11} \end{aligned}$$

thì để xuất hiện bình phương ở tử của hai phân thức, ta cần phải áp dụng BĐT C-S cho 4 số. Rõ ràng ta đã làm cho vế trái của BĐT yếu đi nhiều hơn so với cách giải “chuẩn”. Kết quả là BĐT một biến a cuối cùng sẽ không luôn đúng $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(a-1)^2(45a^2-276a+211)}{(5a^2-16a+35)(5a^2-4a+11)} \geq 0 \quad (!)$$

Ví dụ 6: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 2} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Giải:

Đây là một BĐT hoán vị nên ta sẽ đưa nó về dạng đối xứng bằng cách đặt:

$$x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a} \Rightarrow x, y, z > 0, xyz = 1$$

BĐT cần chứng minh tương đương:

$$\sqrt{x+y+z-2} + \frac{8}{(x+1)(y+1)(z+1)} \geq 2 \quad (*)$$

Áp dụng nguyên lí Dirichlet thì ít nhất 2 có trong 3 số $x-1, y-1, z-1$ cùng dấu. Giả sử $x-1$ và $y-1$ cùng dấu, ta có:

$$(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) \leq 2(xy+1)$$

$$\Rightarrow VT_{(*)} \geq \sqrt{2\sqrt{xy} + z - 2} + \frac{4}{(xy+1)(z+1)}$$

Đặt $\sqrt{xy} = t$ ($t > 0$), ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} & \sqrt{2t + \frac{1}{t^2} - 2} + \frac{4}{(t^2+1)\left(\frac{1}{t^2}+1\right)} \geq 2 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\sqrt{2t^3 - 2t^2 + 1}}{t} - 1 \right) + \left[\frac{4t^2}{(t^2+1)^2} - 1 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^3 - 3t^2 + 1}{t(\sqrt{2t^3 - 2t^2 + 1} + t)} - \frac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)^2 \left[\frac{2t + 1}{t(\sqrt{2t^3 - 2t^2 + 1} + t)} - \frac{(t + 1)^2}{(t^2 + 1)^2} \right] \geq 0$$

Tới đây thì ta chỉ cần chứng minh nhân tử trong ngoặc vuông luôn dương.

Áp dụng BĐT AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2t + 1}{t(\sqrt{2t^3 - 2t^2 + 1} + t)} - \frac{(t + 1)^2}{(t^2 + 1)^2} &\geq \frac{2t + 1}{\frac{t^2 + (2t^3 - 2t^2 + 1)}{2} + t^2} - \frac{(t + 1)^2}{(t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2t^3(t - 1)^2 + t^4 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1}{(2t^3 + t^2 + 1)(t^2 + 1)^2} > 0 \text{ (do } t > 0) \end{aligned}$$

Vậy, BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

➤ **Nhận xét chung:** Qua các ví dụ trên ta thấy rằng nguyên lí Dirichlet không chỉ có ích trong những bài toán mang tính *Tổ hợp* mà còn giúp chúng ta rất nhiều trong việc giải toán BĐT. Ý tưởng chủ đạo là sử dụng nguyên lí để làm đơn giản BĐT ban đầu, sau đó kết hợp với các phương pháp khác như nhóm bình phương, dồn biến, sử dụng các BĐT kinh điển,... Hy vọng người đọc sẽ thấy thích thú với phương pháp này và thường xuyên áp dụng nó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Một số tài liệu từ Internet, đặc biệt là từ *diendantoanhoc.net*
- Tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ*.
- *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức của*
Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh.