TUYẾN TÍNH HÓA CÔNG THỨC TRUY HỒI ĐỂ TÌM GIỚI HẠN DÃY SỐ

Lê Kim Nhã –A1K40
THPT chuyên Phan Bội Châu,Nghệ An

(tặng anh em diendantoanhoc.net)

Trước nay, khi đứng trước một bài toán dãy số có CTTH 2 biến không tuyến tính, tức là phải sử dụng phương pháp dãy số phụ có nhiều bạn lúng túng để xác định hướng đi và đặt dãy sao cho phù hợp.
Qua một số bài toán,
Ta bắt đầu nào.
Có lẽ tất cả phương pháp được xây dựng nên khi tôi giải bài toán sau đây.

<u>Bài toán khởi đầu:</u> Cho (X_n) bị chặn và thõa mãn điều kiện:

$$X_{n+2} \le \frac{1}{4}X_{n+1} + \frac{3}{4}X_n$$

Chứng minh (x_n) có giới hạn hữu hạn .

<u>Lời giải.</u> (Theo tài liệu chuyên toán lớp 12)

Xét $m_n = \max\{X_n, X_{n+1}\}$, khi đó do $X_{n+2} \le \frac{1}{4}X_{n+1} + \frac{3}{4}X_n \le m_n \Rightarrow m_{n+1} \le m_n$

Suy ra dãy (m_n) là dãy giảm, bị chặn $\Rightarrow$ Tồn tại giới hạn $\lim m_n = l$.

Theo định nghĩa giới hạn thì $\forall \varepsilon > 0$ luôn tồn tại N_0 sao cho $\forall n > N_0$ thì

$$l - \frac{\varepsilon}{7} < m_n < l + \frac{\varepsilon}{7}$$

Nếu $X_n > l - \frac{\varepsilon}{3}$ thì $l - \frac{\varepsilon}{7} < X_n < l + \frac{\varepsilon}{7}$, $\forall \varepsilon > 0$ suy ra $\lim X_n = l$.;

Nếu $X_n < l - \frac{\varepsilon}{7}$ thi $l - \frac{\varepsilon}{7} < a_{n+1}$. Suy ra:

$$X_n \ge 4X_{n+1} - 3X_{n-1} > 4\left(l - \frac{\varepsilon}{7}\right) - 3\left(l + \frac{\varepsilon}{7}\right) = l - \varepsilon$$

$$\Rightarrow l + \varepsilon > l + \frac{\varepsilon}{3} > X_n > l - \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0.$$

Do đó dãy (X_n) có giới hạn hữu hạn.

Ta sẽ bắt đầu bằng một số ví dụ quen thuộc sau:

<u>Ví dụ 1.</u> Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$a_1, a_2 > 0$; $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}$

Chứng minh (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

<u>Giải:</u>

Ta sẽ cố gắng "tuyến tính hóa" công thức truy hồi trên.

Chú ý rằng nếu tồn tại $\lim a_n$ thì nó phải bằng 4 , nhờ vậy mà ta nghĩ đến đánh gía $\sqrt{a_n} < c.a_n \Leftrightarrow a_n > \frac{1}{c^2}$ (hoặc ngược lại), vì $\lim a_n = 4$ nên suy ra $c = \frac{1}{2}$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a_1; a_2 \in (0,4)$, dễ dàng qui nạp được $a_n \in (0,4)$ với mọi n.

Suy ra: $\sqrt{a_n} > \frac{1}{2} a_n$

$\Rightarrow a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} > \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$

Như vậy công việc tuyến tính hóa đã hoàn thành, phần còn lại chỉ là đánh giá cho các dãy số phụ của (a_n).

Xét $m_n = \min\{a_n, a_{n+1}\}$, khi đó do $a_{n+2} > \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) \geq m_n \Rightarrow m_{n+1} > m_n$

Suy ra dãy (m_n) là dãy tăng, bị chặn trên bởi $4 \Rightarrow$ Tồn tại giới hạn $\lim m_n = l$ $(0 < l \leq 4)$.

Theo định nghĩa giới hạn thì $\forall \varepsilon > 0$ luôn tồn tại N_0 sao cho $\forall n > N_0$ thì

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < m_n < l + \frac{\varepsilon}{3}$$

Nếu $a_n < l + \frac{\varepsilon}{3}$ thì $l - \frac{\varepsilon}{3} < a_n < l + \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall \varepsilon > 0$ suy ra $\lim a_n = l$.;

Nếu $a_n > l + \frac{\varepsilon}{3}$ thi $l + \frac{\varepsilon}{3} > a_{n+1}$. Suy ra:

$$a_n \leq 2a_{n+1} - a_{n-1} \leq 2\left(l + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(l - \frac{\varepsilon}{3}\right) = l + \varepsilon$$

$$\Rightarrow l - \varepsilon < l - \frac{\varepsilon}{3} < a_n < l + \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Do đó: $\lim a_n = l$. Chuyển qua giới hạn ta có $l = 4$.

Trường hợp 2: $a_1, a_2 \in (4, +\infty)$, hoàn toàn tương tự ta cũng có dãy $M_n = \max\{a_n; a_{n+1}\}$ là dãy giảm và bị chạn dưới bởi 4.Từ đó suy ra tồn tại $\lim a_n$ hữu hạn và bằng 4.

Trường hợp 3: $(a_1 - 4)(a_2 - 4) < 0$

Tưởng như ở đây ta sẽ vướng mắc nhưng bằng một vài kĩ thuật đơn giản ta vượt qua được.

Nếu tồn tại i sao cho $(a_i-4)(a_{i+1}-4)>0$ thì coi dyax bắt đầu từ i ta sẽ đưa về TH1 và TH2.

Nếu dãy a_n-4 là dãy đan dấu (tức là luôn phiên đổi dấu âm dương) , không mất tính tổng quát ta giả sử $a_{2k}>4; a_{2k+1}<4$ với mọi k .Ta sẽ có:

$$4\ge a_{2k+1}\ge\sqrt{a_{2k}}+\sqrt{\sqrt{a_{2k-2}}+\sqrt{\sqrt{a_{2k-4}+\sqrt{.....}}}}$$

Nhưng chú ý $a_{2k}\ge 4\Rightarrow 4\ge a_{2k+1}\ge 2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2.....}}}\to 4\Rightarrow \lim a_{2k+1}=4$

Tương tự $\lim a_{2k}=4$ suy ra $\lim a_n=4$.

Như vậy ta luôn có $\lim a_n=4$.Bài toán được chứng minh xong.

Qua bài toán trên dường như ta thấy được việc tuyến tính hóa công thức truy hồi mang lại cho ta một cái nhìn dễ hơn về sự biến thiên của dãy số (dù cho chỉ là bất đẳng thức tuyến tính). Qua đó ta có thể tổng quát hóa phương pháp như sau:

Giả sử ta cố CTTH $a_{n+2}=f(a_{n+1})+g(a_n)$.

Để khảo sát tính hội tụ của dãy trên ta cần giải phương trình truy hồi để tìm các miền khảo sát.

Bằng việc xét các miền ta sẽ tìm được các đánh giá sau:

$$f(a_{n+1})\le\alpha.a_{n+1}; g(a_n)\le\beta.a_n; \alpha+\beta\le 1\Rightarrow a_{n+2}\le\alpha.a_{n+1}+\beta.a_n$$

Hoặc $f(a_{n+1})\ge\alpha.a_{n+1}; g(a_n)\ge\beta.a_n; \alpha+\beta\ge 1\Rightarrow a_{n+2}\ge\alpha.a_{n+1}+\beta.a_n$.

Công việc tuyến tính hóa hoàn thành, việc còn lại là đánh giá dãy số phụ min,Max của dãy qua chứng minh được sự hội tụ của (a_n).

Ta sẽ làm rõ phương pháp qua một số ví dụ sau.

<u>Ví dụ 2.</u> Cho a,b,A,B là các số thực dương, xét dãy (a_n) như sau:

$$\begin{cases} x_1=a, x_2=b \\ x_{n+2}=A\sqrt[3]{x_{n+1}^2}+B\sqrt[3]{x_n^2} \end{cases}$$

Chứng minh (x_n) hội tụ và tìm giới hạn đó.

<u>Giải:</u>

Như vậy $f(a_{n+1})=A\sqrt[3]{a_{n+1}^2}$ và $g(a_n)=B\sqrt[3]{a_n^2}$.

Giải phương trình truy hồi ta tìm được $l=(A+B)^3$ .Như vậy ta sẽ khảo sát a,b trên các khoảng $(0,(A+B)^3)$ và $((A+B)^3,+\infty)$.

Trường hợp 1: $a,b\in\left((A+B)^3;+\infty\right)$.

Dễ dàng qui nạp được $x_n\ge(A+B)^3$ với mọi n.

Suy ra ta có đánh giá : $\sqrt[3]{x_n^2}\le\dfrac{1}{A+B}.x_n$

Tuyến tính hóa: $x_{n+2} = A\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_n^2} \le \frac{A}{A+B}.x_{n+1} + \frac{B}{A+B}.x_n$

Như vậy ta đã tìm được $\alpha = \frac{A}{A+B}; \beta = \frac{B}{A+B}$ có $\alpha + \beta = 1$.

$$\Rightarrow x_{n+2} \le Max\{x_{n+1}; x_n\}$$

Xét dãy $M_n = Max\{x_n; x_{n+1}\}$ suy ra $M_{n+1} = Max\{a_{n+2}; a_{n+1}\} \le Max\{a_{n+1}; a_n\} = M_n$

Suy ra dãy (M_n) giảm và bị chặn dưới $\Rightarrow$ Tồn tại $\lim M_n = l$ hữu hạn.

(Chú ý $l \ge (A+B)^3$)

Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại N_0 sao cho $\forall n > N_0$ thì:

$$l - \varepsilon < M_n < l + \varepsilon$$

Nếu: $x_n > l - \varepsilon$ thì $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \lim x_n = l$.

Nếu: $x_n < l - \varepsilon$ thì theo định nghĩa $M_n \Rightarrow l - \varepsilon < x_{n+1}$:

$$\Rightarrow x_n \ge \frac{A+B}{A}.x_{n+1} - \frac{B}{A}.x_{n-1} \ge \frac{A+B}{A}.(l-\varepsilon) - \frac{B}{A}.(l+\varepsilon) \ge l - \frac{A+2B}{A}.\varepsilon$$

$$\Rightarrow l - \frac{A+2B}{A}.\varepsilon < x_n < l + \varepsilon < l + \frac{A+2B}{A}.\varepsilon; \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim x_n = l$$

Chuyển qua giới hạn ta tìm được $l = (A+B)^3$

Trường hợp 2: $a, b \in \left(0, (A+B)^3\right)$

Hoàn toàn tương tự TH1 ta qui nạp $x_n \le (A+B)^3$ với mọi n.

Xét dãy $m_n = min\{x_n; x_{n+1}\}$ tăng và bị chặn trên nên có giới hạn l. Ta chứng minh được $\exists \lim x_n = l = (A+B)^3$

Trường hợp 3: $\left(a - (A+B)^3\right)\left(b - (A+B)^3\right) < 0$

Thực hiện tương tự VD1 với chú ý:

$$A(A+B)^2 + B\left(A(A+B)^2 + B(....)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}} \to (A+B)^3$$

Ta có: $\lim x_n = (A+B)^3$.

Bây giờ ta sẽ đổi loại công thức truy hồi đa dạng hơn một chút.

<u>Ví dụ 3.</u>Cho dãy (x_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} x_0 = 1; x_1 = 5 \\ x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1} + \sqrt{x_n^2 + 6}}{3} \end{cases}$$

Chứng minh (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

<u>Giải:</u>

Giải phương trình giới hạn tìm được $l=\sqrt{2}$.
Nhưng không quá khó để chứng minh được $x_n>\sqrt{2}$ với mọi n.
Bài toán đã có sẵn tính "tuyến tính" trong nó khi cho x_{n+1} và $\sqrt{x_n^2+6}$ nên không khó để nghĩ đến đánh giá: $\sqrt{x_n^2+6}\le 2x_n$.
Suy ra: $x_{n+2}\le \frac{1}{3}x_{n+1}+\frac{2}{3}x_n$.
Công việc tuyến tính hóa hoàn tất, bây giờ xét dãy $M_n=\max\{x_n,x_{n+1}\}$
Dễ thấy $x_{n+2}\le \frac{1}{3}x_{n+1}+\frac{2}{3}x_n\le max\{x_{n+1};x_n\}\Rightarrow M_{n+1}\le M_n$
Như vậy dãy (M_n) giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{2}$ nên tồn tại $\lim M_n=l\ge\sqrt{2}$ hữu hạn . Vẫn với cách làm trên ta có với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại N_0 sao cho $\forall n>N_0$ thì:

$$l-\varepsilon<M_n<l+\varepsilon$$

Nếu $a_n>l-\varepsilon$ thì $l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon;\forall\varepsilon>0\ \Rightarrow\exists\lim a_n=l$.
Nếu $a_n<l-\varepsilon\Rightarrow a_{n+!}>l-\varepsilon$ suy ra:

$$a_n\ge 3a_{n+1}-2a_n>3.(l-\varepsilon)-2.(l+\varepsilon)=l-5\varepsilon$$
$$\Rightarrow l-5\varepsilon<a_n<l+5\varepsilon;\forall\varepsilon>0$$
$$\Rightarrow\exists\lim a_n=l$$

Chuyển qua giới hạn ta có $l=\sqrt{2}$.
Vậy $\lim a_n=\sqrt{2}$.

Ta tiếp tục với một bài toán có CTTH mới hơn– một bài toán trên Tạp chí Toán học Tuổi trẻ.
<u>Ví dụ 4.</u> (T10-369) Cho $a,b\in(0,4)$.Dãy số (x_n) được xác định bởi :

$$x_0=a;x_1=b\ \text{ và }\ x_{n+2}=\frac{2(x_{n+1}+x_n)}{\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}}$$

Chứng minh (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
Giải:
Công việc tuyến tính hóa có vẻ gặp khó khăn trước bài toán này nhưng thực ra đơn giản hơn ta nghĩ.
Chuyển qua giới hạn ta tính $l=4$.
Vì $a,b\in(0;4)$ và

$$x_{n+2}-4=\frac{\frac{2\sqrt{x_{n+1}}.(x_{n+1}-4)}{\sqrt{x_{n+1}}+2}+\frac{2\sqrt{x_n}.(x_n-4)}{\sqrt{x_n}+2}}{\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}}=\frac{2\sqrt{x_{n+1}}.(x_{n+1}-4)}{\left(\sqrt{x_{n+1}}+2\right)\left(\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}\right)}+\frac{2\sqrt{x_n}.(x_n-4)}{\left(\sqrt{x_n}+2\right)\left(\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}\right)}$$

Suy ra theo nguyên lí qui nạp thì $x_n\in(0;4)$ với mọi n.

$$\Rightarrow \sqrt{x_n} \ge \frac{1}{2}x_n ; \sqrt{x_{n+1}} \ge \frac{1}{2}x_{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\left(x_{n+1}+x_n\right)}{\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}} \ge \frac{\left(\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}\right)^2}{\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}} = \sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n} \ge \frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)$$

$$\Rightarrow a_{n+2} \ge \frac{1}{2}\left(a_{n+1}+a_n\right)$$

Công việc tuyến tính hóa hoàn tất, phần việc còn lại là xét dãy số phụ $m_n = \min\{x_n ; x_{n+1}\}$ và chứng minh được $\lim x_n = 4$.

Một ví dụ khác khá thú vị minh chứng cho sự hữu hiệu của phương pháp trên:

<u>Ví dụ 5</u>: Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = 1; x_2 = -1 \quad ; \quad x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \frac{1}{2}x_n .$$

Chứng minh (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

<u>Giải:</u>

Nhìn vào công thức truy hồi khác dấu và tính thử vài giá trị đầu chắc nhiều bạn sẽ thấy rất băn khoăn về phương án giải quyết (bởi vì dãy đã cho thay đổi dấu âm dương không theo qui luật nào cả). Tuy nhiên phương pháp trên lại cho ta cái nhìn **hoàn toàn khác.**

Vẫn như thông thường, đầu tiên ta tìm được $l = 0$.Việc của chúng ta là tuyến tính hóa, nhưng vừa cộng ,vừa trừ thì làm sao đây? Giới hạn 0 là một lợi thế quan trong, ta sẽ xét dãy **trị tuyết đối** của x_n, chú ý:

$$|x_{n+2}| = \left|x_{n+1}^2 - \frac{1}{2}x_n\right| \le |x_{n+1}|^2 + \frac{1}{2}|x_n|$$

Do $|x_3| ; |x_4| < \frac{1}{2}$ và $|x_{n+2}| \le |x_{n+1}|^2 + \frac{1}{2}|x_n| \le \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. (hoàn tất việc giới hạn miền giá trị!)

Xét dãy $v_n = |x_n| \Rightarrow \begin{cases} v_n \in \left(0;\frac{1}{2}\right) \forall n \ge 2 \\ v_{n+2} \le v_{n+1}^2 + \frac{1}{2}v_n \end{cases}$.

Tuyến tính hóa: $v_{n+2} \le v_{n+1}^2 + \frac{1}{2}v_n \le \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n$.

Đến đây tương tự các ví dụ trên, xét dãy $M_n = \max\{v_n ; v_{n+1}\}$ suy ra dãy M_n giảm và bị chặn dưới bởi 0.

Dễ dàng suy ra được tồn tại $\lim v_n = \lim M_n = l$ hữu hạn.

Chuyển qua giới hạn ta có $l \le l^2 + \frac{1}{2}l \Leftrightarrow l \le 2l^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l = 0 \\ l \ge \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Loại $l \ge \frac{1}{2}$ do dãy M_n giảm và bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

Suy ra $l = 0$.

Vậy $\lim|x_n| = \lim v_n = 0$, phá trị tuyệt đối cho ta $\lim x_n = 0$.

Một chứng minh thật đẹp cho phương pháp của chúng ta.

Việc tuyến tính hóa còn mang lại một cái nhìn khác cho dãy số, đó chính là sự "co" của dãy về điểm hội tụ. Tình huống này xảy ra khi $0 < \alpha + \beta < 1$.

Ta xét một ví dụ sau để hiểu rõ hơn nhận xét trên.

<u>Ví dụ 6.</u> Dãy (a_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} 0 < a_1; a_2 < 14 \\ a_{n+2} = \sqrt{3a_{n+1} + 7} + \sqrt{4a_n - 7} \end{cases}$$

Chứng minh (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

<u>Giải:</u> Thực sự giả thiết $0 < a_1; a_2 < 14$ không cần thiết. (Qua các ví dụ 1,2 ta nhận thấy điều này). Tuy nhiên để kết cấu bài toán trở nên đơn giản hơn ta cần đến giả thiết đó.

Trước tiên ta có thể qui nạp được $\frac{7}{4} < a_n < 14$.

Giải phương trình giới hạn ta tìm được $l = 14$. Ta sẽ thực hiện tuyến tính hóa:

$$14 - a_{n+2} = \left(7 - \sqrt{3a_{n+1} + 7}\right) + \left(7 - \sqrt{4a_n - 7}\right)$$

$$= \frac{3}{7 + \sqrt{3a_{n+1} + 7}}.(14 - a_{n+1}) + \frac{4}{7 + \sqrt{4a_n - 7}}.(14 - a_n)$$

Nếu coi $\alpha = \frac{3}{7 + \sqrt{3a_{n+1} + 7}}; \beta = \frac{4}{7 + \sqrt{4a_n - 7}}$ thì $\alpha + \beta < \frac{3}{7} + \frac{4}{7} = 1$. Một sự đổi khác khi α, β không còn là hằng số nữa. Nhưng nhận xét $\alpha + \beta < 1$ chưa đem lại cho ta gì cả, một kết quả mạnh hơn sẽ thay đổi hướng nhìn:

$$\alpha + \beta = \frac{3}{7 + \sqrt{3a_{n+1} + 7}} + \frac{4}{7 + \sqrt{4a_n - 7}} \le \frac{3}{7 + \sqrt{7}} + \frac{4}{7} = q < 1$$

Tính chất co dường như đã hiện rõ, xét dãy $v_n = 14 - a_n$ thì:

$$v_{n+2} \le \alpha v_{n+1} + \beta v_n \le (\alpha + \beta).\max\{v_n; v_{n+1}\} \le q.\max\{v_n; v_{n+1}\}$$

Suy ra nếu đặt $M_n = max\{v_n; v_{n+1}\}$ thì $M_{n+1} = M_n$ hoặc $M_{n+1} \le q.M_n$.

Nếu có vô hạn $M_{n+1} \le q.M_n$ thì $0 \le M_n \le q^{n-k}.M_1 \to 0 \Rightarrow \lim M_n = 0$ (hàm số co)

Nếu có hữu hạn $M_{n+1} \le q.M_n$ hay $M_n = M_{n+1}, \forall n > N_0$, khi đó v_{2k} và v_{2k+1} là hai dãy hằng .

Không mất tính tổng quát giả sử $u_{2k} = c \ge u_{2k+1} = d$ thì :

$$v_{2k+2} \le q.\max\{v_{2k+1}; v_{2k}\} \Leftrightarrow c \le q.c \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow d = 0$$

Mâu thuẫn.

Như vậy $\lim M_n = 0$, suy ra $0 \le v_{n+2} \le q.\max\{v_n; v_{n+1}\} = q.M_n \to 0$ hay $\lim v_n = 0$.

Vậy $\lim a_n = 14$.

Giải xong bài toán này đưa ta đến một ý tưởng mới là tại sao không giải các VD1,2,3 bằng cách trên. Thử xem nào:

Ta thử với VD đơn giản nhất là VD1, chú ý điểm hội tụ là 4.Ta có:

$$a_1, a_2 > 0;\ a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}$$

$$\Rightarrow a_{n+2} - 4 = \frac{a_{n+1} - 4}{\sqrt{a_{n+2}} + 2} + \frac{a_n - 4}{\sqrt{a_n} + 2}$$

Vẫn như cũ để lợi dụng giới hạn 0 của dãy $(a_n - 4)$ ta lấy trị tuyệt đối:

$$|a_{n+2} - 4| \le \frac{|a_{n+1} - 4|}{\sqrt{a_{n+1}} + 2} + \frac{|a_n - 4|}{\sqrt{a_n} + 2} \le \left(\frac{1}{\sqrt{a_n} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}} + 2}\right).Max\{|a_{n+1} - 4|; |a_n - 4|\} \le Max\{|a_{n+1} - 4|; |a_n - 4|\}$$

Tuyến tính hóa "kiểu mới" coi như xong.

Suy ra nếu đặt $M_n = Max\{|a_{n+1} - 4|; |a_n - 4|\}$ thì : (M_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 $\Rightarrow$ Tồn tại $\lim M_n = l$. $(l \ge 0)$

Làm sao để tìm l?

Bất đẳng thức trên cho ta một kết quả khá quan trong:

$$M_{n+2} \le \left(\frac{1}{\sqrt{a_n} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}} + 2}\right) M_n$$

$$\Rightarrow l \le \left(\frac{1}{\sqrt{a_n} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}} + 2}\right) l \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l = 0 \\ \lim\left(\frac{1}{\sqrt{a_n} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}} + 2}\right) = 1 \end{array}\right.$$

Nhưng chú ý rằng $\frac{1}{\sqrt{a_n} + 2} + \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}} + 2} \to 1 \Leftrightarrow a_n \to 0$ khi $n \to +\infty$. (Chú ý ở đây nếu có giới hạn 1 đó thì bắt buộc dãy (a_n) phải hội tụ do $a_n > 0$). Mâu thuẫn .

Hay $l = 0$, tức là $0 \le |a_n - 4| \le M_n \to 0$ nên $\lim a_n = 4$.

Vậy $\lim a_n = 4$.

Tuyệt vời quá, việc xét các miền giá trị đã không còn phải bận tâm nữa, lời giải trở nên ngắn gọn hơn rất nhiều.

Kiểu tuyến tính hóa này tỏ ra rất hữu ích và không bị ràng buộc quá nhiều và giả thiết.

Tiếp tục chuyên đề là một dạng mở rộng của VD1, lấy trên THTT 357

<u>Ví dụ 7.</u> Cho dãy số (x_n) thõa mãn $x_0; x_1; x_2 > 0$

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}$$

Chứng minh (x_n) hội tụ và tìm giới hạn đó.

<u>Giải</u>

…..tobe continous

Lê Kim Nhã A1K40 THPT chuyên Phan Bội Châu
nhalekim@gmail.com