

Đề thi Olympic Toán học Trại hè phương Nam

Ngày thi: 29/7/2016

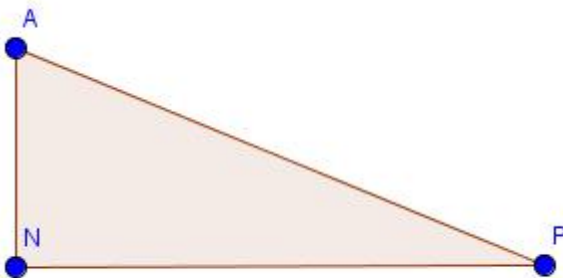
Thời gian làm bài: 180 phút. Đề bài có 2 trang

Bài 1. Giải phương trình $\frac{13(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{9(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}} = 0$.

Bài 2. Trong tam giác ABC, số đo 3 cạnh theo một đơn vị đo nào đó là 3 số nguyên liên tiếp và góc lớn nhất gấp đôi góc nhỏ nhất. Hãy tìm chu vi tam giác ABC (theo đơn vị đo đã cho).

Bài 3. Một nhà địa chất đang ở vị trí A trong sa mạc, cách con đường thẳng 10km (AN = 10km). Trên con đường thì xe của nhà địa chất có thể chạy với vận tốc 50km/h nhưng trên sa mạc thì nó chỉ chạy được với vận tốc 30km/giờ.

Nhà địa chất đang rất khát nước và ông biết rằng có một trạm xăng P ở vị trí xuôi theo



đường 25 km (NP = 25 km) và ở đó có xá xị Chương Dương ướp lạnh.

- Nhà địa chất tốn bao nhiêu phút để đi từ A đến P theo đường sa mạc?
- Nếu nhà địa chất đi từ A đến N, sau đó sử dụng con đường để đến P thì có nhanh hơn không?
- Hãy tìm một cách đi nhanh hơn cho nhà địa chất. Cách của bạn đã là nhanh nhất chưa?

Bài 4. Cửa hàng cá viên chiên “Fried Fish Rolls of the South” đóng cá viên chiên thành 3 loại hộp: hộp 6 viên, hộp 10 viên và hộp 15 viên. Một nhân viên tập sự của cửa hàng thắc mắc với cửa hàng trưởng “Nếu chẳng hạn khách hàng muốn mua 19 viên thì ta không thể

bán cho họ bằng những hộp nguyên được, chắc chắn phải xé 1 hộp ra bán lẻ”. Cửa hàng trưởng trả lời “Đúng là có những rắc rối như vậy. Nhưng cửa hàng chúng ta chủ yếu bán cho các trường học, họ đặt hàng số lượng đủ lớn và hầu như không xảy ra chuyện đó”. Hãy tìm số N_0 lớn nhất mà nếu khách hàng đặt hàng số lượng N_0 viên, cửa hàng không thể phục vụ mà không xé lẻ một hộp nào đó.

Bài 5. Một nhóm người xếp thành một hàng dọc được gọi là xếp theo chuẩn thứ tự nếu điều kiện sau được thỏa mãn: Nếu A đứng bên trái B trong hàng (A, B không nhất thiết kề nhau) thì A cao hơn B không quá 8cm. Ví dụ, 5 người có chiều cao là 160, 165, 170, 175, và 180 cm tương ứng có thể xếp theo chuẩn thứ tự (từ trái qua phải) như sau 160, 170, 165, 180, 175 cm.

Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 người có chiều cao tương ứng là 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, và 185 cm theo chuẩn thứ tự?

Đáp án đề thi Olympic Trại hè Phương Nam.

1. (2 điểm) Điều kiện $|x| < 1$. Ta thực hiện biến đổi tương đương

$$\frac{13(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{9(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow 169(2x^2-1)^2(1+x^2) = 81(1+2x^2)^2(1-x^2), 2x^2-1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 1000x^6 - 750x^2 + 88 = 0, 2x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2(5x^2-4)(100x^4+80x^2-11) = 0, 2x^2-1 \geq 0.$$

Ta thấy trong điều kiện $2x^2-1 \geq 0$ thì $100x^4+80x^2-11 > 0$ nên từ đây suy ra phải có $5x^2-4=0$, tức là $x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. (2 điểm) Đặt $AC = x$, $AB = x+1$, $BC = x-1$ và $C = 2A$. Gọi CD là phân giác góc C . Rõ ràng là tam giác ABC đồng dạng với tam giác CBD . Do đó $BD = BC^2/AB$. Vì CD là đường phân giác nên ta có $AC/BC = AD/DB$. Tức là $(AC+BC)/BC = (AD+DB)/DB$.

Vì $AB = AD + DB = (AC+BC)DB/BC = (AC+BC)BC/AB$. Viết lại thành $AB^2 - BC^2 = AC \cdot BC$. Tức là $(x+1)^2 - (x-1)^2 = x(x-1)$. Từ đây thu được $x = 5$ hoặc $x = 0$. Đương nhiên là $x = 0$ bị loại. Vì thế $x = 5$ và chu vi của tam giác bằng $4 + 5 + 6 = 15$.

Một cách giải khác. Đặt $A = \alpha$ thì $C = 2\alpha$. Áp dụng định lý hàm số $\cos$, ta có

$$\cos \alpha = \frac{x^2 + (x+1)^2 - (x-1)^2}{2x(x+1)} = \frac{x+4}{2(x+1)}.$$

Áp dụng định lý hàm số $\sin$, ta có

$$\frac{x+1}{\sin 2\alpha} = \frac{x-1}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{x+1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{x-1}{\sin \alpha} \Rightarrow x+1 = 2 \cos \alpha (x-1)$$
$$\Rightarrow x+1 = 2 \cdot \frac{x+4}{2(x+1)} (x-1) \Rightarrow (x+1)^2 = (x+4)(x-1) \Rightarrow x = 5.$$

3. (2 điểm) a) Ta có theo định lý Pythagore thì $AP = \sqrt{10^2 + 25^2} = 5\sqrt{19} \sim 26.93$. Từ đó suy ra thời gian nhà địa chất tốn để đi từ A đến P theo sa mạc mà $26.93/30$ (giờ), tương đương khoảng 54 phút.

b) Nếu đi theo lộ trình AN, NP thì thời gian đi tương ứng là

$$\frac{10}{30} + \frac{25}{50} \text{ (giờ), tương đương 50 phút, nhanh hơn phương án đi thẳng.}$$

c) Ta có thể đi nhanh hơn, bằng cách đi chéo từ điểm A đến điểm M nằm trên đoạn NP. Ví dụ sao cho $MN = 10$. Khi đó $AM = 10\sqrt{2}$, $MP = 15$ và thời gian đi theo lộ trình AM, MP bằng $\frac{2\sqrt{10}}{30} + \frac{15}{50}$ giờ, tương đương 46.3 phút. Nếu muốn tìm phương án tối ưu, ta đặt $NM = x$ và thời gian đi theo lộ trình AM, MP là

$$t(x) = \frac{\sqrt{100+x^2}}{30} + \frac{25-x}{50}.$$

Khảo sát hàm số $t(x)$, ta dễ dàng tìm được min $t(x)$ bằng $23/30$ (tương ứng 46 phút), đạt được khi $x = 15/2$. Đó chính là phương án tốt nhất.

Ngoài phương pháp khảo sát hàm số, ta có thể dùng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz để đánh giá $t(x)$ như sau

$$t(x) = \frac{\sqrt{100+x^2}}{30} + \frac{25-x}{50} = \frac{\sqrt{100+x^2} \cdot \sqrt{100+7,5^2}}{30 \cdot \sqrt{100+7,5^2}} + \frac{25-x}{50} \geq \frac{100+7,5x}{30 \cdot 12,5} + \frac{25-x}{50} = \frac{23}{30}.$$

Thang điểm: a) 0.5, b) 0.5 c) 0.5 nếu đưa ra một phương án nào đó tốt hơn phương án b và 1 điểm nếu tìm ra phương án tốt nhất.

4. (2 điểm) Bài toán quy về việc tìm số nguyên dương N_0 lớn nhất không biểu diễn được dưới dạng $6x + 10y + 15z$ với x, y, z là các số nguyên không âm.

Ta thấy số 29 không biểu diễn được. Thật vậy, nếu $29 = 6x + 10y + 15z$ thì vì 29 chia 3 dư 2 và $6x + 15z$ chia hết cho 3 nên $10y$ phải chia 3 dư 2, suy ra y chia 3 dư 2, tức là $y \geq 2$. Từ đây suy ra $y = 2$. Nhưng khi đó $6x + 15z = 9$ không thể xảy ra với x, z nguyên không âm.

Ta chứng minh mọi số > 29 đều biểu diễn được. Điều này khá đơn giản:

$$30 = 2 \cdot 15$$

$$31 = 10 + 15 + 6$$

$$32 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10$$

$$33 = 3 \cdot 6 + 15$$

$$34 = 4 \cdot 6 + 10$$

$$35 = 2 \cdot 10 + 15$$

Và nếu N biểu diễn được thì $N + 6$ cũng biểu diễn được.

Thang điểm: Phát biểu thành bài toán: 0.5 điểm. Chứng minh 29 không biểu diễn được 0.75 điểm. Chứng minh mọi số > 29 đều biểu diễn được, 0.75 điểm.

5. (2 điểm) Ta đưa ra 2 lời giải, 1 lời giải “bình dân” ở mức suy luận và dự đoán trực quan và một lời giải toán học, chặt chẽ hơn.

Lời giải 1. Ta thấy người cao nhất (185 cm) chỉ có thể đứng ở bên trái của người cao nhì. Do đó người cao nhất chỉ có xếp ở cuối hàng hoặc kế người cuối hàng. Trong trường hợp người cao nhất xếp cuối hàng thì ta lại có 9 người cao 140, 145, ..., 180 xếp theo chuẩn thứ tự, ta đưa bài toán về 9 người. Nếu người cao nhất xếp kế cuối hàng thì người cuối hàng phải là người cao nhì (180 cm). Bỏ đi hai người này, ta thấy 8 người đầu xếp theo chuẩn thứ tự. Cứ như vậy, nếu đi từ dưới lên, ta có 1 người (140 cm) có 1 cách xếp, 2 người (140, 145) có 2 cách xếp, 3 người (140, 145, 150) có 3 cách xếp (là (140, 145, 150), (145, 140, 150) và (140, 150, 145)). Với 4 người, ta có 5 cách xếp thu được bằng cách

a) Thêm người 155 vào cuối 3 cách xếp của 3 người: (140, 145, 150, 155), (145, 140, 150, 155) và (140, 150, 145, 155).

b) Thêm cặp (155, 150) (theo thứ tự đó) vào cuối 2 cách xếp của 2 người

(140, 145, 155, 150), (145, 140, 155, 150)

Cứ như vậy, với 5 người ta có $5 + 3 = 8$ cách xếp, 6 người có $8 + 5 = 13$ cách xếp ... và 10 người có $55 + 34 = 89$ cách xếp.

Lời giải 2. Ta chứng minh mệnh đề tổng quát sau: Nếu ta có n người có chiều cao là $a, a + 5, \dots, a + (n - 1)5$ cm tương ứng với a nào đó, thì sẽ có F_{n+1} cách để xếp họ theo chuẩn thứ tự, trong đó F_k là số hạng thứ k của dãy số Fibonacci xác định bởi $F_0 = 0, F_1 = 1$, và $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ với mọi $k \geq 2$. Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Trường hợp cơ sở $n = 1$ và $n = 2$ ta có $F_2 = 1$ và $F_3 = 2$ chuẩn thứ tự tương ứng. Giả sử $n > 2$ và mệnh đề đã đúng với số người ít hơn n . Xét L là một cách xếp theo chuẩn thứ tự cho n người. Nếu người cao nhất được xếp ở cuối hàng (từ trái qua phải) thì $n-1$ người trước đó cũng có dạng như trên và được xếp theo chuẩn thứ tự. Suy ra số cách xếp trong trường hợp này là F_n . Nếu người cao nhất không được xếp cuối thì người này cao hơn bất kỳ người đứng bên phải của mình không quá 5cm. Nhưng chỉ có 1 người như vậy, chính là người cao thứ nhì. Như thế người cao thứ nhì xếp cuối hàng và tức là hai người cao nhất nhì xếp ở cuối hàng. Ta có $n-2$ người đầu cũng có dạng trên và được xếp theo chuẩn

thứ tự. Kết hợp hai trường hợp ta được $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ cách xếp theo chuẩn thứ tự của n người. Từ đây, khi $n = 10$, ta có $F_{11} = 89$ cách xếp theo chuẩn thứ tự.