XUNG QUANH BÀI TOÁN CHIA KẸO CỦA EULER

NGUYỄN THỊ NGỌC ÁNH
(GV THPT chuyên Thái Nguyên)

Xuất phát từ một bài toán "Có n chiếc kẹo giống nhau chia cho m em bé. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia kẹo?". Bài toán tưởng chừng rất đơn giản nhưng lại là một bài toán khó đối với nhiều học sinh. Trong đề thi học sinh giỏi Quốc gia năm nay có một bài tổ hợp mà lời giải của nó có thể trình bày nhờ vận dụng kết quả bài toán chia kẹo của Euler. Bài viết nhỏ này giới thiệu cho các em bài toán chia kẹo của Euler và một số ứng dụng của nó.

(Bạn đọc có thể xem thêm Bài toán chia kẹo này ở: *Bài toán về vé hạnh phúc* đăng trên *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ Quyển 6,* trang 187).

1. Từ bài toán thực tế suy ra kết quả bài toán chia kẹo của Euler

Chúng ta đều biết, trong một chuỗi nhị phân, các phần tử nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1. Số dãy nhị phân thỏa mãn có độ dài n và trong mỗi dãy có đúng k $(0 \le k \le n)$ phần tử nhận giá trị bằng 1 là C_n^k.

Bài toán mở đầu

Cho một lưới gồm các ô vuông. Các nút được đánh số từ 0 đến m theo chiều từ trái sang phải và từ 0 đến n theo chiều từ dưới lên trên. Hỏi có bao nhiêu đường đi khác nhau từ nút (0 ; 0) đến nút (m ; n) nếu chỉ cho phép đi trên cạnh các ô vuông theo chiều từ trái sáng phải hoặc từ dưới lên trên?

Lời giải. Một đường đi như thế được xem gồm $(m + n)$ đoạn (mỗi đoạn là một cạnh ô vuông). Tại mỗi đoạn chỉ được chọn một trong hai giá trị đi lên (ta mã hoá là 1) hay sang phải (ta mã hoá là 0) Số đoạn đi lên đúng bằng n và số đoạn sang phải đúng bằng m. Bài toán dẫn đến việc tìm xem có bao nhiêu dãy nhị phân có độ dài $(m + n)$ trong đó có đúng n thành phần có giá trị bằng 1.

Kết quả cần tìm là C_{m+n}^n.

Ta cho một hạt chuyển động trên một đường đi thoả mãn yêu cầu bài toán trên (tức là xuất phát từ điểm (0 ; 0), kết thúc tại điểm $(m ; n)$ và chỉ được phép đi lên hoặc sang phải). Gọi x_{i+1} là số đoạn mà hạt đó đi lên theo đường thẳng đứng có chỉ số i $(i=\overline{1,m})$. Khi đó, số đường đi thoả mãn chính bằng số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_{m+1} = n$. Số nghiệm đó bằng C_{n+m}^m.

Bài toán chia kẹo của Euler

Có n chiếc kẹo giống nhau chia cho m em bé. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia kẹo?

Hay chính là bài toán:

Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Theo bài toán mở đầu, số nghiệm cần tìm là C_{m+n-1}^{m-1}.

2. Các bài toán phát triển

✪**Bài toán 1.** *Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $a + b + c + d = 17$ với $a \ge 1$, $b \ge 2$, $c \ge 3$, $d \ge 4$.*

Lời giải. Đặt $x=a-1, y=b-2, z=c-3, t=d-4$.

Khi đó yêu cầu bài toán trở thành:

Tìm số nghiệm nguyên không âm của PT

$$x + y + z + t = 7.$$

Kết quả cần tìm là $C_{10}^3 = 120$ (nghiệm). ❒

Tổng quát hơn, ta có

✪Bài toán 2. *Cho các số tự nhiên n, λ_1, λ_2, ..., λ_m. Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$ thoả mãn $x_i \geq \lambda_i$, $\forall i = \overline{1,m}$.*

Lời giải. Với mỗi i, đặt $y_i = x_i - \lambda_i$ và gọi $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m$. Khi đó yêu cầu bài toán trở thành tìm số nghiệm nguyên không âm của PT $y_1 + y_2 + \ldots + y_m = n - \lambda$.

* Nếu $\lambda < n$ thì PT có $C_{m+n-\lambda-1}^{m-1}$ nghiệm.

* Nếu $\lambda = n$ thì PT có duy nhất một nghiệm.

* Nếu $\lambda > n$ thì PT vô nghiệm. ❐

✪Bài toán 3. *Tìm số nghiệm nguyên của hệ*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17 \\ 3 \leq x_i \leq 5, \quad \forall i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $y_i = x_i - 3, \forall i = \overline{1,4}$. Từ giả thiết suy ra $0 \leq y_i \leq 2;\ \forall i = \overline{1,4}$. Ta có hệ

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5 \quad (1) \\ 0 \leq y_i \leq 2, \quad \forall i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Gọi X là tập tất cả các nghiệm nguyên không âm của PT (1). Khi đó $|X| = C_8^3$.

Gọi A, B, C, D lần lượt là tập tất cả các nghiệm nguyên của bốn hệ

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 5 \\ y_i \geq 3 \end{cases}$$

với mỗi $i \in \{1;2;3;4\}$. Theo Bài toán 2, ta có

$|A| = |B| = |C| = |D| = C_5^3$

$|A\cap B| = |A\cap C| = |A\cap D| = |B\cap C| = |B\cap D| = |C\cap D| = 0$

$|A\cap B\cap C| = |A\cap C\cap D| = |B\cap C\cap D| = |A\cap B\cap D| = 0$

$|A\cap B\cap C\cap D| = 0.$

Theo nguyên lí bù trừ ta có số nghiệm của hệ (I) bằng

$$|X| - (|A| + |B| + |C| + |D| - |A\cap B| - |A\cap C| - |A\cap D| - |B\cap C| - |B\cap D| - |C\cap D| + |A\cap B\cap C| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| + |A\cap B\cap D| - |A\cap B\cap C\cap D|)$$

$$= C_8^3 - 4C_5^3 = 16.$$

Vậy có 16 nghiệm thoả mãn yêu cầu bài toán. ❐

✪Bài toán 4. *Tìm số các nghiệm nguyên không âm của bất PT*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 11.$$

Nhận xét. Đứng trước bài toán này nhiều học sinh sẽ đưa về việc xét mười hai PT dạng

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = i \qquad (i = \overline{0,11})$$

Số nghiệm cần tìm bằng $\sum_{i=0}^{11} C_{3+i}^3 = 1365$ (nghiệm).

Ta vẫn giải được theo cách trên nếu thay số 11 bởi một số nguyên lớn hơn nhưng mất thời gian vào việc tính toán. Sau đây là cách giải có tính sáng tạo hơn.

Lời giải. Số nghiệm cần tìm bằng số nghiệm nguyên không âm của PT

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11.$$

Dễ thấy, kết quả là $C_{15}^4 = 1365$ (nghiệm).

Từ kết quả của Bài toán 4 ta có thể rút ra kết luận:

Số nghiệm nguyên không âm của bất PT $x_1 + x_2 + ... + x_m \leq n$ $(n, m \in \mathbb{N})$ bằng C_{m+n}^m.

✪Bài toán 5. *Tìm số nghiệm nguyên không âm của hệ*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

Lời giải. Số nghiệm cần tìm bằng số nghiệm nguyên không âm của hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ x_1 \leq 3. \end{cases}$$

Ta lần lượt cho x_1 nhận các giá trị 0; 1; 2; 3 và sử dụng kết quả bài toán chia kẹo Euler thu được số nghiệm cần tìm bằng

$$C_{13}^3 + C_{12}^3 + C_{11}^3 + C_{10}^3 = 791 \text{ (nghiệm)}.$$ ❐

Bạn đọc có thể tiếp tục phát triển các bài toán bằng cách thêm bớt các điều kiện cho các ẩn x_i, từ đó khám phá ra những bài toán mới, cách giải mới độc đáo và thú vị.

3. Ứng dụng kết quả bài toán chia kẹo của Euler vào một số bài toán thực tế

✪Bài toán 6. *Có n vật giống hệt nhau và m hộp phân biệt* ($n \geq m, n, m \in \mathbb{N}^*$).

a) *Hỏi có bao nhiêu cách phân phối hết n vật đó vào m hộp đã cho?*

b) *Hỏi có bao nhiêu cách phân phối hết n vật đó vào m hộp đã cho sao cho mỗi hộp có ít nhất một vật?*

Lời giải. Đánh số các hộp theo thứ tự từ 1 đến *m*. Giả sử ta đã phân phối hết *n* vật vào *m* hộp đã cho. Gọi x_i là số vật được phân phối cho hộp thứ *i*, với $i = \overline{1, m}$.

a) Số cách phân phối thỏa mãn bằng số nghiệm nguyên không âm của PT $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ và bằng C_{m+n-1}^{m-1} (cách) (theo Bài toán chia kẹo Euler).

b) Số cách phân phối thỏa mãn mỗi hộp có ít nhất một vật bằng số nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n \\ x_i \geq 1, \quad \forall i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Kết quả cần tìm là C_{n-1}^{m-1} (theo Bài toán 2). ❐

✪Bài toán 7. *Tìm số cách chọn ra r số phân biệt từ n số nguyên dương đầu tiên sao cho trong sự lựa chọn đó không chứa 2 số nguyên liên tiếp.*

Lời giải. Sắp xếp *n* số nguyên dương đầu tiên thành một hàng theo thứ tự tăng bắt đầu từ 1. Nếu một số được chọn thì đặt biểu tượng *Y* dưới số đó, nếu không chọn thì đặt biểu tượng *N* dưới số đó. Gọi x_1 là số lượng số có biểu tượng *N* đứng trước biểu tượng *Y* đầu tiên; x_2 là số lượng số có biểu tượng *N* giữa biểu tượng *Y* đầu tiên và biểu tượng *Y* thứ hai,... , x_r là số lượng số có biểu tượng *N* giữa biểu tượng *Y* thứ $r-1$ và biểu tượng *Y* thứ *r*; x_{r+1} là số lượng số đứng sau biểu tượng *Y* thứ *r*. Khi đó có một *tương ứng một - một* giữa những sự lựa chọn chấp nhận được với những nghiệm nguyên của PT

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{r+1} = n - r$$

với $x_1 \geq 0, x_{r+1} \geq 0, x_i \geq 1$; $(\forall i = \overline{2, r})$.

Theo Bài toán 2, kết quả cần tìm là C_{n-r+1}^{r} cách lựa chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❐

✪Bài toán 8. (*VMO - 2012*)

Cho một nhóm gồm 5 cô gái, kí hiệu là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 và 12 chàng trai. Có 17 chiếc ghế được sắp thành một hàng ngang. Người ta xếp nhóm người đã cho ngồi vào các chiếc ghế đó sao cho các điều kiện sau được đồng thời thoả mãn

1) *Mỗi ghế có đúng một người ngồi;*

2) *Thứ tự ngồi của các cô gái, xét từ trái qua phải, là G_1, G_2, G_3, G_4, G_5;*

3) *Giữa G_1 và G_2 có ít nhất 3 chàng trai;*

4) *Giữa G_4 và G_5 có ít nhất 1 chàng trai và nhiều nhất 4 chàng trai;*

Hỏi có tất cả bao nhiêu các xếp như vậy?

(Hai cách xếp được coi là khác nhau nếu tồn tại một chiếc ghế mà người ngồi ở chiếc ghế đó trong hai cách xếp là khác nhau).

Lời giải. Đánh số các ghế từ trái qua phải theo thứ tự từ 1 đến 17.

Gọi x_1 là số chàng trai được xếp bên trái G_1, x_2 là số chàng trai được xếp ở giữa G_1 và G_2, x_3 là số chàng trai được xếp ở giữa G_2 và G_3, x_4 là số chàng trai được xếp ở giữa G_3 và G_4, x_5 là số chàng trai được xếp ở giữa G_4 và G_5, x_6 là số chàng trai được xếp bên phải G_5.

Khi đó, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12 \\ x_2 \geq 3 \\ 1 \leq x_5 \leq 4. \end{cases}$$

Đặt $y_2 = x_2 - 3$ và $y_5 = x_5 - 1$.

Số cách phân ghế cho các cô gái bằng số nghiệm nguyên không âm của hệ

$$\begin{cases} x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 8 \\ y_5 \leq 3. \end{cases}$$

Ta lần lượt cho y_5 nhận các giá trị 0; 1; 2; 3 và áp dụng kết quả bài toán chia kẹo Euler thu được kết quả là

$C_{12}^4 + C_{11}^4 + C_{10}^4 + C_9^4 = 1161$ (cách).

Vì 12 chàng trai có thể hoán đổi vị trí cho nhau nên số cách xếp thoả mãn yêu cầu bài toán bằng 12! 1161 (cách). ❐

✪**Bài toán 9.** *Giả sử có x_i vật giống nhau có cùng kí hiệu i, ($i = \overline{1,m}$) và n hộp phân biệt. Hỏi có bao nhiêu cách phân phối hết các vật đã cho vào n hộp sao cho hộp thứ j được nhận ít nhất q_{ij} vật mang kí hiệu i, ($i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$)?*

Lời giải. Ta phân phối hết các vật mang kí hiệu 1 vào *n* hộp , sau đó đến lượt các vật mang kí hiệu 2, 3,…, *m*.

Gọi $q_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$. Có $C_{x_i - q_i + n-1}^{n-1}$ cách phân phối hết các vật mang kí hiệu *i*. Theo quy tắc nhân, có $\prod_{i=1}^{m} C_{x_i - q_i + n-1}^{n-1}$ cách phân phối thỏa mãn yêu cầu bài toán. ❐

BÀI TẬP

1. Xét một tập hợp *X* gồm *n* số tự nhiên liên tiếp. Ta gọi mỗi tập con của *X* gồm *p* số tự nhiên liên tiếp là một "*p*- khối". Có bao nhiêu cách lấy ra *m* "*p*- khối" từ *X* sao cho *m* khối này đôi một không giao nhau?

2. Cho tập hợp *A* = {1; 2; 3; …;18}. Có bao nhiêu cách chọn ra năm số trong tập *A* sao cho hiệu của hai số bất kì trong năm số đó không nhỏ hơn 2?

3. Một cửa hàng có *m* loại kem khác nhau. Một khách hàng cần mua *n* cốc kem ở đó. Hỏi rằng

a) Người khách hàng đó có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn?

b) Người khách hàng đó có tất cả bao nhiêu sự lựa chọn sao cho cả *m* loại kem đều có mặt trong mỗi sự lựa chọn?

4. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000000 mà có tổng bằng 15?

5. Một học sinh muốn lọt vào đội tuyển đi thi toán phải qua 4 kì thi và phải đạt ít nhất 17 điểm, nhưng không có kì thi nào bị điểm 2 hoặc 1. Hỏi có bao nhiêu cách tiến hành 4 kì thi đó để em học sinh đó chắc chắn lọt vào đội tuyển?

(Hai cách tiến hành được xem là khác nhau nếu có ít nhất một kì thi nhận được số điểm khác nhau và mỗi kì thi có thể đạt điểm là số nguyên từ 1 đến 5).

6. Có 12 cái hộp khác nhau được đánh số từ 1 đến 12 và 8 viên bi giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 viên bi vào 12 hộp sao cho tổng số các viên bi trong các hộp số 1, 2, 3 là chẵn, còn tổng các viên bi trong các hộp 4, 5, 6 là lẻ?