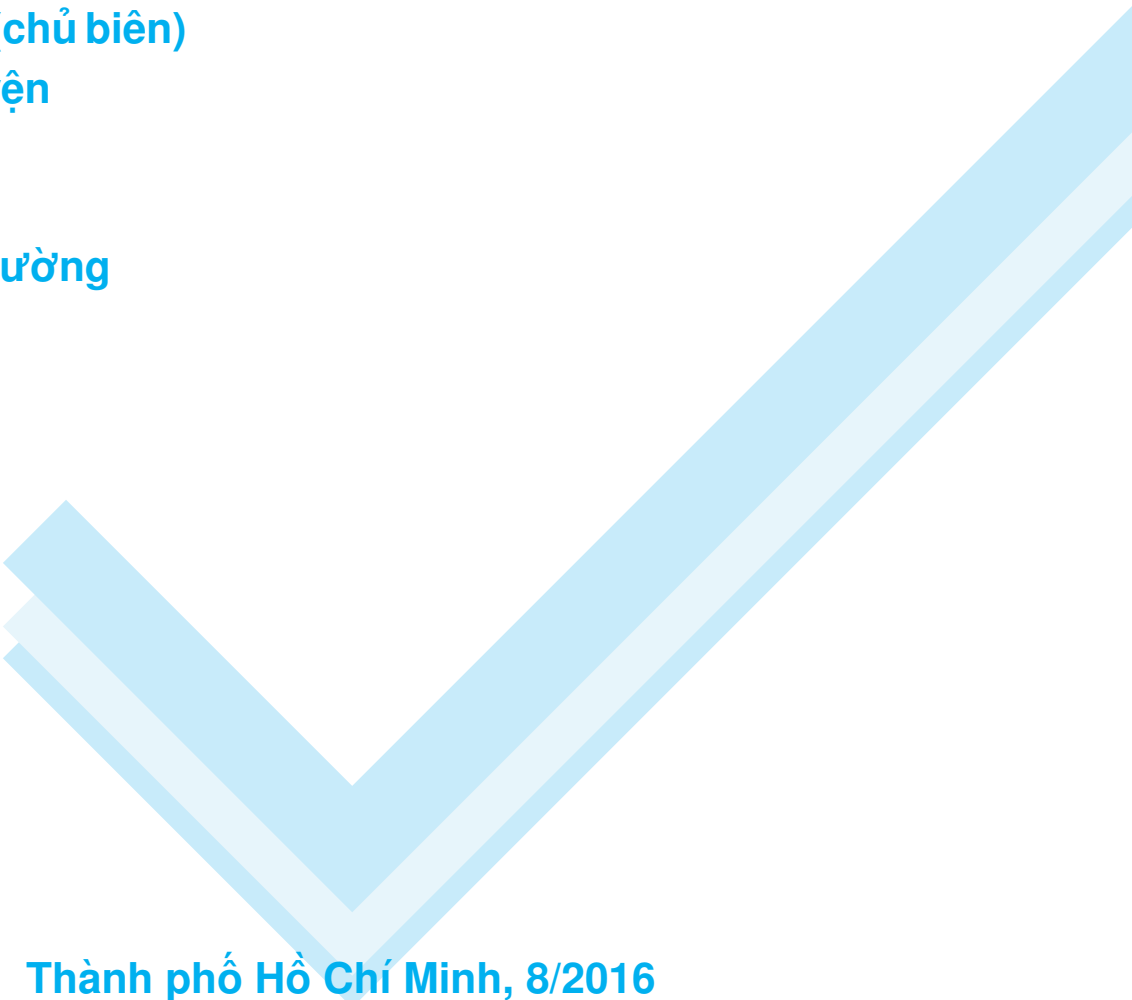




GẶP GỠ TOÁN HỌC 2016

Trần Nam Dũng (chủ biên)
Nguyễn Văn Huyện
Phạm Tiên Kha
Tống Hữu Nhân
Huỳnh Phước Trường



Thành phố Hồ Chí Minh, 8/2016

MỤC LỤC

Lời nói đầu	3
<i>Nguyễn Văn Mậu</i>	
Phương trình hàm	5
<i>Lê Bá Khánh Trình</i>	
Hai tam giác tương ứng song song	8
<i>Trần Nam Dũng</i>	
Phương pháp tư duy tổ hợp	12
<i>Trần Nam Dũng</i>	
Phương pháp tổ hợp	18
<i>Lưu Bá Thắng</i>	
Hàm tổng các chữ số	21
<i>Nguyễn Song Minh</i>	
Số phức và số học	26
<i>Võ Quốc Bá Cẩn</i>	
Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức	29
<i>Võ Quốc Bá Cẩn</i>	
Sử dụng tính toàn ánh trong giải phương trình hàm	36
<i>Võ Quốc Bá Cẩn</i>	
Phương trình hàm	40
<i>Lê Phúc Lữ</i>	
Một số vấn đề về đường đối trung	64
<i>Lê Phúc Lữ</i>	
Các bài toán hình học nếu ... thì	72
<i>Ban biên tập</i>	
Đề thi Olympic GGTH 2016	81
<i>Ban biên tập</i>	
Các bài toán đề nghị	84

LỜI NÓI ĐẦU

Gặp Gỡ Toán Học là một chương trình thường niên được tổ chức nhằm bồi dưỡng các bạn học sinh giỏi đến từ các trường chuyên khắp các tỉnh phía Nam. Được tổ chức lần đầu tiên vào năm 2010, đến nay, chương trình đã đồng hành cùng với các lứa học sinh giỏi qua tám lần Gặp Gỡ. Gặp Gỡ Toán Học 8 năm 2016 được tổ chức từ ngày 15/7 đến ngày 22/7 tại trường THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai, quy tụ hơn 100 bạn học sinh đến từ thủ đô Hà Nội trải dài đến vùng đất mũi Cà Mau. Với các bài giảng chất lượng của chuyên gia, các hoạt động sinh hoạt sôi nổi cùng huấn luyện viên, chuyến dã ngoại đầy ắp những niềm vui và bài thi Olympic Gặp Gỡ Toán Học “khó nhất từ trước đến nay”, các bạn học sinh đã trải qua một tuần làm việc hết năng suất với những kỷ niệm khó quên cùng những người bạn đồng trang lứa đến từ khắp mọi miền tổ quốc, để rồi khi chương trình kết thúc, các bạn ắt hẳn đã thu được những trải nghiệm quý báu cả trong “Toán Học” và trong những cuộc “Gặp Gỡ”.

Quý bạn đọc thân mến,

Các bạn đang có trong tay quyển Kỷ yếu Hậu Gặp Gỡ Toán Học 2016, một trong những nét đổi mới đặc sắc của chương trình Gặp Gỡ Toán Học năm nay. Quyển Kỷ yếu này ra đời nhằm giúp các bạn học sinh đã tham gia chương trình có một tài liệu đầy đủ về những bài giảng đã được học, đồng thời cũng tạo điều kiện cho những bạn học sinh không có cơ hội tham gia Gặp Gỡ Toán Học được tiếp cận với những bài giảng của các chuyên gia trong nhiều lĩnh vực. Đó là các bài giảng Đại số của thầy Nguyễn Văn Mậu, thầy Võ Quốc Bá Cẩn, bài giảng Hình học của thầy Lê Bá Khánh Trình, thầy Lê Phúc Lữ, bài giảng Số học của thầy Lưu Bá Thắng, thầy Nguyễn Song Minh và bài giảng Tổ hợp của thầy Trần Nam Dũng. Bên cạnh đó là đề thi chính thức Olympic Gặp Gỡ Toán học và các bài toán đề nghị. Cùng với Kỷ yếu thường niên, cuốn Kỷ yếu Hậu Gặp Gỡ Toán Học này chính là thay cho một lời tổng kết để biến Gặp Gỡ Toán Học trở thành một chương trình mang tính chuyên nghiệp và xuyên suốt : khởi động với lời kêu gọi viết bài cho Kỷ yếu Gặp Gỡ Toán Học, hoạt động hứng khởi trong tuần lễ diễn ra chính thức, và cuối cùng là Kỷ yếu Hậu Gặp Gỡ Toán Học để nhìn lại cả quá trình và từ đó tiếp tục đề ra những hướng đi mới.

Để hoàn thành cuốn Kỷ yếu Hậu Gặp Gỡ Toán Học, chúng tôi không thể không nhắc đến sự giúp đỡ tận tình của các thầy, các chuyên gia đã tham gia giảng dạy tại Gặp Gỡ Toán Học 2016. Các thầy đã tạo điều kiện tốt nhất cho Ban biên tập trong việc tổng hợp các bài giảng, đã cho những góp ý sâu sắc về chuyên môn để chúng tôi hoàn thiện quyển tài liệu này trong lần đầu ra mắt. Đồng thời, chúng tôi cũng xin gửi lời cảm ơn trân trọng đến quý thầy cô, quý bạn đọc gần xa đã không ngừng động viên, cổ vũ về mặt tinh thần để chúng tôi có thêm động lực hoàn thành nhanh chóng công việc của mình và gửi nó đến các độc giả. Chính những lời thăm hỏi, quan tâm ấy đã giúp chúng tôi nhận ra công việc mình đang làm thật sự có ý nghĩa, để từ đó

chúng tôi càng thêm hứng thú cũng như trách nhiệm khi biên tập quyển Kỷ yếu này. Với vai trò của những người biên tập, chúng tôi không lấy gì hạnh phúc hơn ngoài việc quý bạn đọc sẽ tìm thấy được những điều hữu ích, mới mẻ trên từng trang của cuốn Kỷ yếu. Cuốn Kỷ yếu này được viết dành cho mọi đối tượng bạn đọc, từ học sinh, giáo viên cho đến những độc giả đam mê Toán học, chính vì vậy chúng tôi luôn mong mỗi những lời đóng góp chân thành của quý bạn đọc để chúng tôi kịp thời nắm bắt và đáp ứng nhu cầu của các bạn trong các lần phát hành Kỷ yếu sau. Đây là lần đầu tiên quyển Kỷ yếu này được phát hành, do đó nó còn khá đơn sơ và giản dị. Chúng tôi hy vọng qua thời gian, quyển Kỷ yếu Hậu Gặp Gỡ Toán Học sẽ ngày một đặc sắc, phong phú thêm, nó sẽ trở thành một sản phẩm không phải của riêng cá nhân, tổ chức nào mà sẽ được xây dựng, bồi đắp bởi cộng đồng những người yêu Toán ở Việt Nam, với tinh thần “độc giả cũng chính là tác giả”.

Còn bây giờ, xin mời các bạn thưởng thức cuốn Kỷ yếu Hậu Gặp Gỡ Toán Học 2016 !

TP.HCM, tháng 8 năm 2016
Ban Biên Tập

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Nguyễn Văn Mậu
(Hội toán học Hà Nội)

1. Kiến thức cần nhớ

1.1. Các dạng toán về hàm số (sơ cấp)

- $f(t) = at$, $f(t) = at + b$, $f(t) = t^m$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $m \in \mathbb{N}$.
- $f(t) = a^t$, $f(t) = \log_a t$ với $a \in \mathbb{R}$.
- $f(t) = \sin t$, $f(t) = \cos t$, $f(t) = \tan t$, $f(t) = \cot t$.
- $f(t) = \arcsin t$, $f(t) = \arccos t$, $f(t) = \arctan t$, $f(t) = \operatorname{arccot} t$.
- $f(t) = \sinh t$, $f(t) = \cosh t$, $f(t) = \tanh t$, $f(t) = \operatorname{cotanh} t$.

1.2. Hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn

- Hàm tuần hoàn là hàm có dạng: $f(t + h) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $h > 0$.
- Hàm phản tuần hoàn là hàm có dạng: $f(t + h) = -f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $h > 0$.
 - Các hàm số sin cos là tuần hoàn với $h = 2\pi$, phản tuần hoàn với $h = \pi$.
 - Các hàm số tan cot là tuần hoàn với $h = \pi$, không phản tuần hoàn.
- Hàm tuần hoàn cộng tính là hàm tuần hoàn và thỏa $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Tương tự ta cũng có hàm phản tuần hoàn cộng tính.
- Hàm tuần hoàn nhân tính là hàm tuần hoàn và thỏa $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Tương tự ta cũng có hàm phản tuần hoàn cộng tính.

1.3. Hàm chẵn và hàm lẻ

- Hàm chẵn là hàm có dạng: $f(-t) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
- Hàm lẻ là hàm có dạng: $f(-t) = -f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2. Nguyên lý chia đôi

Khi giải một bài hàm mà chúng ta không thể biến đổi đẳng thức gì được nữa thì phương pháp đầu tiên nên nghĩ đến là phương pháp chia đôi, tức có dạng

$$A = B \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}(A + B).$$

Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t) \Leftrightarrow f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right)\right), \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh với mọi t thì f sẽ có dạng

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(g(t) + g\left(\frac{1}{t}\right)\right), \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

với g là hàm số tùy ý.

Chiều ngược: Chứng minh dạng (3) thỏa điều kiện hàm f .

Thật vậy vì

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(g\left(\frac{1}{t}\right) + g(t)\right) = f(t),$$

do đó ta có điều phải chứng minh.

Chiều thuận: Giả sử f thỏa $f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$. Chứng minh f phải có dạng (3).

Vì f thỏa (1) nên f thỏa (2), suy ra f thỏa (3). Vậy hàm như (3) là hàm cần tìm. $\square$

Bài toán 2. Tìm tất cả các hàm f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2-x) + f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Đặt $g(x) = f(x) - x^2$. Khi đó phương trình thành $g(2-x) = g(x)$. Đặt $t = 1-x$ khi đó ta có

$$g(1+t) + g(1-t) = 0.$$

Tương tự bài trên ta có

$$g(1+t) = -g(1-t) = \frac{1}{2}(g(1+t) - g(1-t)).$$

Tương tự ta sẽ chứng minh được

$$g(1+t) = k(1+t) - k(1-t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}(k(x) - k(2-x))$. $\square$

3. Các bài tập tương tự

Bài tập 1. Tìm tất cả các hàm f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-t) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Bài tập 2. Tìm tất cả các hàm f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-t) = -f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3. Tìm tất cả các hàm f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(\frac{1}{t}\right) \cdot f(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Bài tập 4. Tìm tất cả các hàm f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$ sao cho $f(x) = x$ có hai nghiệm $x = \pm 1$.

HAI TAM GIÁC TƯƠNG ỨNG SONG SONG

Lê Bá Khánh Trình
(Đại học KHTN ĐHQG, thành phố Hồ Chí Minh)

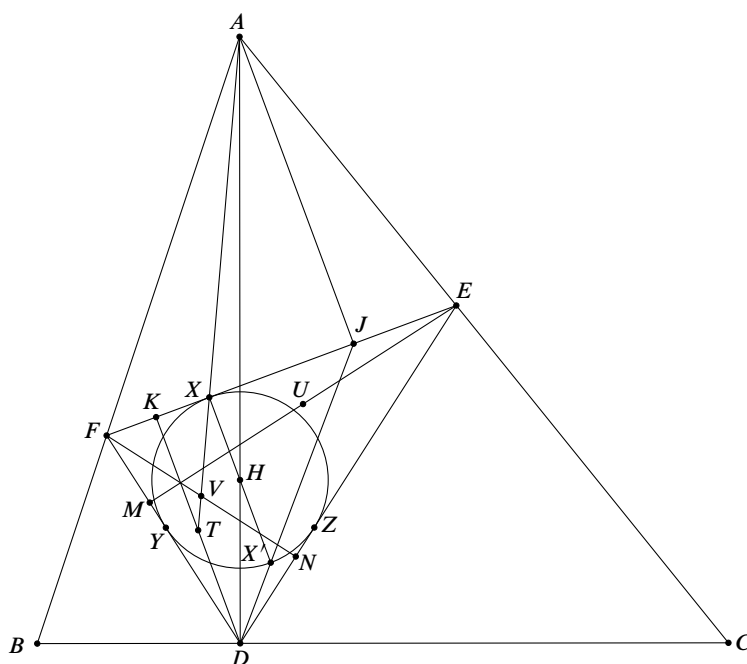
1. Định lý

Định lý 1. Cho hai $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ có các cạnh tương ứng song song. Khi đó, các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại tâm vị tự S của hai tam giác.

2. Bài toán

Bài toán 1. Cho $\triangle ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn (O) , có các đường AD, BE, CF . Các điểm K, M, N thuộc các cạnh EF, FD, DE sao cho các đường thẳng KD, ME, NF lần lượt song song với các đường thẳng OA, OB, OC . Gọi T, U, V là trung điểm các đoạn DK, EM, FN .

- Chứng minh rằng các đường thẳng AT, BU, CV đồng quy tại điểm S .
- Chứng minh rằng điểm S nằm trên đường thẳng Euler của $\triangle ABC$.



Lời giải. a) Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$. Dễ thấy H là tâm nội tiếp, A, B, C là tâm bàng tiếp của $\triangle DEF$. (H) tiếp xúc với EF, FD, DE tại X, Y, Z .

Do $OA \perp EF$ tại J và $DK \parallel OA$ nên $DK \perp EF$, suy ra DK, EM, FN là các đường cao của $\triangle DEF$.

Kẻ đường kính XX' của (I) , dễ thấy D, X', J thẳng hàng. Ta có $XX' \parallel DK$ do cùng vuông góc EF , mà I là trung điểm XX' nên $(DJ, DX, DA, DK) = -1$.

Suy tiếp $(AJ, AX, AD, AK) = -1$, kết hợp $DK \parallel AJ$ do cùng vuông góc EF , nên AX đi qua trung điểm T của DK .

Suy ra

$$\prod \frac{\sin \angle TAE}{\sin \angle TAF} = \prod \frac{XE}{XF} \cdot \frac{AF}{AE} = \prod \frac{XE}{XF} \cdot \frac{AC}{AB} = \prod \frac{XE}{XF} = 1$$

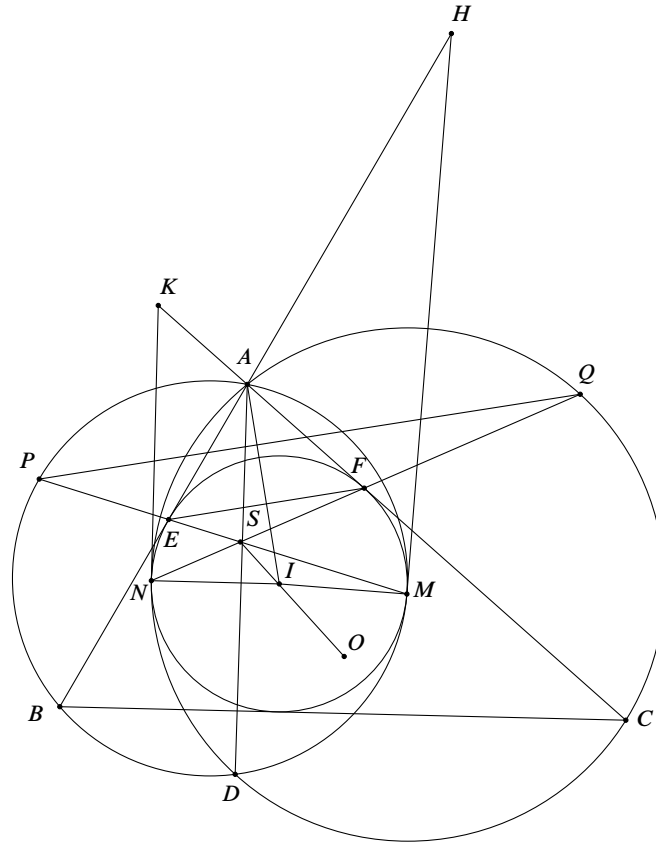
do DX, EY, FZ đồng quy tại điểm Gergonne của $\triangle DEF$. Theo định lý Ceva dạng sin, AT, BU, CV đồng quy tại S .

b) Do YZ vuông góc với phân giác trong góc D nên song song với phân giác ngoài góc D hay $YZ \parallel BC$. Suy ra $\triangle ABC$ và $\triangle XYZ$ có các cạnh song song, mà H, O lần lượt là tâm ngoại nên AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm nằm trên OH . $\square$

Bài toán 2. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) (E, F là tiếp điểm với các cạnh AB, AC). Đường tròn (O_1) qua hai đỉnh A, B và tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm M , đường tròn (O_2) qua hai đỉnh A, C và tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm N .

a) Chứng minh rằng các đường thẳng EM, FN, AD đồng quy tại điểm S .

b) Chứng minh rằng điểm S nằm trên đường thẳng OI .



Lời giải. a) Gọi S là giao điểm EM, FN . SE, SF lần lượt cắt $(MAB), (MAC)$ tại P, Q .

Do (I) cùng tiếp xúc $AB, (O_1)$ và $AC, (O_2)$ nên

$$\begin{cases} PA^2 = PE \cdot PM = P_{P/(I)} = PI^2 - r^2 \\ QA^2 = QF \cdot QN = P_{Q/(I)} = QI^2 - r^2 \end{cases}$$

do đó $PA^2 - QA^2 = PI^2 - QI^2$. Theo định lý Carnot, suy ra $AI \perp PQ$. Mà $AI \perp EF$, nên $PQ \parallel EF$.

Mặt khác, MN đối song với EF , suy tiếp MN đối song với PQ , hay $PQMN$ nội tiếp. Do đó

$$P_{S/(MAB)} = SM \cdot SP = SN \cdot SQ = P_{S/(MAC)},$$

hay S nằm trên AD là trục đẳng phương của $(MAB), (MAC)$.

b) *Cách 1.* O, P nằm trên đường trung trực AB nên $OP \perp AB$. Mà $IE \perp AB$ nên $OP \parallel IE$. Tương tự, $OQ \parallel IF$.

Theo chứng minh trên thì $PQ \parallel EF$, nên $\triangle OPQ, \triangle IEF$ có các cạnh tương ứng song song nên OI, EP, FQ đồng quy tại tâm vị tự S của hai tam giác.

Cách 2. Tiếp tuyến tại M, N của $(MAB), (MAC)$ lần lượt cắt AB, AC tại H, K . S nằm trên đường đối cực của H, K đối với (I) , nên theo định lý La Hire, HK là đường đối cực của S đối với (I) hay $IS \perp HK$. (1)

Mặt khác, ta có

$$P_{H/(I)} = HM^2 = HA \cdot HB = P_{H/(O)}, P_{K/(I)} = KN^2 = KA \cdot KC = P_{K/(O)}.$$

nên HK là trục đẳng phương của $(O), (I)$, hay $OI \perp HK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra S, O, I thẳng hàng. □

Bài toán 3. Cho $\triangle ABC$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại các điểm D, E, F . Gọi M, N, P là tâm bàng tiếp tương ứng các đỉnh A, B, C . Chứng minh rằng có duy nhất một điểm S có cùng phương tích với sáu đường tròn $(MBE), (MCF), (NCD), (NAF), (PAE), (PBD)$ và điểm S nằm trên đường thẳng Euler của $\triangle ABC$.

Gợi ý. Chứng minh MD, NE, PF là trục đẳng phương của từng cặp đường tròn. Theo bài toán 1, chúng đồng quy tại S nằm trên đường thẳng Euler của $\triangle ABC$.

PHƯƠNG PHÁP TƯ DUY TỔ HỢP

Trần Nam Dũng
(Đại học KHTN ĐHQG, thành phố Hồ Chí Minh)

Bài toán 1. Cho một bảng vuông $m \times n$ (m dòng và n cột). Ta điền các số $-1, 0, 1$ vào các ô vuông của bảng sao cho tổng các số ở mỗi hàng, mỗi cột đều chia hết cho 3. Tìm giá trị lớn nhất của số các số 1 được điền.

Lời giải. Đặt $S(m, n)$ là số các số 1 lớn nhất được điền vào bảng $m \times n$. Ta sẽ giải quyết các trường hợp đơn giản trước.

- Trường hợp 1: $3 \mid m$ và $3 \mid n$.

Trong trường hợp này, ta điền vào bảng tất cả các số 1. Như vậy $S(m, n) = mn$.

- Trường hợp 2: $3 \mid m$ và $3 \nmid n$.

Ta sẽ chứng minh rằng $S(m, n) \leq m(n-1)$. Thật vậy, giả sử có $m(n-1) + 1$ ô được đánh. Như vậy, theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một dòng gồm toàn các số 1. Nhưng điều này mâu thuẫn do $3 \nmid n$. Mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh.

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một cách đánh số thỏa mãn $S(m, n) = m(n-1)$. Trong trường hợp $n = 3k + 1$ thì ta có cách đánh số sau:

1	1	1	0
1	1	1	0
1	1	1	0

Trong trường hợp $n = 3k + 2$ thì ta có cách đánh số sau:

1	1	1	1	-1
1	1	1	1	-1
1	1	1	1	-1

- Trường hợp 3: $m \equiv n \not\equiv 0 \pmod{3}$.

Ta sẽ giải quyết trong trường hợp $m = n$. Khi đó ta sẽ chứng minh $S(m, m) \leq m^2 - m$. Thật vậy, tương tự như phần trước, nếu $S(m, m) \geq m^2 - m + 1$ thì tồn tại một dòng gồm toàn các số 1, điều này vô lý.

Trong trường hợp $m \leq n$. Ta sẽ chứng minh $S(m, n) \leq mn - n$. Thật vậy, ta có

$$S(m, n) \leq S(m, m) + S(n - m, m) = m^2 - m + (n - m)(m - 1) = mn - m.$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một cách đánh số thỏa mãn $S(m, n) = mn - n$. Ta chia bảng thành hai phần $m \times m$ và $(m - n) \times m$.

0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Như vậy ta chỉ còn phải giải quyết trường hợp $m = 3k + 1, n = 3k + 2$ như một bài tập về nhà. □

Bài toán 2. Có một con ếch nhảy từ A sang B trong bảng vuông 5×7 . Mỗi bước nhảy là 1 hoặc 2 bước, là lên trên hoặc sang phải.

						B
A						

Hỏi con ếch có bao nhiêu cách nhảy?

Lời giải. Giả sử bảng chỉ có kích thước 1×7 . Trong mỗi ô, ta đánh cách di chuyển từ A đến ô đó (tại A ta đánh số 1). Như vậy ta có cách đánh số sau:

1	1	2	3	5	8	13
---	---	---	---	---	---	----

Một cách tương tự, tại mỗi ô trong bảng 5×5 , số cách đi đến ô (m, n) bằng tổng các cách đi đến các ô $(m-1, n)$, $(m-2, n)$, $(m, n-1)$, $(m, n-2)$, nghĩa là bằng tổng các số được viết trên các ô đó. Như vậy ta có bảng sau:

5				556	1390	B
3						1060
2	4	12	22			304
1	2	5	10	20	38	71
A	1	2	3	5	8	13

Số được viết ở **B** là: $556 + 1390 + 304 + 1060 = 3310$. □

Bài toán 3. Ta phân tích 20 thành tổng của 2 số. Sau đó thực hiện tiếp tục như vậy với các số bên dưới. Với mỗi tổng, tính tích hai số của tổng. Tổng tất cả các tích trên có thể nhận giá trị bao nhiêu?

Lời giải. Ta sẽ thử trong các trường hợp nhỏ. Trong trường hợp $n = 5$, ta tính được tổng các tích tạo thành là 10 (trong vài trường hợp). Ta dự đoán kết quả trong trường hợp tổng quát: Tổng thu được có giá trị $\binom{n}{2}$ và ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.

Thật vậy, nhận xét hiển nhiên đúng khi $n = 2$. Giả sử ta có tổng các tích thu được với $k \leq n-1$ là $\binom{k}{2}$. Với n , ta phân tích thành tổng của hai số m và $n-m$ đều nhỏ hơn hoặc bằng $n-1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có tổng các tích được tạo thành trong trường hợp này là $\binom{m}{2}$ và $\binom{n-m}{2}$. Như vậy tổng các tích thu được khi phân tích n thành các tổng là

$$\binom{m}{2} + \binom{n-m}{2} + m(n-m).$$

Việc còn lại là chứng minh

$$\binom{m}{2} + \binom{n-m}{2} + m(n-m) = \binom{n}{2}.$$

Ta có thể dễ dàng khai triển đẳng thức này và chứng minh bằng đại số. Tuy nhiên ta cũng có một chứng minh tổ hợp như sau: Giả sử có n đội bóng thi đấu vòng tròn một lượt. Như vậy số các trận đấu được tổ chức là $\binom{n}{2}$. Bây giờ giả sử n đội bóng này chia thành hai nhóm gồm m đội và $n-m$ đội. Như vậy số trận đấu trong mỗi nhóm này lần lượt là $\binom{m}{2}$ và $\binom{n-m}{2}$. Sau đó, ta cho các đội trong hai nhóm này đấu với nhau thì số trận đấu là $m(n-m)$. Như vậy, ta đã cho n đội bóng đấu với nhau (và không có sự trùng lặp) nên ta có:

$$\binom{m}{2} + \binom{n-m}{2} + m(n-m) = \binom{n}{2}.$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Bài toán 4. Cho bảng vuông 8×8 đánh dấu $\times$ sao cho không có bốn ô nào được đánh dấu tạo thành hình chữ nhật. Tìm giá trị lớn nhất của số các dấu $\times$.

Lời giải. Bài toán cho ta ý tưởng đếm bằng hai cách. Để tìm giá trị lớn nhất của số các dấu $\times$, ta sẽ cố gắng tìm một chặn trên "tốt" (64 hay 56 đều là chặn trên nhưng không tốt). Ta mô hình hóa lại bài toán như sau:

Xét 8 tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_8 \subset \{1, 2, \dots, 8\}$. Trên bảng 8×8 mới, ta điền vào ô x_{ij} số 1 nếu i thuộc A_j và 0 nếu i không thuộc A_j . Theo giả thiết, do không có hình chữ nhật nào được đánh dấu nên $|A_i \cap A_j| \leq 1, \forall i \neq j$.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	1		1					
2		0						
3								
4	1		0					
5					...			
6								
7								
8								

Như vậy số ô được đánh dấu $\times$ là số số 1 được điền trong bảng và ta đặt là S . Một nhận xét đơn giản là $S = \sum_{k=1}^8 d(k)$ với k là số số 1 trên mỗi hàng.

Ta sẽ đếm số cặp $(1, 1)$ trên mỗi hàng:

- Mỗi hàng có $d(k)$ số 1 nên số cặp $(1, 1)$ trên mỗi hàng là $\binom{d(k)}{2}$ nên tổng số cặp $(1, 1)$ là

$$\sum_{k=1}^8 \binom{d(k)}{2} = \sum_{k=1}^8 \frac{d(k)^2 - d(k)}{2}.$$

- Hai cặp cột bất kì cho ta tối đa một cặp $(1, 1)$. Như vậy ta có:

$$\text{Số cặp 1 trên các hàng} \leq \text{Số cặp cột} = \binom{8}{2} = 28.$$

Như vậy ta có:

$$\sum_{k=1}^8 \frac{d(k)^2 - d(k)}{2} \geq 28.$$

Kết hợp với $S = \sum_{k=1}^8 d(k)$, ta có $S \leq 25$.

Nhưng khi thử lại (trong một số trường hợp) thì ta chỉ đánh dấu được 24 ô nên ta sẽ cố gắng chứng minh rằng $S = 25$ không thỏa. Đây là bài tập về nhà cho phương pháp đếm bằng hai cách kết hợp với chứng minh các trường hợp cụ thể. $\square$

Ta có một bài toán cùng chủ đề sau:

Bài toán 5. Cho $X = \{1, 2, 3, \dots, 4n\}$. Hai tập $A, B \subset X$ được gọi là không giống nhau nếu $|(A \setminus B) \cup (B \setminus A)| \geq 2n + 1$. Gọi $A_1, A_2, \dots, A_m$ là các tập con đôi một không giống nhau của X .

(a) Chứng minh rằng $m \leq 2n$.

(b) Chứng minh rằng $m \leq \frac{4(n+1)}{3}$.

Lời giải. Câu (a) được tiếp cận đơn giản bằng đếm bằng hai cách. Ta thiết lập bảng sau:

	1	2	...				$4n$
A_1	1		1				
A_2		0					
...					...		
A_m							

Trong bảng trên, hai dòng bất kì chứa ít nhất $2n + 1$ cặp $(0, 1)$ (không tính thứ tự) trên mỗi cột tương ứng. Bây giờ, ta sẽ đếm số S là số cặp $(0, 1)$ trên các mỗi cột.

- Đếm theo cặp dòng: Có $\binom{m}{2}$ cặp dòng, mỗi cặp dòng này có ít nhất $2n + 1$ cặp $(0, 1)$. Do đó:

$$S \geq \binom{m}{2} \cdot (2n + 1).$$

- Đếm theo cột: Trên cột j , giả sử có c_j số 1 thì số cặp $(0, 1)$ là $c_j(m - c_j) \leq \frac{m^2}{4}$. Từ đó suy ra

$$S \leq 4n \cdot \frac{m^2}{4}.$$

Như vậy ta có

$$4n \cdot \frac{m^2}{4} \leq \binom{m}{2} \cdot (2n + 1).$$

Từ đó ta có $m \leq 2n + 1$. Tuy nhiên, nếu như đẳng thức xảy ra thì trên mỗi cột, $c_j \neq n - c_j$ nên không có đẳng thức ở trên (mâu thuẫn). Vậy $m < 2n + 1$ hay $m \leq 2n$. $\square$

PHƯƠNG PHÁP TỔ HỢP

Trần Nam Dũng
(Đại học KHTN ĐHQG, thành phố Hồ Chí Minh)

Bài toán 1. Cho n giác. Kể tất cả các đường chéo của n giác đó, biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy.

a) Có bao nhiêu giao điểm của các đường chéo ?

b) Các đường chéo chia phần trong của đa giác thành bao nhiêu miền?

Lời giải. a) Chọn 4 đỉnh bất kỳ, ta được một tứ giác và một giao điểm của hai đường chéo. Vì không có ba đường chéo nào đồng quy nên số giao điểm của các đường chéo là C_n^4 .

b) Gọi $t_1, t_2, \dots, t_m$ là số giao điểm của các đường chéo thứ $1, 2, \dots, m$. Khi đó

t_1 là số giao điểm của đường chéo thứ nhất, sẽ tạo thành $t_1 + 1$ miền mới.

t_2 là số giao điểm của đường chéo thứ hai, sẽ tạo thành $t_2 + 1$ miền mới.

...

t_m là số giao điểm của đường chéo thứ m , sẽ tạo thành $t_m + 1$ miền mới.

Suy ra

$$\begin{aligned} \text{Số miền} &= t_1 + t_2 + \dots + t_m + m + 1 \\ &= \text{Số giao điểm các đường chéo} + \text{Số đường chéo} + 1 \\ &= C_n^4 + \frac{n(n-3)}{2} + 1 = C_{n-1}^2 + C_n^4. \end{aligned}$$

Đáp số $C_{n-1}^2 + C_n^4$. □

Bài toán 2. Cho tập $A = \{1, 2, \dots, 20\}$.

Lời giải. a) Số tập con của A là 2^{20} .

Số tập con của A có ba phần tử là C_{20}^3 .

Số tập con của A có tổng các phần tử là lẻ là 2^{19} .

Số tập con của A có ba phần tử và có tổng các phần tử là lẻ là 2^{10} .

Số tập con của A có ba phần tử và có tổng các phần tử chia hết cho 3 là $2C_7^3 + C_6^3 + 7 \cdot 7 \cdot 6$.

b) Số tập con có tổng các phần tử chia hết cho 3 là ?

Cách 1. Phân hoạch A thành ba tập

$$A_1 = \{1, 4, 7, \dots, 19\}, A_2 = \{2, 5, 8, \dots, 20\}, A_3 = \{3, 6, 9, \dots, 18\}.$$

Lấy phần tử 1 của A_1 và 2 của A_2 . Khi đó xét $A_{18} = A \setminus \{1, 2\} = \{3, 4, \dots, 20\}$ thì $|A| = 18$ nên số tập con của A_{18} là 2^{18} . Với mỗi tập con của A_{18} , ta tìm cách xây dựng một tập con của A có tổng các phần tử chia hết cho 3.

- Nếu tổng các phần tử của tập con của A_{18} chia hết cho 3 thì ta giữ nguyên tập con hoặc thêm cả $\{1, 2\}$ vào tập con.
- Nếu tổng các phần tử của tập con của A_{18} chia 3 dư 1 thì ta thêm $\{2\}$ vào tập con.
- Nếu tổng các phần tử của tập con của A_{18} chia 3 dư 2 thì ta thêm $\{1\}$ vào tập con.

Do đó nếu gọi c_{18} là số tập con của A_{18} và chia hết cho 3 thì số tập con của A thỏa yêu cầu bài toán là $2^{18} + c_{18}$.

Tương tự lấy thêm một phần tử của A_1 và một phần tử của A_2 ta được

$$c_{18} = 2^{16} + c_{16} = \dots = 2^{16} + 2^{14} + 2^{12} + \dots + 2^6 + c_6.$$

Khi đó chỉ còn lại sáu phần tử của A_3 , mà tất cả tập con của A_3 đều có tổng các phần tử chia hết cho 3 nên $c_6 = 2^6$.

Suy ra số tập con của A có tổng các phần tử chia hết cho 3 là

$$2^{18} + 2^{16} + 2^{14} + 2^{12} + \dots + 2^6 + 2^6 = \frac{2^{20} + 2^7}{3}.$$

Cách 2. Gọi ζ là căn bậc ba của đơn vị thì

$$\zeta^3 = 1 \text{ và } x^3 - 1 = (x - \zeta)(x - \zeta^2)(x - \zeta^3).$$

Xét

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \zeta)(x - \zeta^2) \dots (x - \zeta^{20}) \\ &= [(x - \zeta)(x - \zeta^2)(x - \zeta^3)]^6 (x - \zeta)(x - \zeta^2) \\ &= (x^3 - 1)^6 (x^2 + x + 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Khi đó

$$P(-1) = (1 + \zeta)(1 + \zeta^2) \dots (1 + \zeta^{20}) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2.$$

trong đó, ta chứng minh được c_0, c_1, c_2 là số tập con của A có tổng các chữ số lần lượt chia hết cho 3, chia 3 dư 1, chia 3 dư 2. Yêu cầu bài toán là tính a_0 .

Ta có $c_0 + c_1 + c_2 =$ số tập con của $A = 2^{20}$. Mặt khác theo (1) thì

$$P(-1) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 = 2^6.$$

Suy ra

$$c_0 + (2^{20} - c_0 - c_2) \zeta - c_2 (1 + \zeta) = 2^6,$$

tương đương

$$c_0 - c_2 - 2^6 + (2^{20} - c_0 - 2c_2) \zeta = 0,$$

hay

$$\begin{cases} c_0 - c_2 = 2^6 \\ c_0 + 2c_2 = 2^{20} \end{cases} \Rightarrow c_0 = \frac{2^{20} + 2^7}{3}.$$

Cách 3. Đặt a_n, b_n, c_n là số tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ có tổng các phần tử lần lượt chia hết cho 3, chia 3 dư 1, chia 3 dư 2. Yêu cầu bài toán là tính a_{20} .

Dễ dàng tính được $a_2 = 2, b_2 = c_2 = 1$

Từ một tập con X của tập $\{1, 2, \dots, 3n - 1\}$, ta xây dựng tập con của tập $\{1, 2, \dots, 3n + 2\}$ có tổng các phần tử chia hết cho 3.

- Nếu tổng các phần tử của X chia hết cho 3 thì ta có thể thêm vào X các tập

$$\emptyset, \{3n\}, \{3n + 1, 3n + 2\}, \{3n, 3n + 1, 3n + 2\}.$$

- Nếu tổng các phần tử của X chia 3 dư 1 thì ta có thể thêm vào X các tập

$$\{3n + 2\}, \{3n, 3n + 2\}.$$

- Nếu tổng các phần tử của X chia 3 dư 2 thì ta có thể thêm vào X các tập

$$\{3n + 1\}, \{3n, 3n + 1\}.$$

Suy ra $a_{3n+2} = 4a_{3n-1} + 2b_{3n-1} + 2c_{3n-1}$. Tương tự cho b_{3n+2}, c_{3n+2} , ta xây dựng được quan hệ truy hồi

$$\begin{cases} a_{3n+2} = 4a_{3n-1} + 2b_{3n-1} + 2c_{3n-1} \\ b_{3n+2} = 2a_{3n-1} + 4b_{3n-1} + 2c_{3n-1} \\ c_{3n+2} = 2a_{3n-1} + 2b_{3n-1} + 4c_{3n-1} \end{cases}$$

Suy ra

$$a_{3n+5} = 10a_{3n+2} - 16b_{3n-1} \Rightarrow a_{3n+2} = \frac{2^{3n+2} + 2^{n+1}}{3}.$$

Từ đó tính được $a_{20} = \frac{2^{20} + 2^7}{3}$. □

Bài toán 3. Tô màu trong 10 ô vuông bằng bốn màu xanh, đỏ, tím, vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tô sao cho 5 ô liên tiếp được tô đủ bốn màu.

Gợi ý. Mọi cách tô đều được xác định nếu biết dãy lặp và màu của 5 ô đầu tiên.

HÀM TỔNG CÁC CHỮ SỐ

Lưu Bá Thắng
(Đại học Sư phạm, Hà Nội)

1. Giới thiệu về hàm tổng các chữ số

1.1. Định nghĩa

Cho số tự nhiên $n = \overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_i}$. Khi đó

$$S(n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$$

là hàm tổng các chữ số của n viết trong hệ cơ số 10.

Nếu $n = \overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_i}$ viết trong hệ cơ số p thì

$$S_p(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i.$$

Khi đó

$$n = a_1 p^{i-1} + a_2 p^{i-2} + \cdots + a_{i-1} p + a_i.$$

Chú ý rằng nếu n là số nguyên dương thì $a_1 > 0$.

1.2. Tính chất

Sau đây là một số tính chất của hàm tổng các chữ số.

- Với mọi $a, b \in \mathbb{N}$ thì

$$S(a + b) \leq S(a) + S(b).$$

Chứng minh. Ta có

$$S(a) + S(b) - S(a + b) = 9 \cdot (\text{số các phép nhớ khi cộng hai số } a \text{ và } b).$$

- Tương tự, ta cũng có

$$S_p(a) + S_p(b) - S_p(a + b) = (p-1) \cdot (\text{số các phép nhớ khi cộng } a \text{ và } b \text{ trong hệ cơ số } p).$$

Từ đó suy ra

$$S_p(a + b) \leq S_p(a) + S_p(b).$$

- $S(ab) \leq \min(aS(b), bS(a))$.

Chứng minh. Ta có

$$ab = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{b \text{ lần}} = \underbrace{b + b + b + \cdots + b}_{a \text{ lần}}.$$

Áp dụng (1), ta suy ra điều phải chứng minh.

Định lý 1. Với mọi số nguyên dương a, b thì $S(ab) \leq S(a)S(b)$ và $S(ab) = S(10^t ab)$.

2. Các bài toán về hàm tổng các chữ số

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì

$$S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n).$$

Lời giải. Ta có

$$S(n) = S(10n) = S(2n + 2n + 2n + 2n + 2n) \leq 5S(2n).$$

Suy ra

$$\frac{1}{5} \leq \frac{S(2n)}{S(n)} \leq 2.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 2. (Phân Lan 2014) Tìm tất cả $q \in \mathbb{Q}$ sao cho tồn tại n nguyên dương thỏa mãn

$$S(2n) = qS(n).$$

Lời giải. Từ bài 1 ta suy ra $\frac{1}{5} \leq q \leq 2$. Ta sẽ chứng minh với mọi $q \in [\frac{1}{5}; 2] \cap \mathbb{Q}$ thì tồn tại n nguyên dương thỏa $\frac{S(2n)}{S(n)} = q = \frac{r}{s}$.

Xét

$$n = \underbrace{55 \cdots 5}_a \underbrace{11 \cdots 1}_b.$$

Khi đó

$$2n = \underbrace{11 \cdots 10}_a \underbrace{22 \cdots 2}_b.$$

Suy ra

$$S(n) = 5a + b \quad \text{và} \quad S(2n) = a + 2b.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{a + 2b}{5a + b} = \frac{r}{s}.$$

Điều này tương đương với

$$s(a + 2b) = r(5a + b),$$

tức là

$$(5r - s)a = (2s - r)b.$$

Chọn $a = 2s - r$ và $b = 5r - s$, ta được số nguyên dương n thoả đề bài.

Vậy $q \in \left[\frac{1}{5}; 2\right] \cap \mathbb{Q}$. □

Câu hỏi. $\frac{S(n)}{S(3n)}$ có thể nhận những giá trị nào?

Ta có

$$S(3n) \leq 3S(n), \quad \text{suy ra} \quad \frac{S(n)}{S(3n)} \geq \frac{1}{3}.$$

Chọn $n = \underbrace{33 \cdots 3}_a 4111$, thế thì $S(3n) = 12$, $S(n) = 7 + 3a$. Do đó $\frac{S(n)}{S(3n)} = \frac{7+3a}{12} \rightarrow +\infty$.

Bài toán 3. *Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho $S(n) = 1996S(3n)$?*

Lời giải. Chọn

$$n = \underbrace{33 \cdots 3}_\text{5986 số 3} 6$$

thì n thoả yêu cầu đề bài. □

Câu hỏi. Nếu thay yêu cầu của bài toán thành $S(n) = 2016S(3n)$ thì có tồn tại n hay không?

Bài toán 4. (Argentina 2012) *Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho*

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = \cdots = S(2012n).$$

Lời giải. Ta giải bài toán thông qua bổ đề và một số nhận xét sau.

Bổ đề 1. Với mọi x nguyên dương thoả $1 \leq x \leq 10^n - 1$ (n là số nguyên dương) thì

$$S(x(10^n - 1)) = 9n.$$

Nhận xét 1. $S(n) = S(9n)$ và $S(9n)$ chia hết cho 9, suy ra $9 \mid n$.

Nhận xét 2. n có ít nhất 4 chữ số.

Thật vậy, giả sử $n = \overline{abc}$, trong đó a, b, c không đồng thời bằng 0. Ta có

$$1001n = \overline{abcabc}, \quad \text{suy ra} \quad S(1001n) = 2S(n) \quad (\text{vô lý}).$$

Khi n có 4 chữ số, giả sử $n = \overline{abcd}$ ($a \neq 0$). Xét phép nhân n với 1001:

$$1001 \times n = \overline{abcd000} + \overline{abcd}.$$

Nếu $a + d < 10$, ta có $S(1001n) = 2S(n)$ (vô lý). Do đó $a + d \geq 10$.

Nếu $c < 9$ thì $S(1001n) - S(n) \geq b + c + 1 > 0$ (vô lý).

Tương tự, nếu $b < 9$ hoặc $a < 9$ cũng suy ra $S(1001n) > S(n)$, mâu thuẫn với đề bài.

Vậy $a = b = c = 9$, khi đó $n = \overline{999d}$ chia hết cho 9, mà $9 + d \geq 10$ nên $d = 9$.

Thử lại với $n = 9999$, theo bổ đề ta có

$$S(n) = S(2n) = S(3n) = \dots = S(2012n) = 36.$$

Vậy $n = 9999$ là số nhỏ nhất thỏa mãn đề bài. □

Bài toán 5. (USAMO 1992) Tính

$$S(9 \times 99 \times 9999 \times \dots \times \underbrace{999 \dots 9}_{2^n \text{ số } 9}).$$

Lời giải. Áp dụng bổ đề của bài 4, suy ra

$$S(9 \times 99 \times 9999 \times \dots \times \underbrace{999 \dots 9}_{2^n \text{ số } 9}) = 9 \cdot 2^n.$$

□

Bài toán 6.

(a) (IMO SL 1998) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì tồn tại số k có n chữ số sao cho $S(k) \mid k$.

(b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương k sao cho k không chứa chữ số 0 nào và $S(k) \mid k$.

Lời giải. (a) Nếu $n = 3^l$, chọn $k = \underbrace{111 \dots 111}_{3^l}$ thì $S(k) \mid k$.

Nếu $n \neq 3^l$ tồn tại s' sao cho $3^{s'} < n < 3^{s'+1}$. Xét

$$A = \underbrace{aaa \dots a}_s b \times (10^t - 1),$$

trong đó $a, b \neq 0$, $b \neq 1$ và $a \neq 9$ thỏa mãn

$$\underbrace{aa \dots a}_s b < 10^t - 1. \quad (*)$$

Số các chữ số của A là $s + t + 1$ và $S(A) = 9t$. Ta cần chọn s, t sao cho

$$\begin{cases} s + t + 1 = n \\ 9t \mid A \end{cases}, \quad \text{tức là} \quad \begin{cases} s + t = n - 1 \\ 9t \mid A \end{cases}.$$

Chọn $t = 3^{s'}$, $s = n - 1 - 3^{s'} \geq 0$. Khi đó

$$9t = 3^{s'+2} \mid 10^{3^{s'}} - 1, \quad \text{suy ra} \quad 9t \mid A,$$

hơn nữa $s + 1 < t$ nên (*) được thỏa mãn.

(b) Giả sử có hữu hạn số k không chứa số 0 nào thỏa mãn đề bài. Gọi số k lớn nhất thỏa mãn $S(k) \mid k$ là $\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}$.

Ta xét

$$k' = \overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}.$$

Có $S(k') = 3S(k)$ và $3k \mid k'$, nên k không là số lớn nhất, vô lý. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

SỐ PHỨC VÀ SỐ HỌC

Nguyễn Song Minh

1. Vành số nguyên Gauss

Định nghĩa 1.

1. Vành số nguyên Gauss, ký hiệu là $\mathbb{Z}[i]$, là tập hợp tất cả các số phức có dạng $a + bi$ với $a, b \in \mathbb{Z}$.
2. Trên vành số nguyên Gauss, ta trang bị hàm chuẩn $N(x)$ được xác định như sau: Nếu $x = a + bi$ thì $N(x) = |x|^2 = a^2 + b^2$.
3. Với $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$, ta nói $\beta \mid \alpha$ nếu tồn tại $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ sao cho $\alpha = \beta\gamma$. Từ đây suy ra nếu $\beta \mid \alpha$ thì $N(\beta) \mid N(\alpha)$.
4. Trong $\mathbb{Z}[i]$, γ được gọi là ước chung của α, β nếu $\gamma \mid \alpha$ và $\gamma \mid \beta$. Hơn nữa, γ là ước chung lớn nhất của α và β nếu và chỉ nếu γ là ước chung có chuẩn lớn nhất.

Ví dụ 1. Xét 4 và $2i$. Có $N(4) = 16, N(2i) = 4$. Các ước chung lớn nhất của chúng là $2, -2, 2i, -2i$. Như vậy trong $\mathbb{Z}[i]$ ước chung lớn nhất có thể không là duy nhất, nhưng tất cả ước chung lớn nhất đôi một liên kết với nhau, tức là nếu γ_1 và γ_2 là ước chung lớn nhất của α và β thì $N(\gamma_1) = N(\gamma_2)$.

5. Số $\rho \in \mathbb{Z}[i]$ được gọi là số nguyên tố phức khi và chỉ khi nếu $\rho \mid \alpha\beta$ thì $\rho \mid \alpha$ hoặc $\rho \mid \beta$.

Chú ý. Số nguyên tố trong $\mathbb{Z}$ có thể không là số nguyên tố phức. Chẳng hạn như có $2 = (1 + i)(1 - i)$ nhưng $2 \nmid 1 + i$ và $2 \nmid 1 - i$.

Bài toán 1. Tìm tất cả số nguyên tố trong $\mathbb{Z}$ mà cũng đồng thời là số nguyên tố phức.

Lời giải. Ta xét hai trường hợp sau:

- Nếu $p = 4k + 1$ thì tồn tại $p = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ nhưng $p \nmid a + ib$ nên p không là số nguyên tố phức.
 - Nếu $p = 4k + 3$ và giả sử $p = (a + ib)(c + id)$ thì $p^2 \mid a^2 + b^2$ và $p^2 \mid c^2 + d^2$. Do p có dạng $4k + 3$ nên p là ước của a, b, c, d . Suy ra p là số nguyên tố phức.
- Vậy với $p = 4k + 3$ thì p là số nguyên tố phức.

□

2. Các tính chất số học cơ bản

Tính chất. Nếu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ và $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ thỏa mãn α, β nguyên tố cùng nhau và $\alpha\beta = \gamma^n, n \geq 2$ thì tồn tại u, v sao cho $\alpha = eu^n, \beta = e'v^n$ với e, e' là đơn vị.

Bài toán 2. Tìm tất cả số nguyên dương a, b, c sao cho a^2, b^2, c^2 là một cặp số cộng.

Lời giải. Ta có $(a+ic)(a-ic) = 2b^2 = (1+i)(1-i)b^2$. Ta có thể coi a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau. Giả sử $1+i \mid a+ic$, suy ra $a+ic = (1+i)(u+iv)$, suy ra $a-ic = (1-i)(a-ic)$. Từ đó suy ra $b^2 = u^2 + v^2$. $\square$

Bài toán 3. Cho p là số nguyên tố dạng $4k-1$ và x, y, z nguyên dương thỏa $(x, y) = 1$ và $x^2 + y^2 = z^{4k}$. Chứng minh rằng $p \mid xy$.

Lời giải. Ta có $(x+iy)(x-iy) = z^{2p}$. Gọi d là ước chung lớn nhất của $x+iy, x-iy$. Nếu $2 \mid N(d)$ thì z chẵn, suy ra $4 \mid x^2 + y^2$, vô lý vì $(x, y) = 1$. Ngoài ra, d là ước của $2x$ và $2iy$, mà d lẻ nên $d \mid x$ và $d \mid y$, suy ra $N(d) = 1$. Từ đó suy ra $(x+iy, x-iy) = 1$.

Theo tính chất trên, suy ra $x+iy = u(a+ib)^{2p}$ với u là đơn vị, đồng thời

$$x-iy = \bar{u}(a-ib)^{2p}.$$

Ta có

$$(x+iy)^2 - (x-iy)^2 = 4xy = u^2 \left[(a+ib)^{4k} - (a-ib)^{4k} \right] = y^2 \left[(a+ib)^{p+1} - (a-ib)^{p+1} \right].$$

Ta có

$$(a+ib)^p \equiv a^p + (ib)^p \equiv a^p - ib^p \equiv a - ib \pmod{p}.$$

Tương tự

$$(a-ib)^p \equiv a^p + ib^p \equiv a + ib \pmod{p}.$$

Từ đó $p \mid (a+ib)^{p+1} - (a-ib)^{p+1}$. Suy ra $p \mid 4xy$, mà p lẻ nên $p \mid xy$. $\square$

Bài toán 4. Giải phương trình nghiệm nguyên dương $x^p = y^2 + 1$ với p là số nguyên tố lẻ.

Lời giải. Ta có $(y+i)(y-i) = x^p$. Do $(y+i, y-i) = 1$ nên $y+i = u(a+ib)^p$, và $y-i = \bar{u}(a-ib)^p$. Không mất tổng quát, giả sử $u = 1$. Ta có

$$2i = 2 \sum_{0 \leq 2k+1 \leq p} \binom{p}{2k+1} (ib)^{2k+1} a^{p-2k-1}.$$

Suy ra

$$1 = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq p} \binom{p}{2k+1} b^{2k+1} (-1)^k a^{p-2k-1}.$$

Do về phải chia hết cho b nên $b \mid 1$. Ta có

$$\pm 1 = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq p} \binom{p}{2k+1} (-1)^k a^{p-2k-1}.$$

Nếu $\pm 1 \neq (-1)^{\frac{p+1}{2}}$ thì

$$\pm 2 = \sum_{0 \leq 2k+1 < p} \binom{p}{2k+1} (-1)^k a^{p-2k-1}$$

chia hết cho p , vô lý. Ngược lại, ta có

$$0 = C_p^2 + C_p^4 a^2 + \dots + C_p^{2k} a^{2k-2}.$$

Suy ra $a^2 + b^2 = 2$ với a chẵn. Giả sử $v_2\left(\binom{p}{2}\right) = q$ thì

$$\binom{p}{2t} a^{2t-2} = \binom{p-2}{2t-2} \frac{a^{2k-2}}{t(2t-1)}.$$

Vì a chẵn nên $v_2(a^{2t-2}) \geq 2t-2 \geq t > v_2(t)$. Suy ra $v_2(C_p^{2t} a^{2t-2}) \geq q+1$. Do đó 0 chia hết cho 2^q nhưng không chia hết cho 2^{q+1} , vô lý. $\square$

3. Một số bài tập

Sau đây là một số bài tập để rèn luyện.

Bài tập 1.

- (a) Tìm n sao cho có thể viết n dưới dạng $n = a^2 + b^2$.
- (b) Nếu tồn tại a, b sao cho $a^2 + b^2 = n$ thì phương trình $a^2 + b^2 = n$ có bao nhiêu nghiệm?

Bài tập 2.

- (a) Chứng minh rằng $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ cũng có những tính chất giống như $\mathbb{Z}[i]$.
- (b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^3 = y^2 + 2$.

Bài tập 3.

- (a) Chứng minh $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ cũng có những tính chất giống với $\mathbb{Z}[i]$.
- (b) Giải phương trình $x^2 + 7y^2 = 2^n$ với n nguyên dương.

Bài tập 4. Với $D < 0$ không là số chính phương, ký hiệu $N(a + b\sqrt{D}) = a^2 + Db^2$. Chứng minh rằng chỉ có $D \in \{-2, -3, -7, -11\}$ là làm cho $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ có tính chất giống với $\mathbb{Z}[i]$.

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Võ Quốc Bá Cẩn
(Archimedes Academy, Hà Nội)

1. Phương pháp dồn biến

Bài toán 1. Với a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2).$$

Lời giải. Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ ta chỉ cần xét $b \geq a$. Đặt

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2 - c^2} \\ y = \sqrt{b^2 - c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{x^2 + c^2} \\ b = \sqrt{y^2 + c^2} \end{cases}$$

khi đó

$$\sqrt{5} = a + b + c = \sqrt{x^2 + c^2} + \sqrt{y^2 + c^2} + c \geq x + y,$$

và

$$P \leq x^2 y^2 (y^2 - x^2).$$

Chú ý rằng $4xy + (x - y)^2 = (x + y)^2$. Từ đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} P^2 &\leq (x + y)^2 \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot xy \cdot (x - y)^2 \\ &\leq (x + y)^2 \left[\frac{4xy + (x - y)^2}{5} \right]^5 \\ &= \frac{(x + y)^{12}}{3125} \leq 5. \end{aligned}$$

Do đó $P \leq \sqrt{5}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}, 0 \right)$. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $\sqrt{5}$. $\square$

Bài toán 2. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, đặt $a = c + x$, $b = c + y$ với $x, y \geq 0$, khi đó $\sqrt{5} = a + b + c = x + y + 3c \geq x + y$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 \\ &= (c+x)y^3 - (c+y)x^3 + c(x-y)^3 \\ &= c(y^3 - x^3) + xy(y^2 - x^2) + c(x^3 - y^3) - 3cxy(x-y) \\ &= xy(y-x)(y+x+3c) \\ &= \sqrt{5}xy(y-x). \end{aligned}$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned} P^2 &= 5(xy)^2(y-x)^2 = \frac{5}{4} \cdot 2xy \cdot 2xy \cdot (x^2 - 2xy + y^2) \\ &\leq \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{27} (x^2 + 2xy + y^2)^3 \\ &= \frac{5}{108} (x+y)^6 \\ &\leq \frac{625}{108}. \end{aligned}$$

Do đó giá trị lớn nhất của P là $\frac{25\sqrt{3}}{18}$, đạt được khi $(a, b, c) = \left(\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{15}}{6}, \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{15}}{6}, 0\right)$ cùng các hoán vị vòng quanh tương ứng. $\square$

Bài toán 3. Với a, b, c là ba số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$a(b-c)^4 + b(c-a)^4 + c(a-b)^4.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $c \leq a \leq b$, đặt

$$f(a, b, c) = a(b-c)^4 + b(c-a)^4 + c(a-b)^4.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a+c, b, 0) &= a(b-c)^4 + b(c-a)^4 + c(a-b)^4 - (a+c)b^4 - b(c+a)^4 \\ &= a[(b-c)^4 - b^4] + b[(a-c)^4 - (a+c)^4] + c[(b-a)^4 - b^4] \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Đặt $a' = a + c$ thì $a' + b = a + b + c = \sqrt{5}$ và

$$\begin{aligned} P &\leq f(a', b, 0) = a'b^4 + ba'^4 = \sqrt{5}a'b(a'^2 - a'b + b^2) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot 3a'b(a'^2 - a'b + b^2) \leq \frac{\sqrt{5}}{12} \cdot (a'^2 + 2a'b + b^2)^2 \\ &= \frac{25\sqrt{5}}{12}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{25\sqrt{5}}{12}$, xảy ra khi $(a, b, c) = \left(\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{15}}{6}, \frac{3\sqrt{5}+\sqrt{15}}{6}, 0\right)$ cùng các hoán vị tương ứng. $\square$

Bài toán 4. Cho a, b, c thuộc $[0, 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c).$$

Lời giải. Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ khi đó ta chỉ cần xét trường hợp $a \leq b$. Khi đó

$$P = (b - a)(b - c)(a - c)(a + b + c).$$

Dễ thấy bất đẳng thức lúc này lớn nhất khi b lớn nhất, tức $b = 1$. Vậy

$$\begin{aligned} P &= (1 - a)(1 - c)(1 - c)(a + b + c) \\ &= (1 - a)(1 - c)[(a - c) + (a^2 - c^2)] \\ &\leq (1 - a)(a + a^2) \\ &= a(1 - a^2). \end{aligned}$$

Đến đây công việc còn lại là khảo sát hàm số $f(a) = a(1 - a^2)$ với $a \in [0, 1]$ hoặc dùng bất đẳng thức có trọng số.

Kết luận $P_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ đạt được khi $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $b = 1$ và $c = 0$. □

2. Phương pháp quy nạp

Bài toán 5. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^n(x^{n+1} + 1)}{x^n + 1} \leq \left(\frac{x + 1}{2}\right)^{2n+1}.$$

(Việt Nam MO 2011)

Lời giải. Với $n = 1$ bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x(x^2 + 1)}{x + 1} \leq \left(\frac{x + 1}{2}\right)^3,$$

hay là

$$(x + 1)^4 \geq 8x(x^2 + 1).$$

Hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh đúng đến $n = k \geq 1$ ta cần chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, hay

$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2} + 1)}{x^{k+1} + 1} \leq \left(\frac{x + 1}{2}\right)^{2k+3}.$$

Mà theo giả thiết quy nạp thì

$$\left(\frac{x + 1}{2}\right)^{2k+1} \geq \frac{x^k(x^{k+1} + 1)}{x^k + 1}.$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \frac{x^k (x^{k+1} + 1)}{x^k + 1} \geq \frac{x^{k+1} (x^{k+2} + 1)}{x^{k+1} + 1},$$

$$(x+1)^2 (x^{k+1} + 1)^2 \geq 4x (x^{k+2} + 1) (x^k + 1).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\begin{aligned} (x+1)^2 (x^{k+1} + 1)^2 &= (x^{k+2} + 1 + x^{k+1} + x)^2 \\ &\geq 4 (x^{k+2} + 1) (x^{k+1} + x) \\ &= 4x (x^{k+2} + 1) (x^k + 1). \end{aligned}$$

Nên bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng với $n = k + 1$, theo nguyên lý quy nạp bài toán được chứng minh. $\square$

Bài toán 6. Cho dãy (a_n) : $a_{m+n} \leq a_m + a_n$, $\forall m, n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(APMO 1999)

Lời giải. Nếu $n = 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên.

Giả sử đúng với mọi $k \leq n$. Ta chứng minh nó đúng với mọi

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} \geq a_{n+1}.$$

Ta có đánh giá

$$\begin{aligned} a_1 &\geq a_1, \\ a_1 + \frac{a_2}{2} &\geq a_2, \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} &\geq a_3, \\ &\dots \\ a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} &\geq a_n, \end{aligned}$$

Do đó

$$na_1 + \frac{(n-1)a_2}{2} + \frac{(n-1)a_2}{2} + \frac{(n-2)a_3}{3} + \frac{a_n}{n} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

hay là

$$(n+1) \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \right) \geq 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Chú ý rằng $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ nên

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq n \cdot a_{n+1}.$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 7. Cho n số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

(Romania TST 1999)

Lời giải. Trường hợp $n = 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng trong trường hợp n số ta sẽ chứng minh nó cũng đúng trong trường hợp $n + 1$, tức chứng minh

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 \geq \frac{2n+3}{3}(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}).$$

Theo giả thiết quy nạp thì

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

nên ta cần phải chứng minh

$$\frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1}^2 \geq \frac{2n+3}{3}(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}),$$

thu gọn thành

$$3a_{n+1}^2 \geq 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (2n+3)a_{n+1}. \quad (1)$$

Giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1}$ khi đó

$$a_2 - a_1 \geq 1, a_3 - a_2 \geq 1, \dots, a_{n+1} - a_n \geq 1.$$

Do đó với mọi $1 \leq i \leq n$, ta có

$$a_{n+1} - a_i = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_{i+1} - a_i) \geq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-i+1} = n - i + 1.$$

Tức $a_i \leq a_{n+1} + i - n - 1, \forall 1 \leq i \leq n$. Dẫn đến

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq na_{n+1} - n(n+1) + \sum_{i=1}^n i = na_{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Như vậy để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh

$$3a_{n+1}^2 \geq 2 \left[na_{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} \right] + (2n+3)a_{n+1},$$

hay là

$$3a_{n+1}^2 - (4n+3)a_{n+1} + n(n+1) \geq 0,$$

hoặc

$$(a_{n+1} - n - 1)(3a_{n+1} - a_n) \geq 0.$$

Hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh. □

3. Về bài toán số 5 của IMO 2016

Bài toán 8. Cho đồng nhất thức

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016).$$

Xóa đi k nhân tử bậc nhất từ hai bên của đồng nhất thức này, để sao cho mỗi bên còn ít nhất 1 nhân tử, và được một phương trình không có nghiệm thực. Hỏi số k nhỏ nhất để làm được như vậy là bao nhiêu?

(IMO 2016)

Lời giải. Dễ thấy là $k \geq 2016$, vì nếu chẳng hạn để lại $x-1$ ở bên trái thì phải xóa nó đi ở bên phải, nếu không sẽ có nghiệm $x=1$, ta chứng minh $k=2016$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Khi $k=2016$, ta xóa các nhân tử có dạng $x-4k-2$ và $x-4k-3$ ở vế trái, đồng thời xóa các nhân tử có dạng $x-4k-1$ và $x-4k-4$ ở vế phải, khi đó phương trình thu được là

$$\begin{aligned} (x-1)(x-4)\cdots(x-4t-1)(x-4t-4)\cdots(x-2016) \\ = (x-2)(x-3)\cdots(x-4t-2)(x-4t-3)\cdots(x-2015). \end{aligned} \quad (2)$$

Ta chứng minh phương trình trên không có nghiệm thực, hay chứng minh với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{aligned} (x-1)(x-4)\cdots(x-4t-1)(x-4t-4)\cdots(x-2016) \\ < (x-2)(x-3)\cdots(x-4t-2)(x-4t-3)\cdots(x-2015) \end{aligned} \quad (3)$$

Thật vậy với $x \geq 2016$ hoặc $x \leq 1$ thì ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x-1)(x-4) < (x-2)(x-5), \\ 0 &\leq (x-5)(x-8) < (x-6)(x-7), \\ &\dots \\ 0 &\leq (x-4t-1)(x-4t-4) < (x-4t-2)(x-4t-3), \\ &\dots \\ 0 &\leq (x-2013)(x-2016) < (x-2014)(x-2015). \end{aligned}$$

Nhân tương ứng các bất đẳng thức trên lại thì ta được (3).

Với $1 < x < 2016$ thì

- Nếu $x \in [4t, 4t+1]$ ta viết (3) lại thành

$$\begin{aligned} (x-1)(x-4)\cdots(x-4t)(4t+1-x)(4t+4-x)\cdots(2016-x) \\ < (x-2)(x-3)\cdots(x-4t+1)(4t+2-x)(4t+3-x)\cdots(2015-x). \end{aligned}$$

Tương tự như trên thì

$$0 \leq (x-1)(x-4) < (x-2)(x-5),$$

...

$$0 \leq (x-4t+3)(x-4t) < (x-4t+2)(x-4t+1),$$

$$0 \leq (4t+1-x)(4t+4-x) < (4t+2-x)(4t+3-x),$$

...

$$0 \leq (2013-x)(2016-x) < (2014-x)(2015-x).$$

Nhân các bất đẳng thức trên về theo về ta thu được điều cần chứng minh.

- Nếu $x \in [4t+1, 4t+2]$ ta viết (3) lại thành

$$\begin{aligned} & -(x-1)(x-4) \cdots (x-4t-1)(4t+4-x) \cdots (2016-x) \\ & < (x-2)(x-3) \cdots (x-4t+1)(4t+2-x)(4t+3-x) \cdots (2015-x). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng do vế trái không dương còn vế phải không âm và đẳng thức không thể xảy ra.

- Nếu $x \in [4t+2, 4t+3]$ ta viết lại (3) dưới dạng

$$\begin{aligned} & (x-1)(x-4) \cdots (x-4t-1)(4t+4-x) \cdots (2016-x) \\ & > (x-2)(x-3) \cdots (x-4t-2)(4t+3-x) \cdots (2015-x). \end{aligned}$$

Trong trường hợp này, ta hiển nhiên đã có $x \geq 2$, do đó ta lần lượt có các bất đẳng thức sau

$$x-1 > x-2 \geq 0,$$

$$(x-4)(x-5) > (x-3)(x-6) \geq 0,$$

...

$$(x-4t)(x-4t-1) > (x-4t+1)(x-4t-2) \geq 0,$$

$$(4t+4-x)(4t+5-x) > (4t+3-x)(4t+6-x) \geq 0,$$

...

$$2016-x > 2015-x \geq 0.$$

Nhân các bất đẳng thức trên lại ta thu được điều cần chứng minh.

- Với $x \in [4t+3, 4t+4]$ ta viết (3) lại thành

$$\begin{aligned} & -(x-1)(x-4) \cdots (x-4t-1)(4t+4-x) \cdots (2016-x) \\ & < (x-2)(x-3) \cdots (x-4t-2)(x-4t-3)(4t+5-x) \cdots (2015-x). \end{aligned}$$

Tương tự trường hợp $x \in [4t+1, 4t+2]$ thì bất đẳng thức này đúng do vế trái không dương còn vế phải không âm và đẳng thức không thể xảy ra.

Do đó với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta đều có (3) đúng, suy ra phương trình (2) vô nghiệm thực. Vậy $k = 2016$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. $\square$

SỬ DỤNG TÍNH TOÀN ÁNH TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Võ Quốc Bá Cẩn
(Archimedes Academy, Hà Nội)

1. Bài giảng

Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm f thoả mãn, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Lời giải. Trong (1), thay x bởi $f(y)$, ta có

$$f(0) = 2f(f(y)) + f^2(y) - 1, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra

$$f(f(y)) = -\frac{1}{2}f^2(y) + \frac{a+1}{2}, \forall y \in \mathbb{R},$$

trong đó $a = f(0)$.

Thay x bởi $f(x)$ trong (1), ta được

$$\begin{aligned} f[f(x) - f(y)] &= f(f(x)) + f(f(y)) + f(x)f(y) - 1 \\ &= a - \frac{1}{2}[f(x) - f(y)]^2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ta đang cần chứng minh $f(x) - f(y)$ nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1. $f(y) = 0 \forall y \in \mathbb{R}$ không thoả mãn đề bài.

Trường hợp 2. Tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y_0) \neq 0$.

Cho $y = y_0$ ta có

$$f(x - f(y_0)) - f(x) = xf(y_0) + f(f(y_0)) - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vế phải nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ vì thế $f(x) - f(y)$ cũng vậy. Đặt $t = f(x) - f(y)$, suy ra t nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ và $f(t) = a - \frac{1}{2}t^2$. Thử lại tìm được $a = 1$.

Vậy hàm cần tìm là $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. □

Nhận xét. Một số lưu ý khi giải phương trình hàm có chứa $f(f(x))$:

- Thường những biểu thức tự do như $x, y, \dots$ dễ xử lý hơn.
- $f(f(y))$ khá phức tạp nên cần được thay thế bởi một biểu thức dễ dùng hơn.
- Có thể thay tùy ý x bằng một giá trị thuộc tập xác định, nhưng không được thay như vậy với $f(x)$, trừ khi f toàn ánh.
- Luôn phải thử lại kết quả tìm được.

Bài toán 2. Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và

$$f(x + f(y)) = f^2(y) + 2xf(y) + f(-x), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Lời giải. Ta có $f(y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ là một nghiệm hàm.

Xét trường hợp tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(y_0) \neq 0$. Thay y bởi y_0 trong (2), ta được

$$f(x + f(y_0)) = f^2(y_0) + 2xf(y_0) + f(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hay ta suy ra

$$f(x + f(y_0)) - f(-x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } a \neq 0. \quad (3)$$

Vế phải của (3) nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$, do đó $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \alpha, \beta: x = f(\alpha) - f(\beta)$.

Thay x bởi $-f(y)$ trong (3), ta được

$$f(0) = f^2(y) - 2f^2(y) + f(f(y)), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(f(y)) = f^2(y) + a, \forall y \in \mathbb{R}$, với $a = f(0)$.

Thay x bởi $-f(x)$ trong (2), ta có

$$f[f(y) - f(x)] = [f(y) - f(x)]^2 + a, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do $f(x) - f(y)$ nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}$ nên suy ra

$$f(x) = x^2 + a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại ta thấy hàm $f(x) = x^2 + a, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa với mọi số thực a . □

Bài toán 3. Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Lời giải. Với cùng ý tưởng trên, trong (4), thay y bởi $f(x)$, ta được

$$f[2f(x)] = f(0) + 4f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Đặt $a = f(0)$. Để sử dụng $f[2f(x)]$, ta thay y bởi $2f(y) - f(x)$ trong (4) để thu được

$$f(2f(y)) = f[2f(x) - 2f(y)] + 8f(x)f(y) - 4f^2(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra

$$f[2f(x) - 2f(y)] = [2f(x) - 2f(y)]^2 + a, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Đến đây ta thực hiện các bước quen thuộc như hai bài trên.

Kết luận nghiệm của bài toán $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x^2 + a, \forall x \in \mathbb{R} (a \in \mathbb{R})$. $\square$

Bài toán 4. Tìm tất cả các hàm f thoả mãn, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và

$$f(2f(x) + y) = x + f(2f(y) - x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Lời giải. Trong (6), thay y bởi $-2f(x)$, ta được

$$f(0) = x + f(2f(-2f(x)) - x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó f toàn ánh, suy ra $\exists c \in \mathbb{R}$ sao cho: $f(c) = 0$.

Trong (6), thay x bởi c , ta có

$$f(y + 2f(c)) = c + 2f(2f(y) + c), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $f(y) - c = f(2f(y) - c)$. Đặt $t = f(y)$, ta có $f(2t - c) = t - c$.

Trong (6), thay x bởi $2t - c$, suy ra

$$f(x) = \frac{x + c}{2} - c = \frac{x - c}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy hàm số này thoả thoả mãn. Vậy hàm cần tìm là $f(x) = \frac{x-c}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm f thoả mãn $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ và

$$\frac{f(x^2) + f(y^2)}{f^2(z) + f^2(t)} = \frac{x^2 + y^2}{z^2 + t^2}, \quad (7)$$

với mọi $x, y, z, t \in \mathbb{R}^+$ thoả mãn $xy = zt$.

Lời giải. Trong (7), thay $x = y = z = t = 1$, ta được $f(1) = 1$.

Trong (7), thay $y = t = 1$ và $z = x$ ta được

$$\frac{f(x^2) + 1}{f^2(x) + 1} = 1 \Rightarrow f(x^2) = f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Trong (7), thay $x = z^2, t = z, y = 1$ ta được

$$\frac{f(z^4) + 1}{2f(z^2)} = \frac{z^4 + 1}{2z^2} \Rightarrow f^2(z) + \frac{1}{f^2(z)} = z^2 + \frac{1}{z^2}, \forall z \in \mathbb{R}^+. \quad (8)$$

Từ (8), ta suy ra

$$(f(z) - z) \left(f(z) - \frac{1}{z} \right) = 0, \forall z \in \mathbb{R}^+$$

Các hàm $f(z) = z, \forall z \in \mathbb{R}^+$ và $f(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in \mathbb{R}^+$ thỏa yêu cầu đề bài.

Xét trường hợp $\exists \alpha, \beta \neq \pm 1$ mà:

$$f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \frac{1}{\beta}.$$

Thay α, β vào x, y, z, t ta có mâu thuẫn, ta loại trường hợp này.

Vậy các hàm cần tìm là $f(z) = z, \forall z \in \mathbb{R}^+$ và $f(z) = \frac{1}{z}, \forall z \in \mathbb{R}^+$. □

2. Một số bài tập

Bài tập 1. Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và

$$f(f(x - y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 2. Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và

$$f(x - f(y)) = f(x + y^{2002}) + f(f(y) + y^{2002}) + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 3. Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và

$$f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Võ Quốc Bá Cẩn
(Archimedes Academy, Hà Nội)

1. Lời dẫn

Các bài toán phương trình hàm và bất phương trình hàm luôn rất thú vị và lôi cuốn đối với người làm toán. Từ một phương trình nào đó, chỉ bằng một vài phép thế đơn giản, ta có thể tìm được các tính chất đặc biệt của hàm số được cho hoặc thậm chí là công thức tổng quát của hàm. Tuy nhiên, khi đi sâu vào vấn đề này thì việc chỉ dùng phép thế để giải là chưa đủ, đặc biệt là với các bài toán bất phương trình hàm. Do vậy, chúng ta cần có những công cụ khác bổ trợ để tăng cường thêm tính hiệu quả của phương pháp thế. Lúc này, việc sử dụng dãy số và giới hạn một cách linh hoạt sẽ giúp con đường đi trở nên sáng sủa và dễ dàng hơn rất nhiều.

Nhận thấy vai trò rất lớn của dãy số và giới hạn trong các bài toán phương trình, bất phương trình hàm, chúng tôi quyết định thực hiện bài viết này để chia sẻ kinh nghiệm của mình trong cách sử dụng cũng như để được học hỏi và nhận được ý kiến đóng góp từ quý đồng nghiệp gần xa.

2. Sử dụng giới hạn trong các bài toán phương trình, bất phương trình hàm

Dưới đây là một số kỹ thuật sử dụng chặn và kẹp dãy số thường được sử dụng trong giải toán:

- Trong nhiều trường hợp, ta cần tìm công thức tổng quát của hàm số, khi đó một trong các hướng đi mà ta có thể nghĩ đến là thiết lập một bất đẳng thức dạng:

$$a_n \leq f(x) \leq b_n,$$

ở đây (a_n) , (b_n) là hai dãy được chọn sao cho bất đẳng thức trên đúng với mọi n (ứng với mỗi x cố định). Lúc này, nếu $\lim a_n = \lim b_n = L(x)$ thì bằng cách chuyển sang giới hạn, ta sẽ tìm được công thức tổng quát của $f(x)$ là $L(x)$.

- Nếu cần suy xét một tính chất nào đó của $f(x)$, ta có thể thiết lập một bất đẳng thức dạng:

$$A(f) \geq a_n B(f),$$

trong đó $A(f)$, $B(f)$ là hai biểu thức của x và $f(x)$, còn (a_n) là dãy được chọn sao cho bất đẳng thức trên đúng với mọi n (ứng với mỗi x cố định). Lúc này, dựa trên sự hội tụ của a_n , ta có thể đưa ra nhiều kết luận cho $A(f)$ và $B(f)$, từ đó suy ra tính chất của $f(x)$.

Trong nhiều trường hợp, ta có thể thay (a_n) bằng một biểu thức có chứa ẩn y nào đó thay đổi ngoài x cũng được. Lúc này, việc xét giới hạn hàm số theo y có thể cũng sẽ mang lại nhiều tính chất quan trọng để giúp chúng ta hoàn tất lời giải các bài toán.

Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(2x) = 2f(x) \quad (1)$$

và

$$|f(x) - x| \leq 1. \quad (2)$$

Lời giải. Từ (1), bằng cách sử dụng quy nạp, ta chứng minh được

$$f(2^n x) = 2^n f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thật vậy, giả sử có $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq x_0$. Đặt $f(x_0) = x_0 + \varepsilon$ với $\varepsilon \neq 0$. Khi đó, ta có

$$f(2^n x_0) = 2^n \cdot f(x_0) = 2^n x_0 + 2^n \varepsilon$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$|f(2^n x_0) - 2^n x_0| = 2^n |\varepsilon|$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do (2) nên $|f(2^n x_0) - 2^n x_0| \leq 1$. Kết hợp với đẳng thức trên, ta thu được

$$2^n |\varepsilon| \leq 1$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tuy nhiên, kết quả này không thể nào thỏa mãn với mọi $n \in \mathbb{N}$. Mâu thuẫn thu được cho ta kết quả vừa khẳng định ở trên, tức $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Bài toán 2. (VMO, 2013 - A) Gọi $\mathcal{F}$ là tập hợp tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(3x) \geq f(f(2x)) + x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Tìm hằng số A lớn nhất để với mọi $f \in \mathcal{F}$ và với mọi $x > 0$, ta đều có

$$f(x) \geq Ax.$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra

$$f(x) \geq f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3} \quad (3)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Do $f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) > 0$ nên ta có

$$f(x) > \frac{x}{3}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Đặt $a_1 = \frac{1}{3}$. Từ hai bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$f(x) > a_1 \cdot f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} > a_1^2 \cdot \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2a_1^2 + 1}{3}x.$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Bằng cách đặt $a_2 = \frac{2a_1^2 + 1}{3}$ và áp dụng kết quả vừa thu được vào (3), ta có

$$f(x) > a_2 \cdot f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} > a_2^2 \cdot \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2a_2^2 + 1}{3}x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Bằng cách lặp lại các quy trình đánh giá giống nhau như vậy, ta thu được

$$f(x) > a_n x \tag{4}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^+$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, trong đó (a_n) là dãy truy hồi được xác định bởi $a_1 = \frac{1}{3}$ và

$$a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{3}.$$

Ta chứng minh được (a_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$ nên có giới hạn hữu hạn. Từ đó dễ dàng tìm được $\lim a_n = \frac{1}{2}$. Bây giờ, trong (4), ta cho $n \rightarrow +\infty$ thì được

$$f(x) \geq (\lim a_n)x = \frac{1}{2}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Mặt khác, dễ thấy hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Vậy $A_{\max} = \frac{1}{2}$. □

Bài toán 3. (Bulgaria, 2006) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn đẳng thức

$$f(x+y) - f(x-y) = 4\sqrt{f(x)f(y)} \tag{5}$$

với mọi số thực $x > y > 0$.

Có thể đoán được các hàm số thỏa mãn phương trình trên sẽ có dạng $f(x) = kx^2$. Một trong các cách tiếp cận thường thấy là chứng minh $f(2x) = 4f(x)$ dựa trên việc tính $f(5x)$ bằng hai cách để từ đó quy nạp lên $f(nx) = n^2 f(x)$, bước cuối cùng là sử dụng tính đơn điệu của f để suy ra công thức tổng quát cho nó.

Ở đây, chúng tôi sẽ giới thiệu một cách tiếp cận khác để chứng minh $f(2x) = 4f(x)$. Có thể thấy rằng, nếu ta chứng minh được $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì từ phương trình đề bài, bằng cách cho $x \rightarrow y^+$, ta sẽ thu được đúng điều ta cần.

Lời giải. Trong (5), ta thay x bởi $x + y$ thì được

$$f(x + 2y) - f(x) = 4\sqrt{f(x + y)f(y)} \quad (6)$$

với mọi $x, y > 0$. Từ đây, dễ dàng suy ra f tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$. Từ kết quả này dẫn đến $f(x + y) > f(y)$, và ta cũng suy ra rằng

$$f(x + 2y) > 4f(y)$$

với mọi $x, y > 0$. Tiếp tục, ta thay x bởi $x + y$ vào (6) và sử dụng bất đẳng thức trên thì được

$$f(x + 3y) = f(x + y) + 4\sqrt{f(x + 2y)f(y)} > f(y) + 4\sqrt{4f(y)f(y)} = 9f(y).$$

Cứ thế, cứ thế, ta quy nạp lên được rằng:

$$f(x + ny) > n^2 f(y),$$

với mọi $x, y > 0$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thay $y = \frac{1}{n}$ vào bất phương trình trên, ta được

$$f\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{f(1 + x)}{n^2}$$

với mọi $x > 0$ và với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Cố định x và cho $n \rightarrow +\infty$, ta thu được $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, từ đó suy ra

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

Bây giờ, trong (6), ta cho $y < x$ thì thu được

$$0 < f(x + 2y) - f(x) < 4\sqrt{f(2x)f(y)}.$$

Cố định x và cho $y \rightarrow 0^+$ thì ta có $\lim_{y \rightarrow 0^+} [f(x + 2y) - f(x)] = 0$, hay

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Đến đây, bằng cách cố định y trong (5) và cho $x \rightarrow y^+$, ta được

$$f(2y) = 4f(y)$$

với mọi $y > 0$. Dựa trên kết quả này, ta có thể quy nạp được

$$f(nx) = n^2 \cdot f(x),$$

với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. (Chỉ việc cho $x = 2y, 3y, \dots, ny$ vào (5) là được.) Từ đó suy ra

$$f(n) = n^2 f(1)$$

và

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f\left(n \times \frac{m}{n}\right)}{n^2} = \frac{f(m)}{n^2} = \frac{m^2}{n^2} f(1)$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Nói riêng, ta có $f(x) = kx^2$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Do f đơn điệu và tập $\mathbb{R}^+$ trù mật trong $\mathbb{Q}^+$ nên ta có $f(x) = kx^2$ với mọi $x > 0$. Hàm này thỏa mãn yêu cầu đề bài. $\square$

Bài toán 4. (Bulgaria, 1998) Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f^2(x) \geq f(x+y)[f(x)+y] \quad (7)$$

với mọi cặp số thực dương x, y .

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f như trên. Khi đó, ta có thể viết lại giả thiết dưới dạng

$$f^2(x) + yf(x) - yf(x) \geq f(x+y)[f(x)+y],$$

hay

$$[f(x)+y][f(x)-f(x+y)] \geq yf(x).$$

Từ đây, ta có

$$f(x) - f(x+y) \geq \frac{y \cdot f(x)}{f(x)+y}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$. Kết quả trên chứng tỏ f là một hàm giảm thực sự trên $\mathbb{R}^+$. Bây giờ, ta cố định $x_0 \in \mathbb{R}^+$ và chọn số tự nhiên n sao cho $nf(x_0+1) \geq 1$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) - f\left(x_0 + \frac{k+1}{n}\right) &\geq \frac{f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n}}{f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}} > \frac{f(x_0+1) \times \frac{1}{n}}{f(x_0+1) + \frac{1}{n}} \\ &\geq \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

với mọi $k \in \mathbb{N}, k < n$. (Chú ý rằng hàm số $g(t) = \frac{t}{t+u}$ với $u > 0$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}^+$.)

Trong bất đẳng thức trên, lần lượt cho k nhận giá trị từ 0 đến $n-1$ và cộng tất cả các bất đẳng thức lại theo vế. Khi đó, ta thu được kết quả sau

$$f(x_0) - f(x_0+1) > \frac{1}{2} \quad (8)$$

với mọi $x > 0$. Bây giờ, chọn số tự nhiên m sao cho $m \geq 2 \cdot f(x)$, ta có

$$f(x) - f(x+m) = [f(x) - f(x+1)] + \dots + [f(x+m-1) - f(x+m)] > \frac{m}{2} \geq f(x),$$

từ đó suy ra $f(x+m) < 0$, mâu thuẫn. Vậy không tồn tại hàm f nào thỏa mãn (7) □

Nhận xét. Bài toán trên cũng xuất hiện trong đề thi IMC năm 1999 và lời giải trên chính là đáp án của nó. Để thiết lập được tính chất (8) ở trên, ta đã sử dụng tổng sai phân. Đây là một phép toán thú vị có thể giúp ta thu được nhiều chất quan trọng trong các bài toán có dạng hiệu như thế này. Ngoài cách giải đã nêu ở trên, ta cũng có một cách khác sử dụng dãy truy hồi như sau: Thay $y = f(x)$ vào (7), ta thu được

$$f(x+f(x)) \leq \frac{f(x)}{2} \quad (9)$$

với mọi $x > 0$. Trong ta thay x bởi $x + f(x)$ thì có

$$f(x+f(x)+f(x+f(x))) \leq \frac{f(x+f(x))}{2} \leq \frac{f(x)}{2^2}$$

với mọi $x > 0$. Mặt khác, cũng theo (9), ta có $x + f(x) + f(x + f(x)) \leq x + f(x) + \frac{f(x)}{2}$. Từ đó, sử dụng tính nghịch biến của hàm f , ta thu được

$$f\left(x + \left(1 + \frac{1}{2}\right)f(x)\right) \leq \frac{f(x)}{2^2} \quad (10)$$

với mọi $x > 0$. Từ (9) và (10) kết hợp với f nghịch biến, bằng cách sử dụng liên tục phép thay x bởi $x + f(x)$, ta dễ dàng chứng minh được

$$f\left(x + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)f(x)\right) \leq \frac{f(x)}{2^{n+1}}$$

với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Do $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2$ và f giảm nên từ trên, ta suy ra

$$f(x + 2 \cdot f(x)) \leq \frac{f(x)}{2^{n+1}}$$

với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Trong bất đẳng thức trên, ta cho $n \rightarrow +\infty$ thì thu được

$$f(x + 2 \cdot f(x)) \leq 0,$$

mâu thuẫn vì f luôn nhận giá trị dương.

Bài toán 5. (Bulgaria, 2008) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + y^2) \geq (y + 1)f(x) \quad (11)$$

với mọi cặp số thực x, y .

Lời giải. Thay $y = -1$ và thay x bởi $x - 1$ vào (11), ta thu được

$$f(x) \geq 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ đây, kết hợp với (11), ta suy ra

$$f(x + y) \geq (\sqrt{y} + 1)f(x) \geq f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và với mọi $y \geq 0$. Kết quả này chứng tỏ f là hàm không giảm trên $\mathbb{R}$.

Bây giờ, ta viết lại (11) dưới dạng

$$f(x + y^2) - f(x) \geq yf(x) \quad (12)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$, và xét hai dãy $(a_n), (b_n)$ với $a_0 = b_0 = 0$,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, \quad b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Trong (12), ta thay x bởi $x + a_k$ và thay y bởi $\frac{1}{k+1}$ thì có

$$f(x + a_{k+1}) - f(x + a_k) \geq \frac{f(x + a_k)}{k + 1} \geq \frac{f(x)}{k + 1}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $k \in \mathbb{N}$. Trong bất đẳng thức trên, lần lượt cho $k = 0, 1, \dots, n-1$ và cộng tất cả các bất đẳng thức lại theo vế, ta thu được

$$f(x + a_n) - f(x) \geq b_n f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$. Mặt khác, ta dễ dàng chứng minh được $a_n < 2$ và $b_n \rightarrow +\infty$ (đây là hai kết quả quen thuộc, bạn đọc có thể tự chứng minh). Do đó, từ bất đẳng thức trên, ta có

$$f(x + 2) - f(x) \geq f(x + a_n) - f(x) \geq b_n f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}$. Nếu tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) > 0$ thì từ bất đẳng thức trên, bằng cách thay $x = x_0$ và cho $n \rightarrow +\infty$, ta sẽ thu được điều mâu thuẫn (vế phải tiến đến dương vô cùng trong khi vế trái là hằng số). Do vậy, ta phải có $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Để thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu của đề bài. $\square$

Nhận xét. Ngoài cách sử dụng tổng sai phân thông qua hai dãy (a_n) , (b_n) như trên, ta cũng có thể tiếp cận bài toán này theo cách khác như sau: Ta xét $x, y \geq 0$ và thay y bởi $\sqrt{y}$ vào bất phương trình (11) thì thu được

$$f(x + y) \geq (\sqrt{y} + 1) \cdot f(x), \quad \forall x, y \geq 0.$$

Đến đây, bằng cách sử dụng liên tiếp bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f\left(x + \frac{(n-1)y}{n} + \frac{y}{n}\right) \geq \left(\sqrt{\frac{y}{n}} + 1\right) f\left(x + \frac{(n-1)y}{n}\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{y}{n}} + 1\right) f\left(x + \frac{(n-2)y}{n} + \frac{y}{n}\right) \geq \left(\sqrt{\frac{y}{n}} + 1\right)^2 f\left(x + \frac{(n-2)y}{n}\right) \\ &\dots \geq \left(\sqrt{\frac{y}{n}} + 1\right)^n \cdot f(x) \end{aligned}$$

với mọi $x, y \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, ta suy ra

$$f(x) = 0 \tag{13}$$

với mọi $x \geq 0$. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_0 \geq 0$ sao cho $f(x_0) > 0$. Thay $x = x_0$ vào bất đẳng thức trên và cố định $y = y_0 > 0$, sau đó cho $n \rightarrow +\infty$ thì có

$$\frac{f(x_0 + y_0)}{f(x_0)} \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{y_0}{n}}\right)^n = +\infty.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ không tồn tại số x_0 nói trên, hay nói cách khác, (13) đúng. Bây giờ, ta xét $x < 0$ và thay $y = \sqrt{-x}$ vào (11) thì được

$$0 = f(0) \geq (\sqrt{-x} + 1) f(x) \geq 0$$

với mọi $x < 0$. Từ đó suy ra $f(x) = 0$ với mọi $x < 0$. Tóm lại, ta có $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Đôi khi, ta cũng có thể sử dụng công thức nghiệm của các phương trình sai phân để tìm công thức tổng quát cho các dãy lặp của $f(x)$, rồi từ đó dựa vào miền giá trị của $f(x)$ mà suy ra những tính chất đặc biệt của hàm số được cho.

Bài toán 6. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x)) = 6x - f(x)$$

với mọi số thực dương x .

Lời giải. Cố định $x > 0$ và đặt $f_0(x) = x$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$. Từ giả thiết, bằng cách sử dụng quy nạp, ta chứng minh được

$$f_{n+2}(x) + f_{n+1}(x) - 6f_n(x) = 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Đây là phương trình sai phân tuyến tính cấp hai nên bằng cách xét phương trình đặc trưng của nó, ta tìm được công thức tổng quát của $f_n(x)$ là

$$f_n(x) = \frac{2x - f(x)}{5} \times (-3)^n + \frac{3x + f(x)}{5} \times 2^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do $f_n(x) > 0$ nên kết quả trên, ta suy ra

$$[2x - f(x)] \left(-\frac{3}{2}\right)^n + 3x + f(x) > 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $2x - f(x) > 0$ thì bằng cách xét n lẻ, $n = 2k + 1$ và cho $k \rightarrow +\infty$, ta có thể thấy bất đẳng thức trên sẽ không thể luôn đúng. Còn nếu $2x - f(x) < 0$ thì bằng cách xét n chẵn, $n = 2k$ và cho $k \rightarrow +\infty$, ta cũng thu được kết luận tương tự. Do vậy, ta phải có

$$f(x) = 2x.$$

Hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. □

Nhận xét. Bài toán trên cũng có thể được giải bằng phương pháp kẹp dãy số như sau: Xét hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định bởi $a_0 = 0$, $b_0 = 6$ và

$$a_{n+1} = \frac{6}{1 + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{6}{1 + a_n}.$$

Dễ thấy $a_n, b_n > 0$ với mọi $n \geq 1$. Ta có

$$a_{n+2} = \frac{6}{1 + b_{n+1}} = \frac{6}{1 + \frac{6}{1 + a_n}} = \frac{6(1 + a_n)}{a_n + 7},$$

do đó

$$|a_{n+2} - 2| = \frac{4|a_n - 2|}{a_n + 7} \leq \frac{4}{7}|a_n - 2|.$$

Từ đây, bằng cách sử dụng nguyên lý ánh xạ co, ta chứng minh được $\lim a_{2n} = \lim a_{2n+1} = 2$, hay $\lim a_n = 2$. Tương tự, ta cũng có $\lim b_n = 2$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$a_n x < f(x) < b_n x \tag{14}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do $f(f(x)) > 0$ nên $6x - f(x) > 0$, từ đây ta dễ thấy khẳng định đúng với $n = 0$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, tức ta có

$$a_k x < f(x) < b_k x.$$

Khi đó, thay x bởi $f(x)$ vào bất đẳng thức trên và sử dụng giả thiết, ta thu được

$$a_k f(x) < f(f(x)) < b_k f(x),$$

hay

$$a_k f(x) < 6x - f(x) < b_k f(x).$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra

$$a_{k+1}x = \frac{6}{1+b_k}x < f(x) < \frac{6}{1+a_k}x = b_{k+1}x.$$

Như vậy, khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$. Bất đẳng thức (14) được chứng minh.

Bây giờ, trong (14), bằng cách cho $n \rightarrow +\infty$ và chú ý $\lim a_n = \lim b_n = 2$ như đã chứng minh ở trên, ta dễ dàng suy ra $f(x) = 2x$ với mọi $x > 0$.

Bài toán 7. (APMO, 1989) Tìm tất cả các song ánh tăng thực sự $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x) + g(x) = 2x$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong đó $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$.

Lời giải. Đặt $f_0(x) = x$ và $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, tương tự cho $g_n(x)$. Thay x bởi $f(x)$ vào phương trình đề bài, ta được $f_2(x) + x = 2f(x)$. Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f_{n+2}(x) - 2f_{n+1}(x) + f_n(x) = 0.$$

Giải phương trình sai phân này, ta tìm được

$$f_n(x) = x + n[f(x) - x]$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Một cách tương tự, ta cũng chứng minh được

$$g_n(x) = x + n[g(x) - x] = x - n[f(x) - x].$$

Do $f(x)$ là song ánh tăng ngặt nên $f_n(x)$ và $g_n(x)$ cũng là các hàm tăng thực sự. Do đó, với mọi $x > y$, ta đều có $f_n(x) > f_n(y)$ và $g_n(x) > g_n(y)$. Nói cách khác, ta có

$$x + n[f(x) - x] > y + n[f(y) - y] \Leftrightarrow n\{[f(x) - x] - [f(y) - y]\} > y - x \quad (15)$$

và

$$x - n[f(x) - x] > y - n[f(y) - y] \Leftrightarrow n\{[f(x) - x] - [f(y) - y]\} < x - y. \quad (16)$$

Nếu $f(x) - x > f(y) - y$ thì bằng cách cho $n \rightarrow +\infty$ trong (16), ta thu được điều mâu thuẫn. Còn nếu $f(x) - x < f(y) - y$ thì bằng cách cho $n \rightarrow +\infty$ trong (15), ta cũng có kết quả tương tự. Do vậy, ta phải có

$$f(x) - x = f(y) - y$$

với mọi $x > y$. Nói cách khác, $f(x) = x + c$ với mọi x (ở đây c là một hằng số nào đó). Hàm này thoả mãn các yêu cầu của bài toán. $\square$

Nhận xét. Bài toán này cũng là đề dự tuyển IMO năm 1979.

Bài toán 8. (BMO, 2009) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thoả mãn

$$f(f^2(m) + 2f^2(n)) = m^2 + 2n^2 \quad (17)$$

với mọi cặp số nguyên dương m, n .

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy f đơn ánh. Chú ý rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta đều có

$$(n + 4)^2 + 2(n + 1)^2 = n^2 + 2(n + 3)^2.$$

Suy ra

$$f(f^2(n + 4) + 2f^2(n + 1)) = f(f^2(n) + 2f^2(n + 3)).$$

Do f đơn ánh nên từ đẳng thức này, ta suy ra

$$f^2(n + 4) + 2f^2(n + 1) = f^2(n) + 2f^2(n + 3).$$

Đây là phương trình sai phân tuyến tính cấp 4 của dãy $f^2(n)$. Giải phương trình này, ta tìm được

$$f^2(n) = An^2 + Bn + C + D(-1)^n \quad (18)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Bây giờ, ta sẽ tìm các giá trị cụ thể của A, B, C, D . Lấy bình phương hai vế của (17) và sử dụng (18), ta được

$$\begin{aligned} & A[A(m^2 + 2n^2) + B(m + 2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n]^2 \\ & + B[A(m^2 + 2n^2) + B(m + 2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n] \\ & + C + D(-1)^{A(m^2+2n^2)+B(m+2n)+3C+D(-1)^m+2D(-1)^n} = (m^2 + 2n^2)^2. \end{aligned}$$

Cố định n . Chia hai vế của đẳng thức trên cho m^4 rồi cho $m \rightarrow +\infty$, ta tìm được $A = 1$. Do đó

$$\begin{aligned} & [(m^2 + 2n^2) + B(m + 2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n]^2 \\ & + B[(m^2 + 2n^2) + B(m + 2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n] \\ & + C + D(-1)^{(m^2+2n^2)+B(m+2n)+3C+D(-1)^m+2D(-1)^n} = (m^2 + 2n^2)^2, \end{aligned}$$

hay

$$\begin{aligned} & 2(m^2 + 2n^2)[B(m + 2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n] \\ & + [B(m + 2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n]^2 \\ & + B[(m^2 + 2n^2) + B(m + 2n) + 3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n] \\ & + C + D(-1)^{(m^2+2n^2)+B(m+2n)+3C+D(-1)^m+2D(-1)^n} = 0. \end{aligned}$$

Cố định n . Chia hai vế của đẳng thức trên cho m^3 rồi cho $m \rightarrow +\infty$, ta tìm được $B = 0$. Do đó, đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\begin{aligned} & 2(m^2 + 2n^2)[3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n] + [3C + D(-1)^m + 2D(-1)^n]^2 \\ & + C + D(-1)^{(m^2+2n^2)+3C+D(-1)^m+2D(-1)^n} = 0. \end{aligned}$$

Trong đẳng thức trên, xét m chẵn, n chẵn và cho $m, n \rightarrow +\infty$, ta dễ thấy $C + D = 0$. Tương tự, xét m lẻ, n lẻ và cho $m, n \rightarrow +\infty$, ta cũng có $C - D = 0$. Do đó $C = D = 0$. Tóm lại, ta có $A = 1$ và $B = C = D = 0$. Suy ra $f^2(n) = n$, hay $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Hàm này thoả mãn các yêu cầu của bài toán. $\square$

Đôi khi, ta phải xử lý các bài toán với hàm liên tục. Khi đó, các tính chất thường được sử dụng là:

- Nếu hàm số f liên tục tại x_0 thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Nếu hàm số f liên tục từ khoảng A vào khoảng B và đơn ánh ($A, B \subseteq \mathbb{R}$) thì nó là hàm đơn điệu thực sự.
- Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì nó có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn đó.
- Nếu hàm số f liên tục từ khoảng $A \subseteq \mathbb{R}$ vào khoảng $B \subseteq \mathbb{R}$, và $f(x_1) = a$, $f(x_2) = b$ (với $x_1, x_2 \in A$ và $a, b \in B$, $a < b$) thì f có thể nhận mọi giá trị trên $[a, b]$.
- Nếu hàm số f liên tục từ A vào B và $f(x) \neq M$ ($A, B \subseteq \mathbb{R}$, M là hằng số) thì một trong hai điều sau sẽ được thỏa mãn:
 - $f(x) > M$ với mọi $x \in A$;
 - $f(x) < M$ với mọi $x \in A$.

Bài toán 9. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x)) = f(x) + 2x$$

với mọi số thực x .

Lời giải. Từ giả thiết, dễ thấy f đơn ánh và $f(0) = 0$. Do f liên tục nên nó là hàm đơn điệu thực sự. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh f là toán ánh. Thật vậy, giả sử tồn tại số $a \in \mathbb{R}$ để $f(x) \neq a$ với mọi số thực x . Khi đó, ta có $f(x) > a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) < a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giả sử $f(x) > a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Nếu f giảm ngặt thì ta có

$$2x + a < 2x + f(x) = f(f(x)) < f(a)$$

với mọi x , mâu thuẫn. Do đó f tăng ngặt. Suy ra, với mọi $x < 0$, ta có

$$f(x) > f(x) + 2x = f(f(x)) > f(a).$$

Do f tăng ngặt nên từ đây, ta có $x > a$ với mọi $x < 0$, mâu thuẫn.

Tương tự, trong trường hợp $f(x) < a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta cũng thu được điều mâu thuẫn. Như vậy, f là toàn ánh và do đó nó là song ánh.

Bây giờ, đặt $f_0(x) = x$ và $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, ta chứng minh được

$$f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) - 2f_n(x) = 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ đó suy ra

$$f_n(x) = \frac{2x - f(x)}{3} \times (-1)^n + \frac{x + f(x)}{3} \times 2^n.$$

Do f là song ánh nên nó tồn tại hàm ngược. Gọi $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$ và đặt $g_0(x) = x$, $g_n(x) = g(g_{n-1}(x))$. Thay x bởi $g(x)$ vào phương trình ban đầu, ta được

$$2g(x) + x - f(x) = 0 \quad (19)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Trong (19), ta tiếp tục thay x bởi $g(x)$ thì thu được

$$2g_2(x) + g(x) - x = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ đó, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$2g_{n+2}(x) + g_{n+1}(x) - g_n(x) = 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Suy ra

$$g_n(x) = \frac{x - 2g(x)}{3} \times (-1)^n + \frac{2x + 2g(x)}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Từ (19) suy ra $2g(x) = f(x) - x$. Do đó

$$g_n(x) = \frac{2x - f(x)}{3} \times (-1)^n + \frac{x + f(x)}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: f tăng ngặt. Dễ thấy $f_n(x)$ và $g_n(x)$ cũng tăng ngặt. Do $f(0) = 0$ nên $g(0) = 0$ và $g_n(0) = 0$. Với mỗi số thực $x > 0$, ta có $g_n(x) > g_n(0) = 0$ nên

$$\frac{2x - f(x)}{3} \times (-1)^n + \frac{x + f(x)}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $2x - f(x) > 0$ thì bằng cách cho n lẻ và $n \rightarrow +\infty$, ta sẽ thu được điều mâu thuẫn. Còn nếu $2x - f(x) < 0$ thì bằng cách cho n chẵn và $n \rightarrow +\infty$, ta cũng thu được kết quả tương tự. Do đó, ta có $f(x) = 2x$ với mọi $x > 0$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(x) = 2x$ với mọi $x < 0$. Như vậy, trong trường hợp này, ta tìm được $f(x) = 2x$. Hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 2: f giảm ngặt. Dễ thấy $f_{2n}(x)$ tăng ngặt, $f_{2n+1}(x)$ giảm ngặt và $f_n(0) = 0$. Với mỗi $x > 0$, ta có $f_{2n}(x) > f_{2n}(0) = 0 = f_{2n+1}(0) > f_{2n+1}(x)$ nên

$$\frac{2x - f(x)}{3} + \frac{x + f(x)}{3} \times 4^n > 0 > \frac{f(x) - 2x}{3} + \frac{x + f(x)}{3} \times 2^{2n+1}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $x + f(x) < 0$ thì bằng cách cho $n \rightarrow +\infty$, bất đẳng thức về trái sẽ không thể thỏa mãn. Còn nếu $x + f(x) > 0$ thì bằng cách cho $n \rightarrow +\infty$, bất đẳng thức về bên phải cũng không thể thỏa mãn. Do vậy, ta phải có $f(x) = -x$ với mọi $x > 0$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(x) = -x$ với mọi $x < 0$. Tóm lại, trong trường hợp này, ta có $f(x) = -x$ với mọi x . Hàm này cũng thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. $\square$

Bài toán 10. (Chọn đội tuyển ĐH Vinh, 2012) Tìm tất cả các hàm số f liên tục từ tập $[0, +\infty)$ vào $[0, +\infty)$ thoả mãn đẳng thức

$$2f(x) = f\left(\frac{x}{x^2 + x + 1}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

với mọi số thực không âm x .

Lời giải. Do f liên tục trên $[0, +\infty)$ nên nó cũng liên tục trên $[0, 1]$. Từ đó suy ra tồn tại các số $a, b \in [0, 1]$ sao cho

$$f(a) = \max_{x \in [0, 1]} f(x) = M$$

và

$$f(b) = \min_{x \in [0, 1]} f(x) = m.$$

Do $2M = 2f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right) + f\left(\frac{a}{a^2+a+1}\right)$ và

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) \leq M, \quad f\left(\frac{a}{a^2+a+1}\right) \leq M$$

(chú ý rằng $\frac{a+1}{2} \leq 1$ và $\frac{a}{a^2+a+1} < 1$) nên ta suy ra

$$f\left(\frac{a+1}{2}\right) = M.$$

Từ đây, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f\left(\frac{a+2^n-1}{2^n}\right) = M$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Trong đẳng thức này, cho $n \rightarrow +\infty$, ta được $f(1) = M$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $f(1) = m$. Do đó $M = m$. Điều này chứng tỏ f là hàm hằng trên đoạn $[0, 1]$.

Giả sử $f(x) \equiv c$ với mọi $x \in [0, 1]$. Khi đó, ta có thể viết lại phương trình ban đầu dưới dạng

$$f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2}c.$$

Từ đẳng thức này, ta chứng minh bằng quy nạp được

$$f(x) = \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x+2^n-1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)c$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Cho $n \rightarrow +\infty$, ta được $f(x) \equiv c$. Hàm này thoả mãn yêu cầu đề bài. □

Bài toán 11. Tìm tất cả các hàm số f liên tục từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f(x + f(y + z)) + f(y + f(z + x)) + f(z + f(x + y)) = 0 \quad (20)$$

với mọi bộ số thực x, y, z .

Lời giải. Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ là một nghiệm của phương trình nên ở đây ta chỉ cần xét $f(x) \not\equiv 0$. Thay x, y, z bởi $\frac{x}{2}$ vào (20), ta thu được

$$f\left(\frac{x}{2} + f(x)\right) = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tiếp tục, thay x bởi $\frac{x}{2} + f(x)$ vào đẳng thức trên, ta được

$$f\left(\frac{x}{2^2} + \frac{1}{2}f(x)\right) = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ đây, bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f\left(\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}f(x)\right) = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Trong đẳng thức trên, cố định x và cho $n \rightarrow +\infty$, sau đó sử dụng tính liên tục của f , ta suy ra $f(0) = 0$. Từ đây, bằng cách thay $x = y$ và $z = -x$ vào (20), ta có

$$f(f(2x) - x) = -2f(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do $f(x) \not\equiv 0$ nên tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) \neq 0$. Xét dãy (a_n) được xác định bởi $a_0 = x_0$ và $a_{n+1} = f(2a_n) - a_n$. Khi đó, dễ thấy

$$f(a_n) = -2f(a_{n-1}) = (-2)^2 f(a_{n-2}) = \cdots = (-2)^n f(x_0)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $f(x_0) > 0$ thì ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_{2n}) = +\infty$ và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_{2n-1}) = -\infty.$$

Còn nếu $f(x_0) < 0$ thì ta có kết quả ngược lại. Nhưng trong cả hai trường hợp này, ta đều thấy rằng $f(x)$ không bị chặn, mà f liên tục nên nó toàn ánh.

Đến đây, bằng cách thay $y = z = 0$ vào (20), ta có

$$2f(f(x)) + f(x) = 0$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do f toàn ánh nên ta có $f(x) = -\frac{x}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $f(x) = 0$ và $f(x) = -\frac{x}{2}$. □

Bài toán 12. (IMO, 2013) Cho hàm số f xác định trên tập $\mathbb{Q}^+$ và nhận giá trị trong tập $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- (1) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ với mọi $x, y \in \mathbb{Q}^+$;
- (2) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{Q}^+$;
- (3) tồn tại một số hữu tỉ $a > 1$ sao cho $f(a) = a$.

Chúng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$.

Lời giải. Thay $x = a$ và $y = 1$ vào (12), ta được $a \cdot f(1) \geq a$, tức $f(1) \geq 1$. Từ đây, bằng cách sử dụng quy nạp kết hợp với (12), ta chứng minh được

$$f(n) \geq n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thay $x = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ và $y = q$ vào (12), ta được

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot f(q) \geq f(p) \geq p > 0.$$

Mà $f(q) \geq q > 0$ nên từ đây ta có

$$f(x) > 0$$

với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Kết hợp với (12), ta suy ra $f(x)$ là hàm tăng thực sự trên $\mathbb{Q}^+$. Bây giờ, từ (12), sử dụng quy nạp kết hợp với $f(a) = a$, ta thu được

$$f(a^n) \leq a^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh

$$f(x) \geq x \tag{21}$$

với mọi $x \geq 1, x \in \mathbb{Q}^+$. Thật vậy, giả sử có $x_0 \geq 1$ sao cho $f(x_0) < x_0$. Khi đó, đặt $f(x_0) = x_0 - \varepsilon$ với $0 < \varepsilon < x_0$. Sử dụng quy nạp kết hợp với (12), ta có

$$f(x_0^n) \leq f^n(x_0) = (x_0 - \varepsilon)^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác, do f tăng nên ta có

$$f(x_0^n) \geq f(\lfloor x_0^n \rfloor) \geq \lfloor x_0^n \rfloor \geq x_0^n - 1.$$

Do đó, kết hợp với bất đẳng thức trên, ta thu được

$$x_0^n - 1 \leq (x_0 - \varepsilon)^n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nhưng, một điều rõ ràng là bất đẳng thức này sẽ sai với n đủ lớn. Mâu thuẫn này cho ta điều vừa khẳng định, tức (21) đúng. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$f(x) = x \tag{22}$$

với mọi $x \geq 1, x \in \mathbb{Q}^+$. Chọn $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a^n \geq x + 1$. Khi đó, ta có

$$a^n \geq f(a^n) = f((a^n - x) + x) \geq f(a^n - x) + f(x) \geq (a^n - x) + x = a^n.$$

Do vậy, dấu đẳng thức trong các đánh giá phải xảy ra và do đó (22) đúng.

Thay $x = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ và $y = q$ vào (12), ta suy ra

$$f(x) \geq x$$

với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Từ (12) sử dụng phương pháp quy nạp, ta có

$$f(nx) \geq nf(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, cho $x = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ và $n = q$, ta được

$$f(x) \leq x$$

với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{Q}^+$. Ta thu được kết quả cần chứng minh. $\square$

Bài toán 13. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

(1) $f(x + 1) \geq f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(xy) \geq f(x)f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Thay $x = y$ vào (13), ta được $f(x^2) \geq f^2(x) \geq 0$. Từ đó suy ra $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Do đó, bằng cách thay $x = 0$ vào (13), ta có $f(1) \geq f(0) + 1 \geq 1$. Tiếp tục, thay $x = y = 1$ vào (13), ta có $f(1) \geq f^2(1)$, tức $0 \leq f(1) \leq 1$. Kết hợp với trên, ta được $f(1) = 1$ và do đó $f(0) = 0$. Từ (13) và (13), bằng quy nạp ta có

$$f(x + n) \geq f(x) + n \quad (23)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, và

$$f(x^n) \geq f^n(x) \quad (24)$$

với mọi $x \geq 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Sử dụng (23), với mỗi $x > 0$, ta có

$$f(x) = f(\{x\} + \lfloor x \rfloor) \geq f(\{x\}) + \lfloor x \rfloor \geq \lfloor x \rfloor > x - 1.$$

Từ đây, kết hợp với (24) và (13), với mỗi $x > 1$ và với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta thấy rằng

$$(x^n - 1)f^n\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x^n)f\left(\frac{1}{x^n}\right) \leq f(1) = 1.$$

Do vậy, ta có

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x^n - 1}}$$

với mọi $x > 1$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Trong bất đẳng thức trên, cố định $x > 1$ và cho $n \rightarrow +\infty$, ta thu được $f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$, hay nói cách khác (chú ý rằng $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$),

$$f(x) \leq x \quad (25)$$

với mọi $x \in [0, 1]$. Mặt khác, do (13) nên ta cũng chứng minh bằng quy nạp được rằng

$$f(x - n) \leq f(x) - n$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$. Với mỗi $x < 0$, ta có $\lfloor x \rfloor < 0$ nên

$$f(x) = f(\{x\} + \lfloor x \rfloor) \leq f(\{x\}) + \lfloor x \rfloor \leq \{x\} + \lfloor x \rfloor = x. \quad (26)$$

Trong (13), ta thay $x = y = t$ với $t \in [-1, 0]$ thì có

$$f^2(t) \leq f(t^2) \leq t^2$$

nên suy ra $t \leq f(t) \leq -t$. Kết hợp với kết quả ở trên, ta thu được $f(t) = t$ với mọi $t \in [-1, 0]$. Bây giờ, với mỗi $x < -1$, sử dụng kết quả trên, ta có

$$\frac{1}{x^2}f^2(x) = f^2(x)f^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(x^2)f\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq f(1) = 1$$

nên $f^2(x) \leq x^2$, suy ra $x \leq f(x) \leq -x$. Kết hợp kết quả này với (26), ta được $f(x) = x$ với mọi $x \leq 0$. Tiếp tục, thay $y = -1$ vào (13) và xét $x > 0$ thì có

$$-x = f(-x) \geq f(x)f(-1) = -f(x),$$

suy ra $f(x) \geq x$ với mọi $x > 0$. Kết hợp kết quả này với (25), ta được $f(x) = x$ với mọi $x \in (0, 1)$. Cuối cùng, xét $x > 1$, ta có

$$\frac{1}{x}f(x) = f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \leq f(1) = 1$$

nên $f(x) \leq x$. Kết hợp với bất đẳng thức $f(x) \geq x$, ta được $f(x) = x$ với mọi $x > 1$. Tóm lại, ta đã chứng minh được $f(x) = x$ với mọi x và hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. $\square$

Bài toán 14. (MOSP, 2007) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và

$$f\left(yf(x) + \frac{x}{y}\right) = xy \cdot f(x^2 + y^2) \quad (27)$$

với mọi cặp số thực x, y ($y \neq 0$).

Lời giải. Thay $x = 0$ vào (27), ta được $f(yf(0)) = 0$. Nếu $f(0) \neq 0$ thì bằng cách chọn $y = \frac{1}{f(0)}$, ta được $f(1) = 0$, mâu thuẫn với giả thiết. Do đó, ta phải có $f(0) = 0$.

Bây giờ, giả sử rằng tồn tại $a_1 \neq 0$ sao cho $f(a_1) = 0$. Thay $x = a_1$ và $y = 1$ vào (27), ta được $f(a_1^2 + 1) = 0$. Từ đó, ta có thể xây dựng được dãy (a_n) với $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ thỏa mãn

$$f(a_n) = 0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Thay $x = 1$ vào (27), ta được

$$f\left(y + \frac{1}{y}\right) = yf(y^2 + 1)$$

với mọi $y \neq 0$. Tiếp tục, thay x bởi $x + \frac{1}{x}$ vào (27) và sử dụng kết quả trên, ta có

$$f\left(xy f(x^2 + 1) + \frac{x^2 + 1}{xy}\right) = \frac{y(x^2 + 1)}{x} f\left(\frac{(x^2 + 1)^2 + x^2 y^2}{x^2}\right)$$

với mọi $x, y \neq 0$. Thay y bởi $\frac{y}{x}$ vào phương trình trên, ta được

$$f\left(yf(x^2 + 1) + \frac{x^2 + 1}{y}\right) = \frac{y(x^2 + 1)}{x^2} f\left(\frac{(x^2 + 1)^2 + y^2}{x^2}\right)$$

với mọi $x, y \neq 0$. Mặt khác, sử dụng (27), ta cũng có

$$f\left(yf(x^2 + 1) + \frac{x^2 + 1}{y}\right) = y(x^2 + 1) f((x^2 + 1)^2 + y^2).$$

Kết hợp với đẳng thức trên, ta được

$$\frac{y(x^2 + 1)}{x^2} f\left(\frac{(x^2 + 1)^2 + y^2}{x^2}\right) = y(x^2 + 1) f((x^2 + 1)^2 + y^2),$$

hay

$$f\left(\frac{(x^2 + 1)^2 + y^2}{x^2}\right) = x^2 f((x^2 + 1)^2 + y^2) \quad (28)$$

với mọi $x, y \neq 0$. Nếu $f(x) = 0, \forall x > 4$ thì bằng cách thay $x = y = 5$ vào (27), ta thu được điều mâu thuẫn. Do đó, tồn tại một số thực $b > 4$ sao cho $f(b) \neq 0$. Do $\lim a_n = +\infty$ nên tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $a_m > b$. Bây giờ, với chú ý rằng $b > 4 > \left(\frac{b}{a_m} + 1\right)^2$, ta có thể chọn $x^2 = \frac{b}{a_m}$ và $y^2 = b - \left(\frac{b}{a_m} + 1\right)^2$ để có

$$\begin{cases} (x^2 + 1)^2 + y^2 = b \\ \frac{(x^2 + 1)^2 + y^2}{x^2} = a_m \end{cases}$$

Thay các số này vào (28), ta thu được $f(a_m) = \frac{b}{a_m} f(b)$, hay $f(b) = 0$, mâu thuẫn. Và như thế, ta đã chứng minh được $f(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Bây giờ, với mỗi $x \neq 0$, ta có thể chọn y sao cho $yf(x) + \frac{x}{y} = x^2 + y^2$ (đây là phương trình bậc ba ẩn y nên luôn có ít nhất một nghiệm thực). Thay vào (27), ta được

$$(1 - xy)f(x^2 + y^2) = 0.$$

Tuy nhiên, theo chứng minh trên thì $f(x^2 + y^2) \neq 0$. Do đó, ta phải có $y = \frac{1}{x}$. Suy ra

$$\frac{1}{x} f(x) + x^2 = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

từ đây ta dễ dàng tìm được $f(x) = \frac{1}{x}$ với mọi $x \neq 0$. Ta đi đến kết luận:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \end{cases}$$

Hàm này thỏa mãn các yêu cầu của bài toán. □

3. Một số bất phương trình hàm được xây dựng trên các tập rời rạc

Bài toán 15. Với mỗi hàm $g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+, g(1) = 1$ cho trước, chứng minh rằng luôn tồn tại hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn

$$f(n) > g(n)$$

với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, và

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

với mọi cặp số nguyên dương nguyên tố cùng nhau m, n .

Lời giải. Ta sẽ xây dựng hàm f thoả mãn các điều kiện trên. Xét dãy

$$\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}^+} = (2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \dots)$$

là dãy tăng các lũy thừa của các số nguyên tố. Các số trong dãy có dạng $p_i^{\alpha_j}$ được xếp theo thứ tự tăng dần. Ta có nhận xét rằng, nếu một hàm $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ có tính chất $f(mn) = f(m)f(n)$ khi $(m, n) = 1$ thì các giá trị của nó sẽ được xác định dựa trên dãy $f(a_i)$.

Ta thiết lập dãy $f(a_i)$ bằng phép quy nạp như sau:

- Chọn $f(a_1) > g(a_1)$.
- Giả sử các số $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{k-1})$ đã được xác lập. Xét tất cả các số dạng $g(s)$, với s là tích của các số khác nhau từ tập $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Ta sẽ chọn số bất kỳ $f(a_k)$ lớn hơn tất cả các số dạng $g(s)$.

Ta đã chọn được dãy giá trị $f(a_i)$ và thêm điều kiện nhân tính ($f(mn) = f(m)f(n)$) sẽ xác lập nên hàm $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$. Hàm f được thiết lập như trên thoả mãn các yêu cầu của đề bài.

Thật vậy, với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có thể biểu diễn $n = a_{i_1}a_{i_2} \cdots a_{i_p}$ với $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$. Do đó

$$f(n) = f(a_{i_1}a_{i_2} \cdots a_{i_p}) = f(a_{i_1})f(a_{i_2}) \cdots f(a_{i_p}) \geq f(a_{i_p}) > g(a_{i_1}a_{i_2} \cdots a_{i_p}) = g(n).$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 16. (Trung Quốc, 1993) Cho hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f(xy) \leq f(x)f(y) \quad (29)$$

với mọi $x, y > 0$. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ và $n \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$f(x^n) \leq f(x)\sqrt{f(x^2)}\sqrt[3]{f(x^3)} \cdots \sqrt[n]{f(x^n)}. \quad (30)$$

Lời giải. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Dễ thấy khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định (30) đúng với các số $1, 2, \dots, n$. Khi đó, ta có

$$f(x^k) \leq f(x)\sqrt{f(x^2)}\sqrt[3]{f(x^3)} \cdots \sqrt[k]{f(x^k)}$$

với $k = 1, 2, \dots, n$. Nhân n bất phương trình trên lại, ta thu được

$$f^n(x)f^{\frac{n-1}{2}}(x^2) \cdots f^{\frac{1}{n}}(x^n) \geq f(x)f(x^2) \cdots f(x^n).$$

Nhân cả hai vế của bất phương trình trên với $f(x)f(x^2) \cdots f(x^n)$, ta được

$$f^{n+1}(x)f^{\frac{n+1}{2}}(x^2) \cdots f^{\frac{n+1}{n}}(x^n) \geq f^2(x)f^2(x^2) \cdots f^2(x^n).$$

Mặt khác, sử dụng (29), ta lại có

$$\text{VP} = \prod_{i=1}^n [f(x^i)f(x^{n+1-i})] \geq f^n(x^{n+1}).$$

Kết hợp với đánh giá ở trên, ta suy ra

$$f^{n+1}(x) f^{\frac{n+1}{2}}(x^2) \cdots f^{\frac{n+1}{n}}(x^n) \geq f^n(x^{n+1}).$$

Nhân hai vế của bất phương trình cuối cho $f(x^{n+1})$ và lấy căn bậc $n+1$ hai vế, ta suy ra khẳng định (30) cũng đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n . $\square$

Nhận xét. Bằng cách đặt $a_n = \ln f(x^n)$, ta có thể phát biểu bài toán trên lại dưới dạng dãy số như sau: Cho $a_1, a_2, \dots$ là dãy các số thực thoả mãn $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n.$$

Bài toán này đã được sử dụng ở kỳ thi APMO năm 1999.

Bài toán 17. Tìm tất cả các số $a > 0$ sao cho tồn tại hằng số $K > 0$ và hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + K|x-y|^a$$

với mọi cặp số thực x, y .

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra

$$\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+3y}{4}\right) + \frac{K}{2^a}|x-y|^a, \quad (31)$$

$$\frac{f(x) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2} \geq f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + \frac{K}{2^a}|x-y|^a, \quad (32)$$

$$\frac{f\left(\frac{3x+y}{4}\right) + f\left(\frac{x+3y}{4}\right)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{K}{2^a}|x-y|^a. \quad (33)$$

Lấy (31) + (32) + $2 \times$ (33), ta được

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{K}{2^{a-2}}|x-y|^a.$$

Từ đây, bằng cách lặp lại quy trình thế như trên, ta chứng minh bằng quy nạp được

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{K}{2^{n(a-2)}}|x-y|^a$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $a < 2$ thì bằng cách cho $x \neq y$ và $n \rightarrow +\infty$, ta thu được điều mâu thuẫn. Do đó $a \geq 2$. Ta sẽ chứng minh đây là tập hợp tất cả các số thực a thoả mãn yêu cầu đề bài.

Thật vậy, với $a \geq 2$, xét $f(x) = |x|^a$ và $K = \frac{1}{2^a}$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đầu bài được thoả mãn với mọi cặp số thực x, y , tức là

$$\frac{|x|^a + |y|^a}{2} \geq \left|\frac{x+y}{2}\right|^a + \left|\frac{x-y}{2}\right|^a. \quad (34)$$

Đặt $f(x, y) = VT_{(34)} - VP_{(34)}$, ta có

$$f(-x, -y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y).$$

Do đó $f(x, y)$ là hàm chẵn với x và với y . Vì vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Khi đó, bất đẳng thức (34) được viết lại dưới dạng

$$\frac{x^a + y^a}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^a + \left|\frac{x-y}{2}\right|^a.$$

Với $x + y = 0$, ta có $x = y = 0$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp $x + y > 0$. Khi đó, do bất đẳng thức trên có dạng thuần nhất đối với x, y nên ta có thể chuẩn hoá $x + y = 2$. Theo đó, ta phải chứng minh

$$\frac{x^a + y^a}{2} \geq 1 + \left|\frac{x-y}{2}\right|^a. \quad (35)$$

Do $0 \leq \left|\frac{x-y}{2}\right| \leq \frac{x+y}{2} = 1$ nên

$$1 + \left|\frac{x-y}{2}\right|^a \leq 1 + \frac{(x-y)^2}{4} = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta lại có

$$\frac{x^a + y^a}{2} \geq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^{\frac{a}{2}} \geq \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Do đó (35) được chứng minh. Bài toán được giải quyết xong. □

4. Một số bài tập tự luyện

Để kết lại bài viết này, xin được nêu thêm một số bài toán để bạn đọc tự nghiên cứu thêm.

Bài tập 1. (Bulgaria, 2008) Cho $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm số thoả mãn

$$2f(x^2) \geq xf(x) + x$$

với mọi $x > 0$. Chứng minh rằng $f(x^3) \geq x^2$ với mọi $x > 0$.

Bài tập 2. (IMO Shortlist, 2005) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

với mọi cặp số dương x, y .

Bài tập 3. (KHTN, 2010) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f(x + 2y) - f(x - y) = 3[f(y) + 2\sqrt{f(x)f(y)}]$$

với mọi cặp số dương $x > y$.

Bài tập 4. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) + f\left(f(x)\right) = 2x + 5$$

với mọi số thực dương x .

Bài tập 5. (Brazil, 2012) Tìm tất cả các toàn ánh $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$2xf(f(x)) = f(x)\left[x + f(f(x))\right]$$

với mọi số thực dương x .

Bài tập 6. (Việt Nam TST, 2007) Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x) = f\left(x^2 + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}\right)$$

với mọi số thực x .

Bài tập 7. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(2x + 1) = f(x)$$

với mọi số thực x .

Bài tập 8. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x + y - f(y)) = f(x) + f(y - f(y))$$

với mọi cặp số thực x, y .

Bài tập 9. (Hà Nội, 2013) Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

- (1) $f(2x) = 2f(x)$ với mọi $x > 0$;
- (2) $f\left(f^3(x)(e^{f(x)} - 1)\right) = x^2(e^x - 1)f(x)$ với mọi $x > 0$;
- (3) $f(e - 1) = (e - 1)f(1)$;
- (4) $f(k) \in \mathbb{N}^*$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 10. (Turkey, 2013) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn đồng thời các điều kiện

- (1) $f(x^2) = f^2(x) - 2xf(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;
- (2) $f(-x) = f(x - 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;
- (3) f tăng thực sự trên $(1, +\infty)$.

Bài tập 11. (THTT, 2002) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x - f(y)) = f(x + y^{2002}) + f(f(y) + y^{2002}) + 1$$

với mọi cặp số thực x, y .

Bài tập 12. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x^2) + 4y^2 f(y) = [f(x + y) + y^2][f(x - y) + f(y)]$$

với mọi cặp số thực x, y .

Bài tập 13. (Tổng quát IMO 1992) Với mỗi số tự nhiên $n \geq 2$ cho trước, tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn đẳng thức

$$f(x^n + f(y)) = y + f^n(x)$$

với mọi cặp số thực x, y .

Bài tập 14. (Saudi Arabia, 2014) Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thoả mãn

$$f(n + 1) > \frac{f(n) + f(f(n))}{2}$$

với mọi số nguyên dương n .

Bài tập 15. (Romania, 2004) Tìm tất cả các đơn ánh $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thoả mãn

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}$$

với mọi số nguyên dương n .

Bài tập 16. (IMAR, 2009) Chứng minh rằng với mỗi hàm số $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ đều tồn tại ít nhất một cặp số dương x, y sao cho

$$f(x + y) < yf(f(x)).$$

Bài tập 17. (IMO, 2011) Cho hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \leq 0$.

Bài tập 18. (IMO Shortlist, 2009) Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x - f(y)) \leq yf(x) + x$$

với mọi cặp số thực x, y .

Bài tập 19. Cho hàm số $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ thoả mãn

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \leq f\left(\frac{x + y}{2}\right) + 1$$

với mọi $x, y \in [0, 1]$. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in [0, 1]$, $a < b < c$ thì

$$\frac{c - b}{c - a} f(a) + \frac{b - a}{c - a} f(c) \leq f(b) + 2.$$

Bài tập 20. Cho các hàm số $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, trong đó f tăng nghiêm ngặt, thoả mãn

$$f(g(x)) = x$$

với mọi $x \in [0, 1]$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right) \right] < n - \frac{1}{n}.$$

Tài liệu

- [1] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Một số chuyên đề toán chọn lọc bồi dưỡng học sinh giỏi*, Khoá bồi dưỡng giáo viên chuyên toán THPT, 2004.
- [2] Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm cơ bản với đối số biến đổi*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2015.
- [3] Nguyễn Trọng Tuấn, *Các bài toán hàm số qua các kỳ thi Olympic*, NXB Giáo Dục, 2004.
- [4] Christopher G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007.
- [5] *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Birkhauser, 2009.
- [6] Titu Andreescu, Iurie Boreico, Oleg Mushkarov, Nicolai Nikolov, *Topics in Functional Equations*, XYZ Press, 2012.

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG

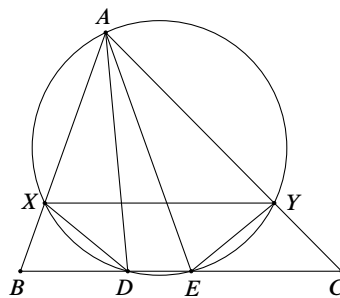
Lê Phúc Lữ
(FPT Software, thành phố Hồ Chí Minh)

1. Tính chất

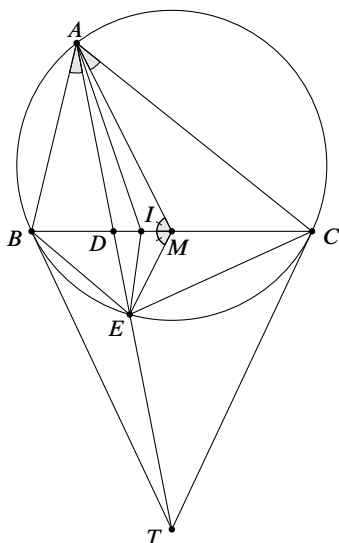
Tính chất 1. (Hệ thức Steiner) Cho tam giác $\triangle ABC$ và AD, AE là hai đường đẳng giác góc A . Khi đó

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{BE}{CE} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2.$$

Nếu E là trung điểm BC thì AD là đường đối trung và $\frac{BD}{CD} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2$.

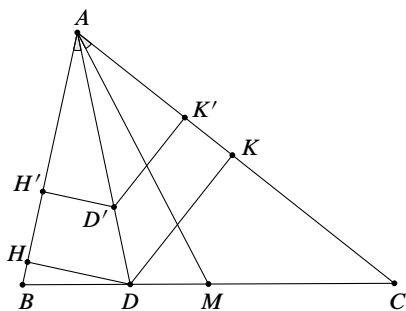


Tính chất 2. Cho tam giác $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) có điểm M là trung điểm cạnh BC . Tiếp tuyến tại điểm B, C cắt nhau tại điểm T . Đường thẳng AT cắt cạnh BC , đường tròn (O) tại các điểm D, E . Khi đó

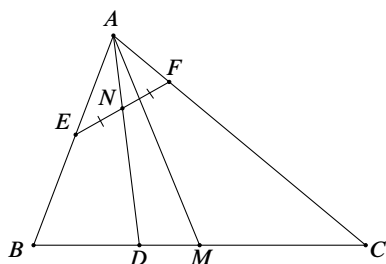


- Tứ giác $ABEC$ là tứ giác điều hoà.
- Các đường thẳng AD, ED, BD, CD lần lượt là đường đối trung của các tam giác $\triangle ABC, \triangle EBC, \triangle ABE, \triangle ACE$.
- Tâm nội tiếp I của tam giác ADM là chân đường phân giác trong $\angle BAC$ (do AI, EI là các đường phân giác trong $\angle DAM, \angle DEM$)

Tính chất 3. Quỹ tích các điểm D nằm trong góc $\angle BAC$ và $\frac{d(D,AB)}{d(D,AC)} = \frac{AB}{AC}$ là đường đối trung góc A của tam giác $\triangle ABC$.



Tính chất 4. Cho tam giác $\triangle ABC$. Nếu EF là đường đối song với cạnh BC thì đường đối trung của tam giác $\triangle ABC$ là đường trung tuyến của tam giác $\triangle AEF$.



2. Bài toán

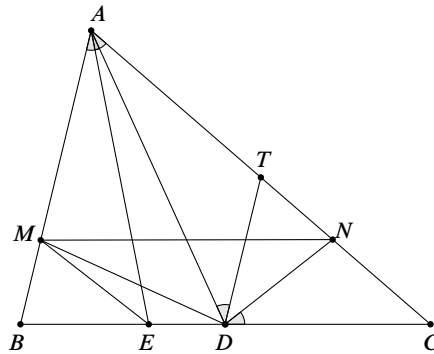
Bài toán 1. Cho tam giác $\triangle ABC$ có điểm D thuộc cạnh BC . Gọi DM, DN, AE là đường đối trung của các tam giác $\triangle ABD, \triangle ACD, \triangle ABC$. Chứng minh rằng

- a) Nếu điểm D là trung điểm cạnh BC thì tứ giác $MNDE$ là hình thang cân.
b) Nếu điểm D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác $\triangle ABC$ thì các đường thẳng BN, CM, AE đồng quy.

Lời giải. a) Do DM, DN là đường đối trung của $\triangle ABD, \triangle ACD$ nên

$$\frac{MA}{MB} = \left(\frac{DA}{DB}\right)^2, \frac{NA}{NC} = \left(\frac{DA}{DC}\right)^2.$$

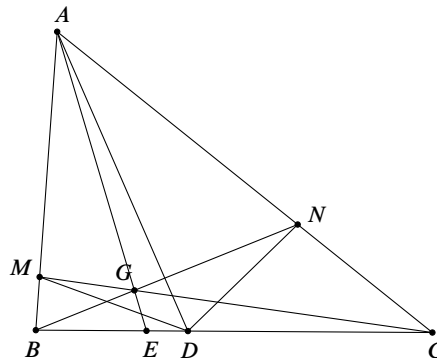
Nếu D là trung điểm BC thì $DB = DC$, suy ra $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC}$, hay $MN \parallel BC$.



Gọi T là trung điểm AC . Do DN, AE là đường đối trung, DT là đường trung bình nên ta có $\angle NDC = \angle TDA = \angle DAM = \angle EAN$. Suy ra A, E, D, N đồng viên. Tương tự A, E, D, M đồng viên. Ta thu được điều phải chứng minh.

b) Do DM, DN, AE là đường đối trung của $\triangle ABD, \triangle ACD, \triangle ABC$ nên

$$\frac{MA}{MB} = \frac{DA^2}{DB}, \frac{NA}{NC} = \frac{DA^2}{DC}, \frac{EB}{EC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$



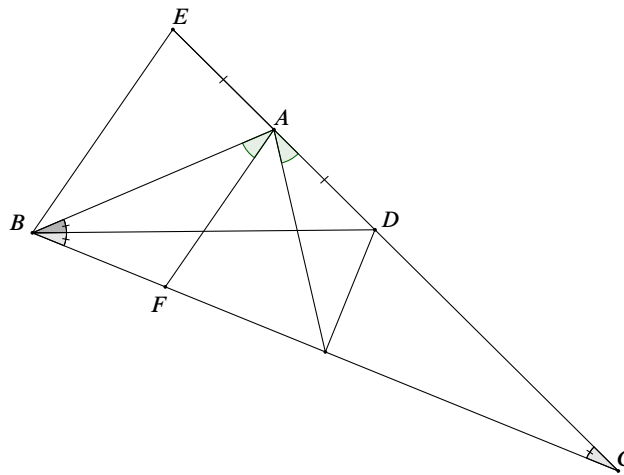
Nếu AD là phân giác thì $\frac{DA}{DB} = \frac{AB}{AC}$. Suy ra

$$\frac{EB}{EC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{MA}{MB} = 1.$$

Theo định lý Ceva, BN, CM, AE đồng quy. □

Bài toán 2. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $\angle B = 2\angle C$. Trung trực cạnh BC cắt cạnh AC tại điểm D . Điểm E đối xứng với điểm D qua điểm A . Chứng minh rằng đường đối trung AF của tam giác ABC song song với đường thẳng BE .

Lời giải. Do D thuộc trung trực BC nên $DB = DC$, hay $\angle DBC = \angle DCB = \frac{1}{2}\angle ABC$. Suy ra $\angle ABD = \angle DCB$, hay AB là tiếp tuyến của (DBC) , suy tiếp $AB^2 = AD \cdot AC$.



Do AF là đường đối trung nên

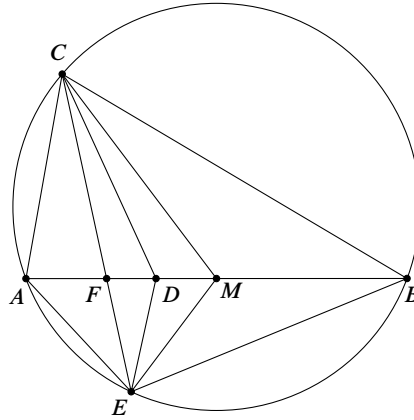
$$\frac{FB}{FC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AC}.$$

Theo định lý Thales, ta được $AF \parallel BE$. □

Bài toán 3. (USA TST 2007) Cho tam giác $\triangle ABC$ thay đổi có $CA^2 + CB^2 = 2 \cdot AB^2$. Các đường thẳng CD, CM lần lượt là phân giác và trung tuyến của tam giác $\triangle ABC$. Giả sử điểm E là điểm thoả mãn điểm D là tâm nội tiếp tam giác $\triangle CME$. Chứng minh rằng trong ba tỷ số $\frac{CM}{ME}, \frac{ME}{EC}, \frac{EC}{CM}$ có đúng một tỷ số không đổi.

Lời giải. Gọi F là giao điểm AE, BC . Do D là tâm nội tiếp tam giác $\triangle CME$ nên CD, ED là phân giác $\angle MCE = \angle MEC$, suy ra CE là đường đối trung của $\triangle CAB$ và $CAEB$ là tứ giác điều hoà. Suy tiếp $\angle CEA = \angle CBM, \angle ACE = \angle BCM$, hay $\triangle CAE \sim \triangle CMB$. Từ đó

$$\frac{AC}{AE} = \frac{MC}{MB} = \frac{2 \cdot MC}{AB}.$$



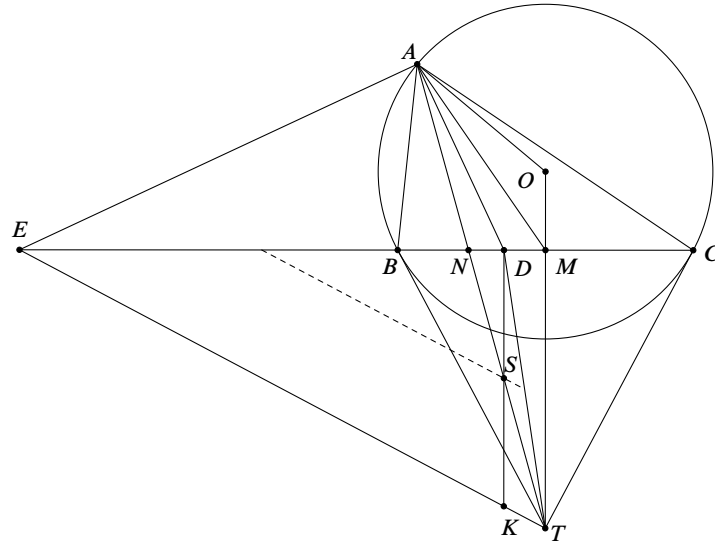
Do MD là phân giác $\triangle CME$, AD là đường đối trung của $\triangle CAE$ nên

$$\frac{MC}{ME} = \frac{FC}{FE} = \frac{CA^2}{CE^2} = \frac{4 \cdot CM^2}{AB^2} = \frac{2(CA^2 + CB^2) - AB^2}{AB^2} = 3.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 4. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) có đường phân giác trong AD , phân giác ngoài AE . Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C cắt nhau tại điểm T . Đường thẳng qua điểm D , vuông góc với cạnh BC cắt đường thẳng AT tại điểm S . Chứng minh rằng điểm S nằm trên một trong ba đường trung bình của tam giác $\triangle TDE$.

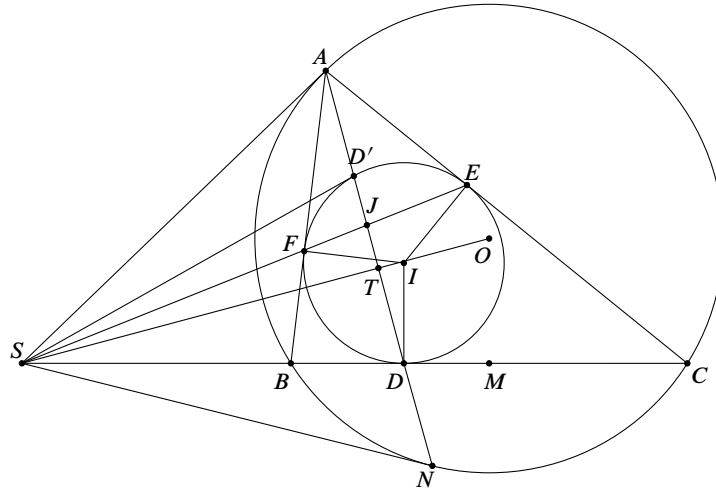
Lời giải. Gọi M là trung điểm BC . AT cắt BC tại N , DS cắt TE tại K .



Ta có $(EDBC) = (NMBC) = -1$, nên $(EDNM) = -1$ hay $(TE, TD, TN, TM) = -1$. Mà $DK \parallel TM$, do đó S là trung điểm DK . Suy ra S nằm trên đường trung bình đỉnh D của tam giác TDE . □

Bài toán 5. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc cạnh BC tại điểm D và đường thẳng AD vuông góc với đường thẳng OI . Chứng minh rằng AD là đường đối trung của tam giác $\triangle ABC$.

Lời giải 1. (I) tiếp xúc AC, AB tại E, F .



Dễ thấy $OA^2 - OD^2 = DB \cdot DC = (p - b)(p - c)$, và

$$IA^2 - ID^2 = IA^2 - r^2 = EF^2 = (p - a)^2.$$

Theo định lý 4 điểm, $OI \perp AD$, nên

$$OA^2 - OD^2 = IA^2 - ID^2 \Leftrightarrow (p - b)(p - c) = (p - a)^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = ab + ac.$$

Ta cần chứng minh AD là đường đối trung của $\triangle ABC$, hay

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{p - b}{p - c} = \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow (b - c)(b^2 + c^2 - ab - ac) = 0.$$

Đẳng thức cuối được suy ra theo chứng minh trên. □

Lời giải 2. Gọi M là trung điểm BC . AI cắt (I) tại điểm thứ hai D' . Do $OI \perp DD'$ nên OI , tiếp tuyến tại D (hay BC) và D' đồng quy tại S . Từ đó suy được $(BCSD) = -1$. Theo Hệ thức MacLaurin, ta được $SB \cdot SC = SD \cdot SM$.

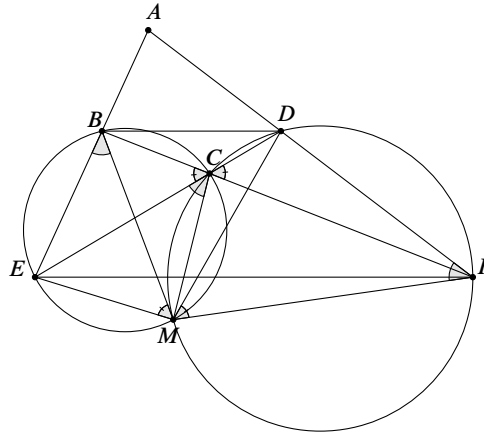
Mặt khác, $\angle OTD = \angle OMD = 90^\circ$ nên $OTDM$ nội tiếp, hay $ST \cdot SO = SD \cdot SM$.

Từ hai điều trên suy ra $ST \cdot SO = SB \cdot SC$ hay $TOBC$ nội tiếp.

Xét (O) , (ATO) , $(TOBC)$. Trục đẳng phương của (O) , $(TOBC)$ là BC , trục đẳng phương của (ATO) , $(TOBC)$ là OT . Mặt khác, do $\triangle ATO$ vuông tại T nên tiếp tuyến tại A của (O) cũng là tiếp tuyến tại A của (ATO) và là trục đẳng phương của chúng. Theo tính chất của tâm đẳng phương, ta được SA là tiếp tuyến của (O) . Từ đó suy ra AD là đường đối trung của tam giác ABC . □

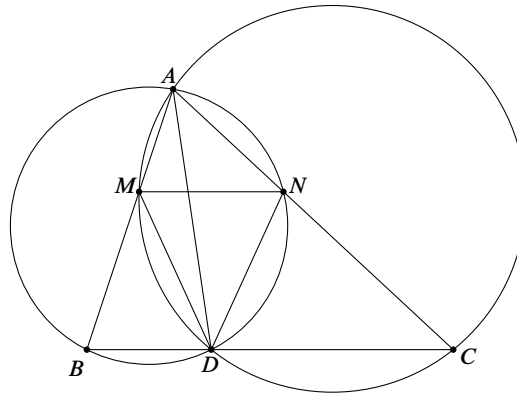
Bài toán 6. (Balkan MO 2009) Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$ sao cho đường thẳng BD song song với đường thẳng EF . Hai đường tròn (CBE) , (CDF) cắt nhau tại điểm thứ hai M . Chứng minh rằng AM là đường đối trung góc A của tam giác $\triangle ABD$.

Lời giải. Ta có $\angle BME = \angle BCE = \angle DCF = \angle DMF$, $\angle EBM = \angle ECM = \angle MFD$. Do đó $\triangle MBE \sim \triangle MFD$.



Suy ra $\frac{d(M, AB)}{d(M, AD)} = \frac{BE}{DF}$. Mà $BD \parallel EF$ nên $\frac{BE}{DF} = \frac{AB}{AD}$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 7. Cho tam giác $\triangle ABC$ có AD là đường đối trung. Đường tròn (ABD) cắt cạnh AC tại điểm M , đường tròn (ACD) cắt cạnh AB tại điểm N . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BC và $DM = DN$.

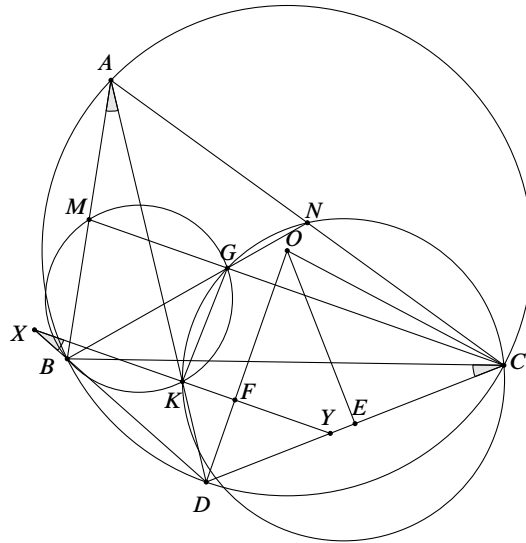


Lời giải. Do $MDAC$ nội tiếp nên $DM = \frac{DB \cdot AC}{AB}$, tương tự $DN = \frac{DC \cdot AB}{AC}$. Mà $\frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, suy ra $DM = DN$.

Cũng do $MDAC$ nội tiếp nên $\frac{MB}{BC} = \frac{DB}{AB}$, tương tự $\frac{NC}{BC} = \frac{DC}{AC}$. Mà $\frac{DB}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, suy ra $\frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$ hay $MN \parallel BC$. $\square$

Bài toán 8. (Đề nghị Gulf MO 2016) Cho tam giác $\triangle ABC$ có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) có trọng tâm G và các đường trung tuyến BN, CM . Hai đường tròn $(GMB), (GNC)$ cắt nhau tại hai điểm G, K . Đường thẳng AK cắt đường tròn (O) tại điểm D . Đường thẳng DB cắt đường tròn (AKB) tại điểm X , đường thẳng DC cắt đường tròn (AKC) tại điểm Y . Chứng minh rằng

- Đường thẳng OD vuông góc với đường thẳng XY .
- Điểm K là trung điểm XY .



Lời giải. a) Ta có $\overline{DB} \cdot \overline{DX} = \overline{DK} \cdot \overline{DA} = \overline{DC} \cdot \overline{DY}$.

Dẫn đến

$$\begin{aligned} XO^2 - YO^2 &= (XO^2 - OD^2) - (YO^2 - OD^2) = \overline{XB} \cdot \overline{XD} - \overline{YC} \cdot \overline{YD} \\ &= (\overline{XD} + \overline{DB}) \overline{XD} - (\overline{YD} + \overline{DC}) \overline{YD} = DX^2 - DY^2. \end{aligned}$$

Từ đó, theo định lý 4 điểm, suy ra $OD \perp XY$.

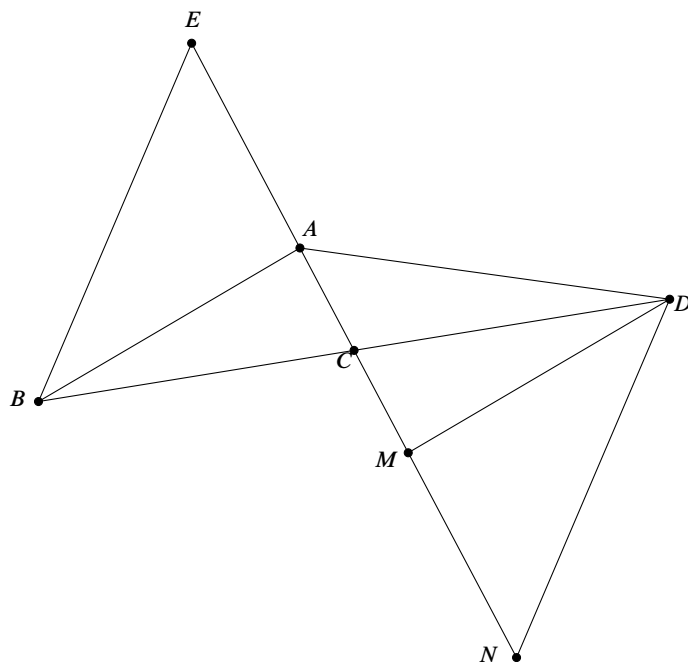
b) Do $ABKX, ACKY, ABDC$ nội tiếp nên $\angle B XK = \angle BAK = \angle BCD$ nên $BCXY$ nội tiếp. Suy ra XY là đường đối song với BC , mà theo bài toán 6 thì DK là đường đối trung của $\triangle DBC$ nên DK là đường trung tuyến của $\triangle DXY$. $\square$

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC NẾU ... THÌ

Lê Phúc Lữ
(FPT Software, thành phố Hồ Chí Minh)

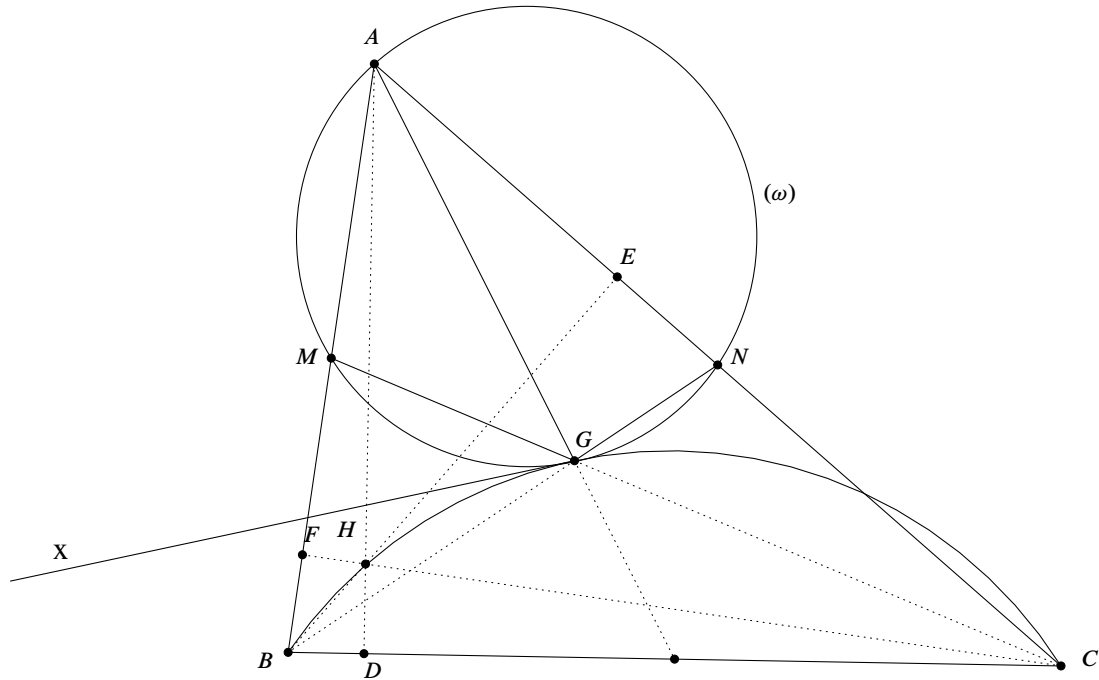
1. Một số ví dụ

Bài toán 1. Cho tam giác ABC . Trên tia đối tia CB lấy điểm D sao cho $CB = CD$, trên tia đối của tia AC lấy E sao cho $AE = 2AC$. Chứng minh nếu $BE = AD$ thì tam giác ABC vuông ở A .



Lời giải. Gọi M, N lần lượt là hai điểm đối xứng của A, E qua B . Khi đó ta có $BEDN, ABMD$ là hình bình hành suy ra $AD = BE = DN$ nên $\triangle ADN$ cân tại D có DM là trung tuyến nên DM vuông góc với AN , mà $AB \parallel DM$ nên $AN \perp AB$ hay $\angle BAC = 90^\circ$. $\square$

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC , G, H lần lượt là trọng tâm và trực tâm. Chứng minh rằng nếu A, M, G, N cùng nằm trên đường tròn (ω) thì (ω) tiếp xúc (BHC) .



Lời giải. Kẻ tiếp tuyến Gx của đường tròn (ω) . Ta thấy tứ giác $AFHE$ nội tiếp nên $\angle BAC + \angle EHF = 180^\circ$, mà $\angle BAC + \angle MGN = 180^\circ$ nên $\angle EHF = \angle MGN$ nên tứ giác $BHGC$ nội tiếp.

Ta có $\angle xGB = \angle MGB - \angle xGB = \angle GMN + \angle GNM - \angle xGB = \angle GNM$
mà MN song song với BC (tính chất đường trung bình) nên ta có $\angle xGB = \angle GNM = \angle GCB$
suy ra Gx cũng là tiếp tuyến của đường tròn (BHC) . $\square$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có G, I lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng

(a) Nếu $IG \parallel BC$ thì $AB + AC = 2BC$.

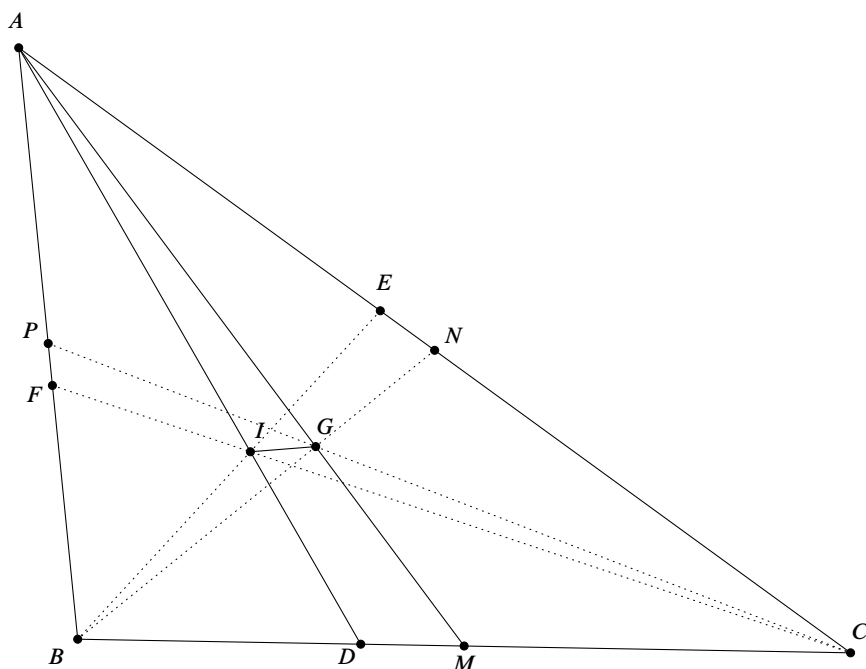
(b) Nếu $IG \perp BC$ thì $IG = \frac{r}{3}$ là bán kính đường tròn nội tiếp.

(c) Nếu $G \in (I)$ thì

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{6}{5}.$$

Lời giải. (a) Vì BI là phân giác góc $\angle B$ nên ta có

$$\frac{AI}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{c}{p - b}.$$



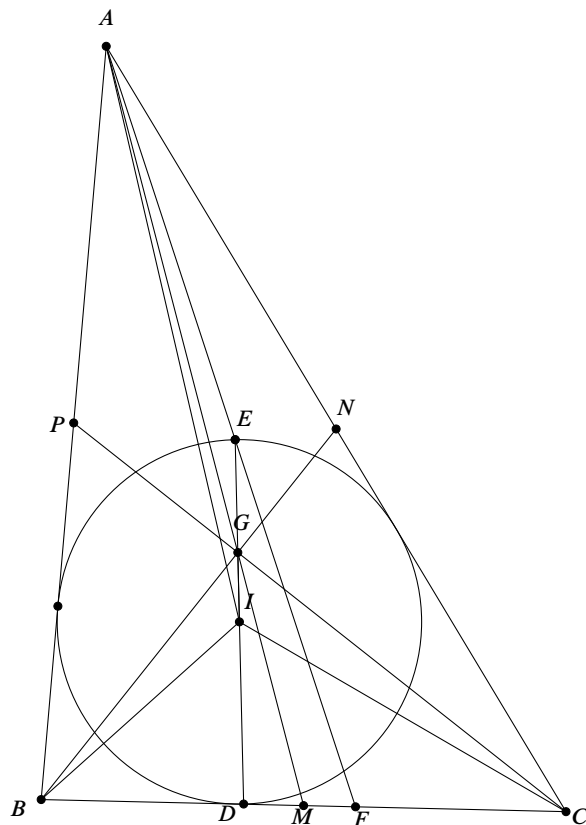
Mà $IG \parallel BC$ nên

$$\frac{IA}{ID} = \frac{GA}{GM} = 2,$$

do đó

$$\frac{c}{p-b} = 2, \quad \text{suy ra} \quad AB + AC = 2BC.$$

(b) Kéo dài IG cắt (I) tại E , D , AE cắt BC tại F . Theo kết quả của một bổ đề quen thuộc, ta có M là trung điểm của DF .



Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle DEF$ với sự thẳng hàng của A, G, M ta được

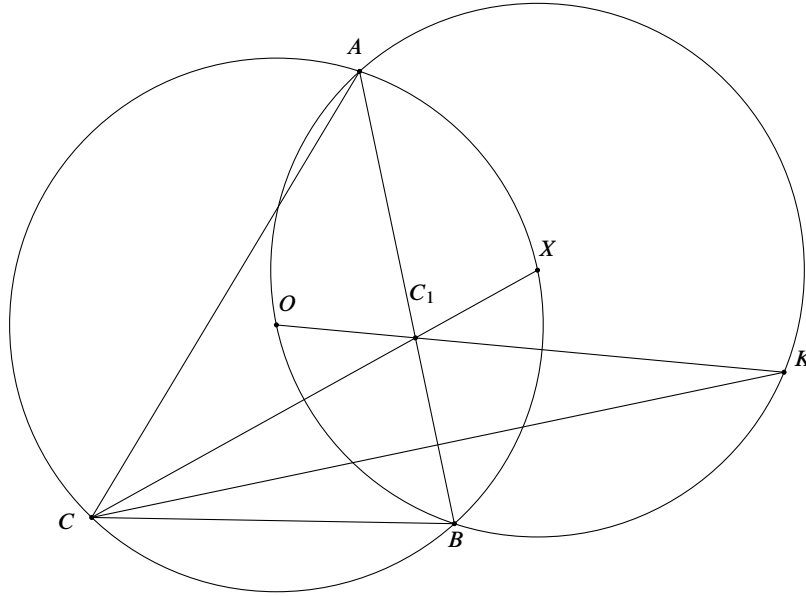
$$\frac{GD}{GE} \cdot \frac{MF}{MD} \cdot \frac{AE}{AF} = 1.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{GD}{GE} = 3, \quad \text{suy ra} \quad \frac{GI}{ID} = \frac{1}{3}.$$

(c) Xin dành cho bạn đọc. □

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ đường phân giác CC_1 . Đường cao kẻ từ đỉnh C cắt OC_1 tại K . Chứng minh rằng nếu $K \in (BOC)$ thì $\angle ACB = 60^\circ$.



Lời giải. Ta có

$$C_1C \cdot C_1X = C_1A \cdot C_1B = C_1O \cdot C_1K$$

nên tứ giác $OXKC$ nội tiếp.

Gọi X là giao điểm của CC_1 và (O) . Ta có $OX \perp AB, CK \perp AB$ nên $CX \parallel OK$. Tứ giác $OXKC$ nội tiếp mà nó cũng là hình thang nên nó là hình thang cân vì thế $XK = OC$. Suy ra $XA = XO = OA$, do đó tam giác AOX đều. Suy ra $\angle AOX = 60^\circ$, tức là $\angle ACB = 60^\circ$. $\square$

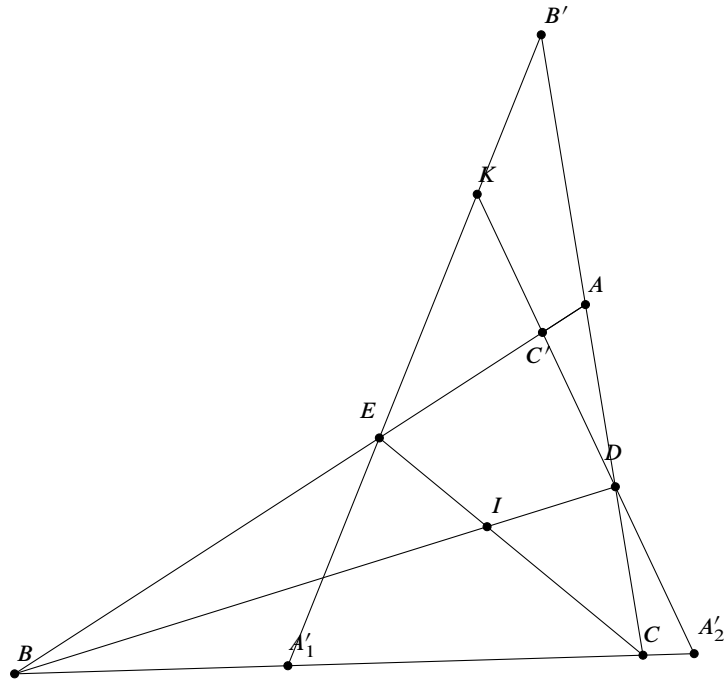
Bài toán 5. Cho tam giác ABC có đường phân giác BD, CE . Gọi x là đường thẳng đối xứng AB qua CE và y là đường thẳng đối xứng với AC qua BD . Gọi K là giao điểm của x, y . Chứng minh rằng

(a) $IK \perp BC, I = BD \cap CE$

(b) Nếu $I \in (KDE)$ thì $AD + AE \leq BC$

Lời giải. (a) Theo tính chất đối xứng ta có tứ giác $B'AKB$ nội tiếp nên $\angle KA_1'B = \angle B'AB$. Suy ra

$$\angle KA_1'C = \angle BAC.$$



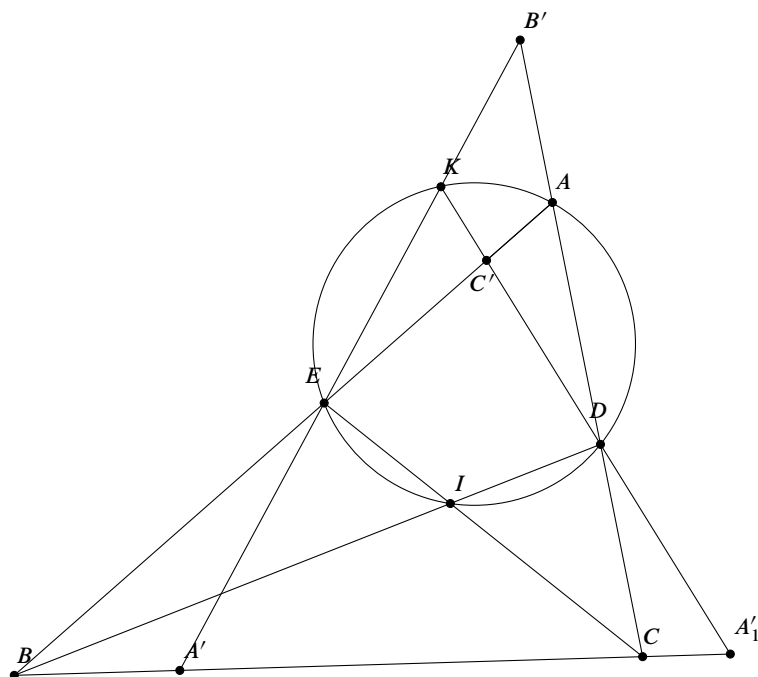
Tương tự

$$\angle KA_2C = \angle BAC.$$

Do đó tam giác A_2KA_1 cân.

Ta sẽ chứng minh KI là phân giác. Thật vậy, xét $\triangle KBA_2$ có I là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc B nên A_2I là phân giác góc $\angle KA_2A_1$. Tương tự A_1I là phân giác góc $\angle KA_1A_2$. Như vậy I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác KA_2A_1 , do đó KI là phân giác góc $\angle K$. Vậy $KI \perp BC$.

(b) Ta có $\angle EKD = 180^\circ - \angle A/2$ xét tổng ba góc của tam giác KA_1A_2 ta suy ra $\angle A = 60^\circ$.



Ta có

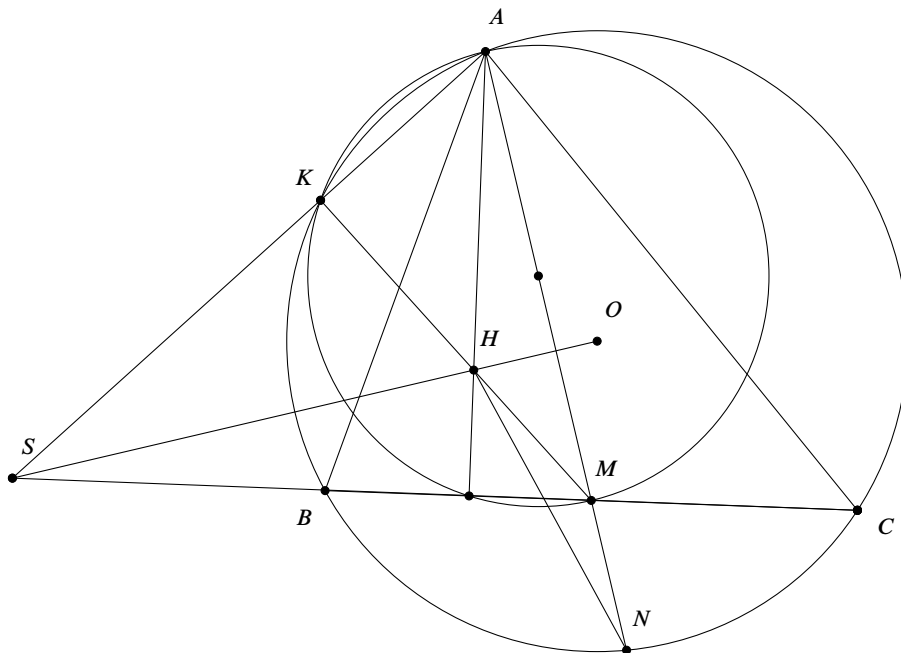
$$AD = \frac{bc}{c+a}, AE = \frac{cb}{b+a}.$$

Bằng biến đổi tương đương ta có

$$AD + AE \leq BC, \quad \text{tương đương với} \quad b^2 + c^2 - a^2 - bc = 0.$$

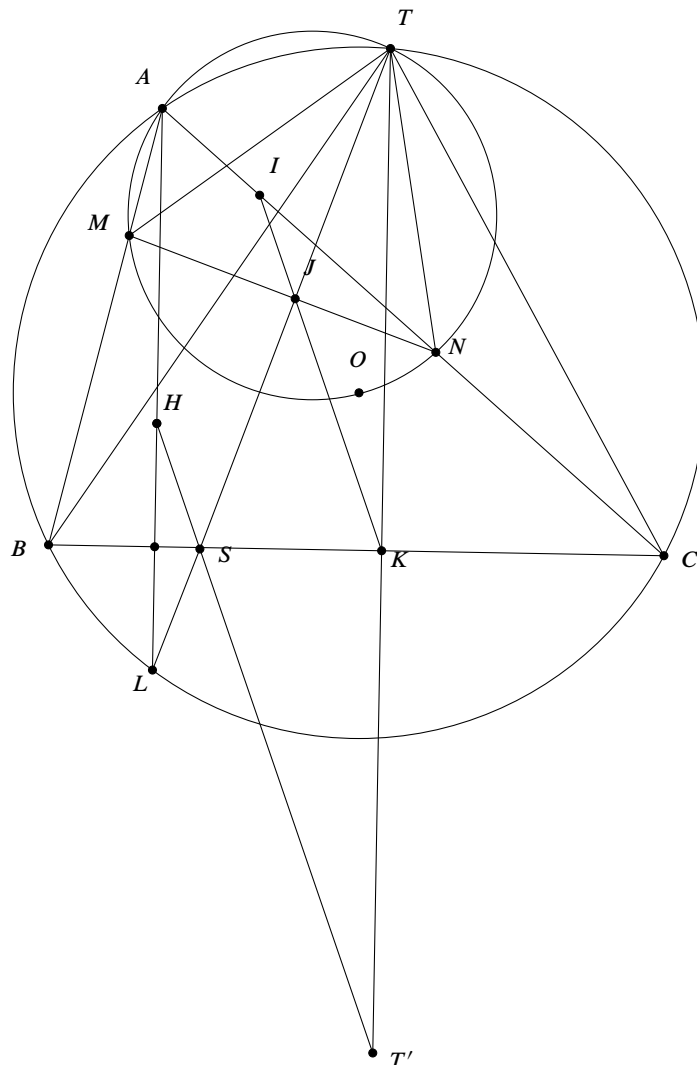
Điều này hiển nhiên đúng theo định lý cos. □

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp (O) và H là trực tâm, M là trung điểm BC . AM , (AM) lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là N , K . Chứng minh rằng nếu $HA = NH$ thì AK, BC, OH đồng quy.



Lời giải. Theo kết quả của một bổ đề quen thuộc thì K, H, M thẳng hàng. Gọi S là giao điểm của AK và BC , khi đó H là trực tâm tam giác ASM . Ta có $SH \perp AM$ mà $OH \perp AM$ (Do $HA = HN$), thành thử S, H, O thẳng hàng. Nói cách khác, ba đường thẳng AK, OH, BC đồng quy. □

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Xét M, N lần lượt di chuyển trên AB, AC và (AMN) cắt (O) tại điểm thứ hai là T . Gọi S là điểm đối xứng với T qua MN . Chứng minh rằng nếu $S \in BC$ thì ST luôn đi qua điểm cố định.



Lời giải. Ta sẽ chứng minh ST đi qua giao điểm L của đường thẳng nối từ A tới trực tâm H với đường tròn (O) .

Gọi T' là điểm đối xứng với T qua BC . TT' cắt BC tại K . I là chân đường vuông góc kẻ từ T của tam giác $\triangle TMN$. IK cắt MN tại S .

Dễ thấy $\triangle TMN \sim \triangle TBC$ nên $\angle TNS = \angle TCB$. Mà $\angle TIK + \angle TCB = 180^\circ$ (do tứ giác $TIKN$ nội tiếp) nên $\angle TIK + \angle TNS = 180^\circ$, do đó tứ giác $TISN$ nội tiếp, suy ra $\angle S = \angle I = 90^\circ$.

Ta có S đối xứng với T qua J , T' đối xứng với T qua K mà I, J, K thẳng hàng nên ST' là đường thẳng Steiner của tam giác ABC ứng với điểm T , suy ra nó đi qua trực tâm H .

Ta có T', S, H thẳng hàng, lấy đối xứng chúng qua BC ta có L, S, T thẳng hàng, hay ST đi qua một điểm cố định. $\square$

2. Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Cho tam giác ABC không cân có AD, BE, CF là đường phân giác. Chứng minh rằng nếu $DE = DF$ thì $\angle A > 90^\circ$.

Bài tập 2. Cho tam giác ABC có $M \in BC$ và H, K lần lượt là hình chiếu của M lên AB, AC . Gọi P, Q lần lượt là tâm của $(ABH), (ACH)$. Chứng minh rằng nếu $PQ \parallel BC$ thì trung điểm của OM là tâm của (MPQ) .

Bài tập 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AB, AC tại E, F . (O_1) qua A, B và tiếp xúc với (I) tại M . (O_2) qua A, C và tiếp xúc với (I) tại N . (O_1) và (O_2) tiếp xúc nhau tại D .

(a) Chứng minh AN, FM và AD đồng quy tại K .

(b) Chứng minh K thuộc đường thẳng OI .

OLYMPIC GẶP GỠ TOÁN HỌC LẦN VIII

Lớp 10

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên n tồn tại vô hạn cách để viết n dưới dạng

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm k^2,$$

với số nguyên dương k và các dấu $+$, $-$ được chọn phù hợp.

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh không vượt quá 1. Gọi p , R , r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

$$p(1 - 2Rr) \leq 1.$$

Bài 4. Cho nửa đường tròn đường kính BC cố định và điểm A di chuyển trên đó. Hai điểm D và E nằm ngoài tam giác ABC sao cho tam giác DAB cân tại D và tam giác EAC cân tại E . Biết $\angle DAB = \angle EAC = \alpha$ không đổi. Gọi T là trung điểm của đoạn DE . Chứng minh rằng điểm T di chuyển trên đường tròn cố định khi điểm A di chuyển.

Bài 5. Có 10 bạn học sinh đang chơi một trò chơi. Biết rằng khoảng cách giữa các bạn là khác nhau và mỗi bạn đều có một quả bóng. Khi có hiệu lệnh của cô giáo, mỗi bạn phải chuyển quả bóng cho bạn đứng gần mình nhất. Gọi A là số bạn có bóng. Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Lớp 11

Bài 1. Giải phương trình lượng giác

$$(2 \cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 1.$$

Bài 2. Cho a, b, c là ba số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(3a + 2b + c)^3 \geq 6\sqrt{3}(a + b + c)(ab + bc + ca).$$

Bài 3. Cho dãy số

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

và k là một số nguyên dương lẻ bất kỳ.

a) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương lẻ thì u_k là ước của u_{kn} .

b) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương chẵn thì u_k^2 là ước của $u_{kn} - 2$. Đặc biệt, nếu $n = 2$ thì $u_k^2 = u_{2k} - 2$. Từ đó hãy chứng minh $u_{2k} + 2$ không thể là lũy thừa bậc 5 của bất kỳ số nguyên dương nào.

Bài 4. Cho tam giác $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường thẳng qua I và vuông góc với CI cắt BC và cung nhỏ BC (không chứa A) của đường tròn (O) lần lượt tại U, V . Đường thẳng qua U và song song với AI cắt AV tại X . Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng XI và AI vuông góc với nhau thì đường thẳng XI đi qua trung điểm đoạn AC .

Bài 5. Có 32 chiếc đĩa xếp thành nhiều chồng. Ở mỗi bước ta chọn một chồng có k đĩa, sau đó bốc thêm vào chồng này k đĩa nữa lấy từ một chồng khác có không ít đĩa hơn. Hỏi sau hữu hạn bước có thể xếp tất cả đĩa vào một chồng hay không?

Lớp 12

Bài 1. Cho số tự nhiên m . Xét dãy số

$$(u_n) : \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 + u_n - u_n^m, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Chứng minh rằng khi $m = 2$ thì dãy (u_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy.
- Chứng minh rằng khi $m = 3$ thì dãy (u_n) không hội tụ.

Bài 2. Cho a, b, c là ba số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(3a + 2b + c)^3 \geq 6\sqrt{3} (a + b + c) (ab + bc + ca).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 3. Vật chất di truyền ở vi khuẩn *Mathobacterium* là ADN dạng **vòng** gồm n gen (n nguyên dương) đánh số từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ. Enzym Squarase phiên mã theo quy tắc: Phiên mã gen thứ nhất; sau đó trượt tới 4 gen, phiên mã gen đó; tiếp tục trượt tới 9 gen, và phiên mã gen đó (tức là lần lượt phiên mã gen thứ 1, thứ 5, thứ 14, ... và cứ xoay vòng như vậy). Tìm n để vi khuẩn phát triển bình thường (tất cả các gen đều được phiên mã).

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm D thuộc đoạn BC . Đường tròn (I_1) tiếp xúc AD tại X , tiếp xúc BD và tiếp xúc trong với (O) . Đường tròn (I_2) tiếp xúc AD tại Y , tiếp xúc CD và tiếp xúc trong với (O) (X, Y thuộc đoạn AD). Đường thẳng qua X vuông góc với AI_1 cắt đường thẳng qua Y vuông góc với AI_2 tại K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK, XY .

- Chứng minh rằng đường tròn đường kính AK trực giao với các đường tròn $(I_1), (I_2)$.
- Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định khi D di động trên đoạn BC .

Bài 5. Có $2n$ viên sỏi (n nguyên dương cho trước) đang được xếp thành 3 đống. Mỗi lần thực hiện cho phép lấy một nửa số viên sỏi từ đống sỏi có chẵn viên sỏi và chuyển sang đống khác. Chứng minh rằng, dù các đống sỏi ban đầu được xếp thế nào, sau một số hữu hạn bước thực hiện như thế, ta có thể tạo ra một đống sỏi có đúng n viên sỏi.

CÁC BÀI TOÁN ĐỀ NGHỊ

Phần I - Đề bài

1. Đại số, giải tích

Bài toán 1. Cho số tự nhiên m . Xét dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 + u_n - u_n^m, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- (a) Chứng minh rằng khi $m = 2$ thì dãy (u_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy.
- (b) Chứng minh rằng khi $m = 3$ thì dãy (u_n) không hội tụ.

Bài toán 2. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = \frac{15}{8}, u_2 = 2, \\ u_{n+2} + \frac{1}{2} = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_n + \frac{n^2}{4n^2 - 1}}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

Bài toán 3. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) và dãy số (x_n) là một cấp số cộng có công sai khác không thỏa mãn $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(x_k)$ là lập phương của một số nguyên. Chứng minh rằng $f(x)$ là lập phương của một đa thức bậc nhất.

Bài toán 4. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq \frac{23(a+b+c)^2}{27(ab+bc+ca)}.$$

Bài toán 5. Cho a, b, c là ba số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(3a + 2b + c)^3 \geq 6\sqrt{3}(a + b + c)(ab + bc + ca).$$

Bài toán 6. Cho số tự nhiên $m \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại đúng một dãy số nguyên dương (a_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 > 1, \\ a_{n+1}^m + 1 = a_n a_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bài toán 7. Cho đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên và có n nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng đa thức $(P(x))^2 + 1$ có một nhân tử có bậc thấp nhất là $2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Bài toán 8. Tìm tất cả các hàm số liên tục, thỏa mãn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) - f(y)$ là số hữu tỉ, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và y thỏa mãn $x - y$ hữu tỉ.

2. Hình học

Bài toán 1. Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh không vượt quá 1. Gọi p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

$$p(1 - 2Rr) \leq 1.$$

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và M, N là trung điểm hai cạnh AB, CD . Đường tròn (OMN) cắt đường tròn (O) tại hai điểm X, Y ; cắt lần lượt các đường tròn $(CDM), (ABN)$ tại điểm thứ hai Z, T .

Chứng minh rằng hai đường thẳng XY, ZT song song.

Bài toán 3. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai $\triangle ABC, \triangle ADC$ lần lượt ngoại tiếp hai đường tròn bằng nhau $(I_1), (I_2)$. Đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T và tiếp xúc hai cạnh AB, AD tại E, F . Tiếp tuyến tại A, T cắt nhau tại điểm S . Chứng minh rằng

- a) Tứ giác $I_1 I_2 C T$ nội tiếp.
- b) Ba điểm S, I_1, I_2 thẳng hàng.

Bài toán 4. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường thẳng qua I và vuông góc với CI cắt BC và cung nhỏ BC (không chứa A) của đường tròn (O) lần lượt tại U, V . Đường thẳng qua U và song song với AI cắt AV tại X .

Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng XI và AI vuông góc với nhau thì đường thẳng XI đi qua trung điểm đoạn AC .

Bài toán 5. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) và đường kính AA' . Đường thẳng qua điểm A' và song song với phân giác trong góc $\angle BAC$ cắt hai cạnh BA, BC tại B_1, B_2 . Đường thẳng qua điểm A' và song song với phân giác ngoài góc $\angle BAC$ cắt hai cạnh CA, CB tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng hai đường tròn $(BB_1 B_2), (CC_1 C_2)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi $\triangle ABC$ vuông tại A .

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm D thuộc đoạn BC . Đường tròn (I_1) tiếp xúc AD tại X , tiếp xúc BD và tiếp xúc trong với (O) . Đường tròn (I_2) tiếp xúc AD tại Y , tiếp xúc CD và tiếp xúc trong với (O) (X, Y thuộc đoạn AD). Đường thẳng qua X vuông góc với AI_1 cắt đường thẳng qua Y vuông góc với AI_2 tại K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK, XY .

- a) Chứng minh rằng đường tròn đường kính AK trực giao với các đường tròn $(I_1), (I_2)$.
- b) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định khi D di động trên đoạn BC .

Bài toán 7. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC . Các điểm E, F trên tia BA, CA sao cho $BE = CF = BC$. Đường thẳng qua E song song cạnh BF cắt đường thẳng qua điểm F song song cạnh CE tại điểm D . Dựng tam giác đều XBC, YBC .

- a) Chứng minh rằng đường thẳng AD luôn đi qua điểm cố định khi điểm A di chuyển.
- b) Hai đường thẳng thay đổi qua điểm X lần lượt cắt hai đường tròn (EXY) , (FXY) tại M, N và P, Q . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua trung điểm MQ và NP luôn đi qua điểm cố định khi MN, PQ di chuyển.

Bài toán 8. Cho nửa đường tròn đường kính BC cố định và điểm A di chuyển trên đó. Hai điểm D và E nằm ngoài tam giác ABC sao cho tam giác DAB cân tại D và tam giác EAC cân tại E . Biết $\angle DAB = \angle EAC = \alpha$ không đổi. Gọi T là trung điểm của đoạn DE . Chứng minh rằng điểm T di chuyển trên đường tròn cố định khi điểm A di chuyển.

3. Số học

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên n tồn tại vô hạn cách để viết n dưới dạng

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm k^2,$$

với số nguyên dương k và các dấu $+$, $-$ được chọn phù hợp.

Bài toán 2. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_0 = 2016$, $a_n = a_{n-1}^2 + 1 \forall n > 0$. Tìm số dư của a_{2016} khi chia cho 2002.

Bài toán 3. Cho dãy số

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

và k là một số nguyên dương lẻ bất kỳ.

- Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương lẻ thì u_k là ước của u_{kn} .
- Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương chẵn thì u_k^2 là ước của $u_{kn} - 2$. Đặc biệt, nếu $n = 2$ thì $u_k^2 = u_{2k} - 2$. Từ đó hãy chứng minh $u_{2k} + 2$ không thể là lũy thừa bậc 5 của bất kỳ số nguyên dương nào.

Bài toán 4. Cho $p > 2$ là một số nguyên tố và f là đa thức hệ số nguyên có bậc $p - 1$. Giả sử với mọi số nguyên a, b , nếu $a - b$ không chia hết cho p thì $f(a) - f(b)$ cũng không chia hết cho p . Chứng minh rằng hệ số cao nhất của f (tức là hệ số ứng với x^{p-1}) chia hết cho p .

Bài toán 5. Vật chất di truyền ở vi khuẩn *Mathobacterium* là ADN dạng **vòng** gồm n gen (n nguyên dương) đánh số từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ. Enzym Squarase phiên mã theo quy tắc: Phiên mã gen thứ nhất; sau đó trượt tới 4 gen, phiên mã gen đó; tiếp tục trượt tới 9 gen, và phiên mã gen đó (tức là lần lượt phiên mã gen thứ 1, thứ 5, thứ 14, ... và cứ xoay vòng như vậy). Tìm n để vi khuẩn phát triển bình thường (tất cả các gen đều được phiên mã).

4. Tổ hợp

Bài toán 1. Có 32 chiếc đĩa xếp thành nhiều chồng. Ở mỗi bước ta chọn một chồng có k đĩa, sau đó bốc thêm vào chồng này k đĩa nữa lấy từ một chồng khác có không ít đĩa hơn. Hỏi sau hữu hạn bước có thể xếp tất cả đĩa vào một chồng hay không?

Bài toán 2. Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ được nối với nhau bởi một số đoạn thẳng. Hai điểm được gọi là kề nhau nếu có một đoạn thẳng nối chúng. Hệ n điểm gọi là “đủ” nếu hai điểm bất kì hoặc kề nhau hoặc cùng kề với một điểm thứ ba.

- (a) Tìm số đoạn thẳng nhỏ nhất của hệ n điểm đủ.
- (b) Với $n = 6$, cho lục giác $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$. Cần ít nhất bao nhiêu đoạn thẳng nữa để hệ 6 đỉnh của lục giác trở thành đủ?

Bài toán 3. Có 10 bạn học sinh đang chơi một trò chơi. Biết rằng khoảng cách giữa các bạn là khác nhau và mỗi bạn đều có một quả bóng. Khi có hiệu lệnh của cô giáo, mỗi bạn phải chuyển quả bóng cho bạn đứng gần mình nhất. Gọi A là số bạn có bóng. Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

Bài toán 4. Ở đất nước Panem có tất cả 12 quận. Người ta xây dựng các con đường sao cho với hai quận A, B bất kì, luôn có một đường đi hai chiều nối quận A và quận B . Hai quận C, D được gọi là thông với nhau nếu ta có thể đi từ C đến D mà không phải đi qua quận nào khác. Gọi M là tập hợp tất cả các cặp quận thông với nhau. Biết rằng không tồn tại ba quận X, Y, Z đôi một thông nhau, nghĩa là đồng thời thỏa mãn X thông với Y , Y thông với Z và Z thông với X . Chứng minh rằng $|M| \leq 36$.

Bài toán 5. Có $2n$ viên sỏi (n nguyên dương cho trước) đang được xếp thành 3 đống. Mỗi lần thực hiện cho phép lấy một nửa số viên sỏi từ đống sỏi có chẵn viên sỏi và chuyển sang đống khác. Chứng minh rằng, dù các đống sỏi ban đầu được xếp thế nào, sau một số hữu hạn bước thực hiện như thế, ta có thể tạo ra một đống sỏi có đúng n viên sỏi.

Phần II - Lời giải

1. Đại số, giải tích

Bài toán 1. Cho số tự nhiên m . Xét dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 + u_n - u_n^m, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Chứng minh rằng khi $m = 2$ thì dãy (u_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

(b) Chứng minh rằng khi $m = 3$ thì dãy (u_n) không hội tụ.

Lời giải. a) Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh $u_n \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$, $\forall n \in \mathbb{N} (*)$.

Thật vậy, với $n = 1$ thì $(*)$ đúng. Giả sử $u_n \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$. Khi đó ta cần chứng minh

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} = 1 + u_n - u_n^2 \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}.$$

Điều này luôn đúng do $u_n \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$. Xét hàm số

$$f(x) = 1 + x - x^2, \text{ với } x \in D = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right]$$

là hàm giảm do $f'(x) = 1 - 2x \leq 0, \forall x \in D$. Hơn nữa, $f(D) \subset D$ nên $f(f(x))$ là hàm tăng trên D .

Ta có $u_2 = \frac{5}{4}, u_3 = \frac{11}{16}$ nên $u_1 < u_3$, suy ra $f(u_1) > f(u_3)$ hay $u_2 > u_4$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được dãy (u_{2n+1}) là dãy tăng và bị chặn trên, dãy (u_{2n}) là dãy giảm và bị chặn dưới nên hai dãy hội tụ. Đặt $a = \lim u_{2n+1}$ và $b = \lim u_{2n}$ với $a, b \in D$.

Từ công thức truy hồi, ta có

$$a = f(b) = f(f(a)) \Leftrightarrow (a - 1)^3 (a + 1) = 0.$$

Ta nhận nghiệm $a = 1 \in D$, được $b = f(a) = 1 = a$. Suy ra khi $m = 2$, dãy (u_n) hội tụ và $\lim u_n = 1$.

b) Ta sẽ chứng minh $u_n \notin \{-1, 0, 1\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Giả sử tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_{n_0+1} = 0$. Khi đó $1 + u_{n_0} - u_{n_0}^3 = 0$. Điều này cho ta u_{n_0} là một số vô tỉ, mâu thuẫn do $u_{n_0} = f(f(\dots f(u_1) \dots))$ ($n_0 - 1$ lần f) là một số hữu tỉ do $u_1 = \frac{1}{2}$. Trường hợp $u_n = -1$ chứng minh tương tự.
- Giả sử tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ nhỏ nhất sao cho $u_{n_0+1} = 1$. Khi đó $1 = 1 + u_{n_0} - u_{n_0}^3$, hay $u_{n_0} \in \{0, -1\}$. Điều này là vô lý theo chứng minh trên.

Giả sử dãy đã cho hội tụ khi $m = 3$. Từ công thức truy hồi, ta có $\lim u_n = 1$ và

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= u_n (1 - u_n^2) = -u_n (u_n + 1) (u_n - 1) \\ &= (-1)^2 u_n (u_n + 1) u_{n-1} (u_{n-1} + 1) (u_{n-1} - 1). \end{aligned}$$

Suy ra

$$u_{n+1} - 1 = c \cdot (-1)^n \cdot u_n (u_n + 1) \cdots u_1 (u_1 + 1). \quad (1)$$

trong đó c là hằng số khác 0.

Đặt $v_n = |u_n (u_n + 1)|$ thì $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ và $\lim v_n = 2$. Từ (1) ta có $\lim v_1 v_2 \cdots v_n = 0$.

Mặt khác, do $\lim v_n = 2$ nên tồn tại n_0 sao cho $v_n > \frac{3}{2}, \forall n \geq n_0$. Khi đó, đặt $A = v_1 v_2 \cdots v_{n_0}$ thì $A > 0$ và

$$v_1 v_2 \cdots v_n \geq A \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-n_0}.$$

Do đó $\lim v_1 v_2 \cdots v_n = +\infty$ (mâu thuẫn). Vậy khi $m = 3$, dãy u_n không hội tụ. $\square$

Bài toán 2. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = \frac{15}{8}, u_2 = 2, \\ u_{n+2} + \frac{1}{2} = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_n + \frac{n^2}{4n^2 - 1}}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

Lời giải. Từ công thức truy hồi, ta có

$$u_{n+2} + \frac{1}{2} = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_n + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(4n^2 - 1)}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n \geq \frac{15}{8}, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có

$$u_{n+2}^2 + u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n + \frac{1}{4(4n^2 - 1)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Công thức trên có thể biến đổi thành

$$u_{n+2}^2 + u_{n+2} + u_{n+1} + \frac{1}{8(2n+1)} = u_{n+1}^2 + u_{n+1} + u_n + \frac{1}{8(2n-1)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ đó ta suy ra

$$u_{n+1}^2 + u_{n+1} + u_n + \frac{1}{8(2n-1)} = u_2^2 + u_2 + u_1 + \frac{1}{8} = 8, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta viết lại thành

$$(u_{n+1} - 2)(u_{n+1} + 3) + (u_n - 2) + \frac{1}{8(2n-1)} = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Đặt $v_n = u_n - 2$. Khi đó ta có $v_1 = -\frac{1}{8}$, $v_2 = 0$, và

$$v_{n+1}(v_{n+1} + 5) + v_n + \frac{1}{8(2n-1)} = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $-\frac{1}{8(2n-1)} \leq v_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} (*)$.

Thật vậy, với $n = 1$ thì $(*)$ đúng. Giả sử có $-\frac{1}{8(2n-1)} \leq v_n \leq 0$ thì

$$v_{n+1}(v_{n+1} + 5) = -\left[v_n + \frac{1}{8(2n-1)}\right] \leq 0,$$

suy ra $v_{n+1} \leq 0$. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng

$$v_{n+1}(v_{n+1} + 5) \geq -\frac{1}{8(2n+1)} \left[-\frac{1}{8(2n+1)} + 5\right]. \quad (2)$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$-\left[v_n + \frac{1}{8(2n-1)}\right] \geq -\frac{1}{8(2n+1)} \left[-\frac{1}{8(2n+1)} + 5\right].$$

Khi đó ta có thể viết bất đẳng thức trên thành

$$v_n \leq \frac{192n^2 + 30n - 31}{64(2n-1)(2n+1)^2}.$$

Điều này đúng do

$$v_n \leq 0 \leq \frac{192n^2 + 30n - 31}{64(2n-1)(2n+1)^2} \text{ với } n \geq 1.$$

Như vậy ta có (1) đúng. Do $f(x) = x^2 + 5x$ là hàm đồng biến trên $(-1, +\infty)$ và ta có $v_{n+1} > -1$, $-\frac{1}{8(2n+1)} > -1$ nên từ (1), ta có $v_{n+1} > -\frac{1}{8(2n+1)}$.

Như vậy, theo nguyên lý quy nạp, ta có $-\frac{1}{8(2n-1)} \leq v_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Từ đó, theo định lý kẹp, ta có $\lim v_n = 0$ hay $\lim u_n = 2$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 3. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) và dãy số (x_n) là một cấp số cộng có công sai khác không thỏa mãn $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(x_k)$ là lập phương của một số nguyên. Chứng minh rằng $f(x)$ là lập phương của một đa thức bậc nhất.

Lời giải. Do (x_n) là cấp số cộng nên số hạng tổng quát của dãy có dạng $x_n = un + v, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (u, v là hằng số). Đặt $f(x_i) = y_i^3$ thì (y_n) là dãy số nguyên.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_{n+1} - y_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{f(x_{n+1})} - \sqrt[3]{f(x_n)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u(n+1) + v) - f(un + v)}{\sqrt[3]{f^2(u(n+1) + v)} + \sqrt[3]{f(u(n+1) + v)f(un + v)} + \sqrt[3]{f^2(un + v)}}. \end{aligned}$$

Vì $f(u(n+1)+v) - f(un+v)$ là một đa thức bậc không quá 2 theo n nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(u(n+1)+v) - f(un+v)}{n^2} = a \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác, do $f^2(u(n+1)+v)$, $f(u(n+1)+v) \cdot f(un+v)$, $f^2(un+v)$ là các đa thức bậc 6 theo n và có hệ số bậc cao nhất đều dương nên ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{f^2(u(n+1)+v)} + \sqrt[3]{f(u(n+1)+v)f(un+v)} + \sqrt[3]{f^2(un+v)}}{n^2},$$

tồn tại và khác 0.

Do đó ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} (y_{n+1} - y_n) = \alpha \in \mathbb{R}$. Kết hợp với $(y_{n+1} - y_n)$ là dãy số nguyên nên dãy này là dãy dừng kể từ số hạng nào đó. Nói cách khác: $\exists n_o : \forall n \geq n_o, y_{n+1} - y_n = \alpha$, suy ra

$$\forall n \geq n_o, y_n = \alpha n + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ là các hằng số}).$$

Vậy $\forall n \geq n_o, f(un+v) = (\alpha n + \beta)^3$. Từ đó suy ra

$$f(n) = \left(\frac{\alpha}{u}n - \frac{\alpha v}{u} + \beta \right)^3, \forall n \geq n_o.$$

Hai đa thức $f(x)$ và $\left(\frac{\alpha}{u}x - \frac{\alpha v}{u} + \beta \right)^3$ bằng nhau tại vô số điểm nên ta có

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{u}x - \frac{\alpha v}{u} + \beta \right)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nếu $\alpha = 0$ thì $f(x)$ là đa thức bậc 0 (trái với giả thiết). Vậy $f(x)$ là lập phương của một đa thức bậc nhất. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 4. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} \geq \frac{23(a+b+c)^2}{27(ab+bc+ca)}. \quad (3)$$

Lời giải. Chú ý rằng

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)(ab+bc+ca)}{b+c} &= a(a+b) + \frac{abc}{b+c} + \frac{b^2c}{b+c} \\ &= a(a+b) + \frac{abc}{b+c} + bc - \frac{bc^2}{b+c}, \end{aligned}$$

nên (3) tương đương với

$$\sum \left[a(a+b) + \frac{abc}{b+c} + bc - \frac{bc^2}{b+c} \right] \geq \frac{23}{27}(a+b+c)^2,$$

tương đương với

$$(a+b+c)^2 + abc \sum \frac{1}{b+c} \geq \frac{23}{27}(a+b+c)^2 + \sum \frac{bc^2}{b+c},$$

thu gọn thành

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^2 + abc \sum \frac{1}{b+c} \geq \sum \frac{bc^2}{b+c}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\sum \frac{1}{b+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^2 + \frac{9abc}{2(a+b+c)} \geq \sum \frac{bc^2}{b+c},$$

hay là

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^3 + \frac{9}{2}abc \geq \sum \frac{bc^2(a+b+c)}{b+c},$$

tương đương với

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^3 + \frac{9}{2}abc \geq \sum \left(\frac{abc^2}{b+c} + bc^2 \right)$$

hoặc

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^3 + \frac{9}{2}abc \geq ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \sum \frac{c}{b+c}. \quad (4)$$

Để thấy (4) chính là hệ quả của hai bất đẳng thức sau

$$\frac{4}{27}(a+b+c)^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2, \quad (5)$$

$$\frac{9}{2}abc \geq abc \sum \frac{c}{b+c}. \quad (6)$$

Ta thấy (5) là một bất đẳng thức quen thuộc của Vasile, ta sẽ chứng minh (6). Thật vậy vì $abc \geq 0$ nên $\frac{9}{2}abc \geq 2abc$, và

$$2abc - abc \sum \frac{c}{b+c} = \frac{abc(a^2b + b^2c + c^2a + abc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0,$$

nên (6) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0, b = 2c$ cùng các hoán vị tương ứng. Bài toán được chứng minh. $\square$

Nhận xét. Chứng minh (5). Giả sử a là số nằm giữa b và c , khi đó $c(c-a)(a-b) \geq 0$, cho nên

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc + c(c-a)(a-b) = a(b+c)^2.$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, thì

$$a(b+c)^2 = 4 \cdot a \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \leq 4 \left[\frac{a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2}}{3} \right]^3 = \frac{4}{27}(a+b+c)^3.$$

Bài toán 5. Cho a, b, c là ba số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(3a + 2b + c)^3 \geq 6\sqrt{3}(a + b + c)(ab + bc + ca). \quad (7)$$

Lời giải 1. Đặt

$$f(a, b, c) = (3a + 2b + c)^3 - 6\sqrt{3}(a + b + c)(ab + bc + ca).$$

Ta có

$$f(a, b, c) - f(0, a + b, a + c) = 6\sqrt{3}a(2a^2 + 2ab + bc + 2ca) \geq 0.$$

Do đó $f(a, b, c) \geq f(0, a + b, a + c)$, như vậy ta chỉ cần chứng minh (7) trong trường hợp $a = 0$. Lúc này bất đẳng thức trở thành

$$(2b + c)^3 \geq 6\sqrt{3}bc(b + c). \quad (8)$$

Nếu trong b, c có một số bằng 0 thì (8) đúng. Xét trường hợp b, c đều dương đặt $b = kc$ ($k > 0$) khi đó (8) trở thành

$$(2k + 1)^3 \geq 6\sqrt{3}k(k + 1).$$

Xét hàm số

$$f(k) = \frac{(2k + 1)^3}{k(k + 1)},$$

ta có

$$f'(k) = \frac{(2k + 1)^2(2k^2 + 2k - 1)}{k^2(k + 1)^2}.$$

Do đó phương trình $f'(k) = 0$ có nghiệm duy nhất $k = k_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Từ đó dễ dàng suy ra

$$f(k) \geq f(k_0) = 6\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0, b = \frac{(\sqrt{3}-1)c}{2}$. Bài toán được chứng minh. $\square$

Lời giải 2. Đặt $x = a + b, y = a + c, (x, y \geq 0)$ khi đó $3a + 2b + c = 2x + y$, ta có đánh giá $a + b + c \leq x + y$ và

$$ab + bc + ca \leq ab + bc + ca + a^2 = (a + b)(a + c) = xy.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(2x + y)^3 \geq 6\sqrt{3}xy(x + y).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3}xy(x + y) &= 3\sqrt{3} \cdot x(\sqrt{3} + 1) \cdot y \cdot (x + y)(\sqrt{3} - 1) \\ &\leq 3\sqrt{3} \left[\frac{x(\sqrt{3} + 1) + y + (x + y)(\sqrt{3} - 1)}{3} \right]^3 \\ &= (2x + y)^3. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 6. Cho số tự nhiên $m \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại đúng một dãy số nguyên dương (a_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 > 1, \\ a_{n+1}^m + 1 = a_n a_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $a_2^m + 1 = a_1 a_3 = a_3$. Khi đó

$$a_4 = \frac{a_3^m + 1}{a_2} = \frac{(a_2^m + 1)^m + 1}{a_2} = \frac{a_2 \cdot A + 2}{a_2},$$

với A là đa thức theo biến a_2 bậc $m^2 - 1 \geq 0$. Do $a_4 \in \mathbb{N}$ và $a_2 > 1$ nên $a_2 = 2$.

Khi đó ta đã chứng minh sự duy nhất của dãy số nguyên dương nếu tồn tại là dãy

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2, \\ a_{n+1}^m + 1 = a_n a_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh (a_n) là dãy số nguyên dương bằng quy nạp (*).

Với $n = 1, 2$ thì (*) đúng. Giả sử (*) đúng đến $n = k$, khi đó $a_k = \frac{a_{k-1}^m + 1}{a_{k-2}} \in \mathbb{N}$.

Ta sẽ chứng minh đúng đến $n = k + 1$, tức cần chứng minh $a_{k+1} = \frac{a_k^m + 1}{a_{k-1}} \in \mathbb{N}$.

Thật vậy, ta có

$$a_k^m + 1 = \left(\frac{a_{k-1}^m + 1}{a_{k-2}} \right)^m + 1 = \frac{(a_{k-1}^m + 1)^m + (a_{k-2})^m}{(a_{k-2})^m},$$

suy ra $(a_{k-1} a_{k-3} - 1)(a_k^m + 1) = (a_{k-1}^m + 1)^m + a_{k-1} a_{k-3} - 1$, vì $a_{k-2}^m = a_{k-1} a_{k-3}$.

Ta có $(a_{k-1}^m + 1)^m - 1 : a_{k-1}$ nên $[(a_{k-1}^m + 1)^m + a_{k-1} a_{k-3} - 1] : a_{k-1}$. Mặt khác, ta lại có $(a_{k-1} a_{k-3} - 1, a_{k-1}) = 1$ nên ta phải có $(a_k^m + 1) : a_{k-1}$.

Suy ra $a_{k+1} = \frac{a_k^m + 1}{a_{k-1}} \in \mathbb{N}$. Vậy giả thuyết quy nạp đúng, hay (a_n) là dãy số nguyên dương.

Vậy dãy số

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 2, \\ a_{n+1}^m + 1 = a_n a_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

là dãy số nguyên dương duy nhất thỏa mãn điều kiện đề bài. □

Bài toán 7. Cho đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên và có n nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng đa thức $(P(x))^2 + 1$ có một nhân tử có bậc thấp nhất là $2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Lời giải. Đặt

$$(P(x))^2 + 1 = P_1(x) P_2(x) \cdots P_k(x) \quad (9)$$

với $P_i(x)$ là các đa thức bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$, $i = \overline{1, k}$.

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các nghiệm của $P(x)$. Từ (9) suy ra:

$$P_1(x_j) P_2(x_j) \cdots P_k(x_j) = 1, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Suy ra $P_i(x_j) = \pm 1$, do đó

$$\frac{1}{P_i(x_j)} = P_i(x_j), \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (9) ta được

$$\sum_{i=1}^k P_1(x_j) \cdots P'_i(x_j) \cdots P_k(x_j) = 0. \quad (12)$$

Thay (10) và (11) vào (12) suy ra

$$\sum_{i=1}^k P'_i(x_j) P_i(x_j) = 0.$$

Do đó x_j với $j = \overline{1, n}$ là nghiệm của phương trình

$$\sum_{i=1}^k 2P'_i(x) P(x) = \left(\sum_{i=1}^k P_i^2(x) \right)'$$

Mà $P_i(x_j) = \pm 1$ nên

$$\sum_{i=1}^k P_i^2(x_j) - n = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Ta có x_j , $j = \overline{1, n}$ là nghiệm của đa thức $\sum_{i=1}^k P_i^2(x_j) - n$ và đạo hàm của nó nên suy ra

$$\sum_{i=1}^k P_i^2(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \cdots (x - x_n)^2 Q(x) + n.$$

Từ đẳng thức trên suy ra tồn tại chỉ số i_0 sao cho $P_{i_0}(x)$ có bậc lớn hơn hoặc bằng n .

Nếu n chẵn, khi đó $n = 2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, bài toán chứng minh xong.

Nếu n lẻ, vì $(P(x))^2 + 1$ không có nghiệm thực nên $P_{i_0}(x)$ cũng không thể có nghiệm thực. Như vậy $P_{i_0}(x)$ bậc chẵn, nên nó có bậc ít nhất là $n + 1$, cũng bằng $2 \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Bài toán được chứng minh xong. $\square$

Bài toán 8. Tìm tất cả các hàm số liên tục, thỏa mãn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x) - f(y)$ là số hữu tỉ, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và y thỏa mãn $x - y$ hữu tỉ.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng các hàm số cần tìm có dạng $f(x) = ax + b$ với $a \in \mathbb{Q}$ và $b \in \mathbb{R}$. Để kiểm tra rằng các hàm có dạng trên thỏa đề bài.

Lấy q là số hữu tỉ bất kỳ và đặt

$$g_q = f(x + q) - f(x).$$

Đây là hàm số liên tục và theo giả thiết chỉ nhận giá trị hữu tỉ, do đó g_q là hàm hằng. Thật vậy, giả sử tồn tại $x_1 < x_2$ thỏa $g_q(x_1) \neq g_q(x_2)$. Ta có thể chọn c là số vô tỉ nằm giữa $g_q(x_1), g_q(x_2)$. Do g_q liên tục nên phải tồn tại $x_3 \in (x_1, x_2)$ sao cho $g_q(x_3) = c$ (mâu thuẫn vì g_q chỉ nhận giá trị hữu tỉ).

Đặt $a = f(1) - f(0)$ và $b = f(0)$. Lấy $n \in \mathbb{N}$ bất kỳ và đặt $r = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)$. Từ đó ta suy ra

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) = r, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có:

$$f\left(\frac{k}{n}\right) - f(0) = \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right] + \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right] = kr.$$

Tương tự ta cũng có

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{k}{n}\right) - f(0) &= -[f(0) - f\left(-\frac{1}{n}\right)] - [f\left(-\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{2}{n}\right)] - \cdots - [f\left(-\frac{k-1}{n}\right) - f\left(-\frac{k}{n}\right)] \\ &= -kr. \end{aligned}$$

Cho $k = n$, ta có $a = f(1) - f(0) = nr$. Suy ra $r = \frac{a}{n}$.

Do đó $f\left(\frac{k}{n}\right) - f(0) = kr = \frac{ak}{n}$, suy ra $f\left(\frac{k}{n}\right) = a \cdot \frac{k}{n} + b, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Như vậy, $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{Q}$. Chuyển qua giới hạn, lưu ý là với mỗi số thực đều tồn tại dãy số hữu tỉ hội tụ về nó, nên $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

2. Hình học

Bài toán 1. Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh không vượt quá 1. Gọi p , R , r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

$$p(1 - 2Rr) \leq 1.$$

Lời giải. Gọi a, b, c và S là độ dài ba cạnh và diện tích của $\triangle ABC$, với $0 < a, b, c \leq 1$. Ta có $S = \frac{abc}{4R} = pr$, suy ra $2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a+b+c}{2} \left(1 - \frac{abc}{a+b+c} \right) \leq 1,$$

hay là

$$a+b+c \leq abc+2,$$

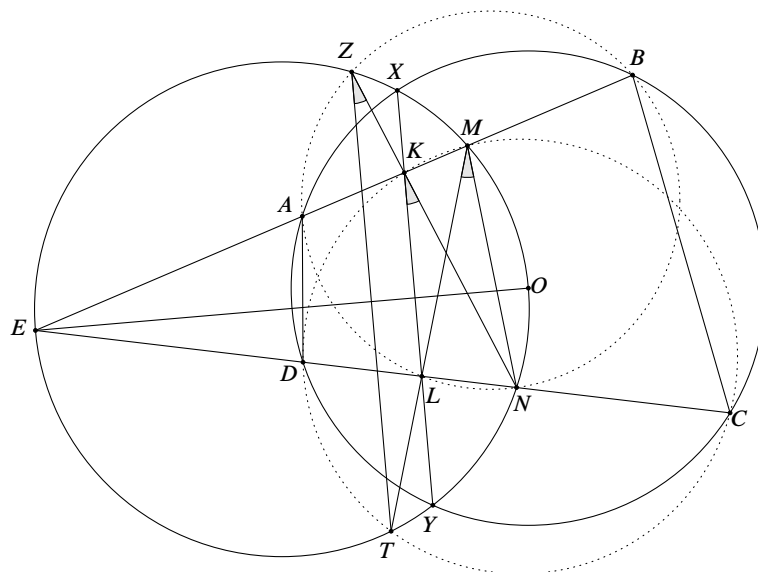
hoặc

$$(1-a)(1-b) + (1-c)(1-ab) \geq 0.$$

Điều này hiển nhiên đúng do $0 < a, b, c \leq 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$ và các hoán vị, hay $\triangle ABC$ cân có cạnh bên bằng 1. $\square$

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) và M, N là trung điểm hai cạnh AB, CD . Đường tròn (OMN) cắt đường tròn (O) tại hai điểm X, Y ; cắt lần lượt các đường tròn (CDM) , (ABN) tại điểm thứ hai Z, T .

Chứng minh rằng hai đường thẳng XY, ZT song song.

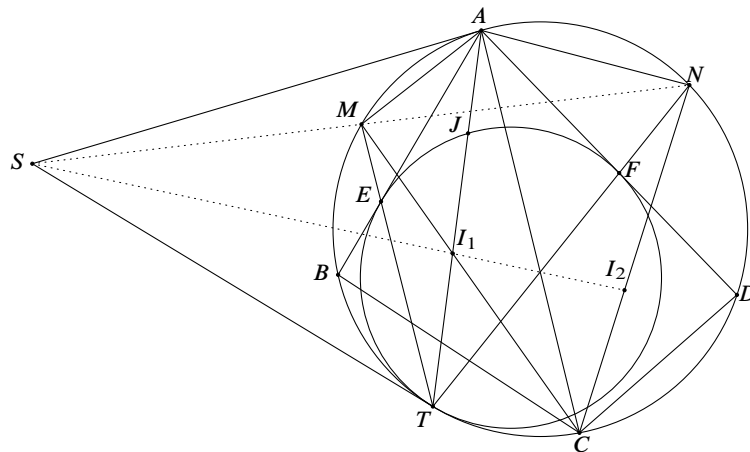


Lời giải. Gọi E là giao điểm AB, CD . Dễ thấy $OMEN$ nội tiếp. Xét $(ABN), (O), (OMEN)$ thì AB, NZ, XY là ba trục đẳng phương nên chúng đồng quy tại tâm đẳng phương K . Tương tự CD, MT, XY đồng quy tại L .

Do K là tâm đẳng phương nên $KA \cdot KB = KE \cdot KM$, mà M là trung điểm AB nên theo hệ thức Mac Laurin thì $(EKAB) = -1$ và $EK \cdot EM = EA \cdot EB$. Tương tự $EL \cdot EN = EC \cdot ED$. Từ đó, suy ra $EK \cdot EM = EL \cdot EN$, hay $MKLN$ nội tiếp, suy tiếp $\angle LKN = \angle LMN$. Kết hợp $\angle LMN = \angle TZN$ do $MNZT$ nội tiếp, ta được $\angle LKN = \angle TZN$, hay $XY \parallel ZT$. $\square$

Bài toán 3. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Hai $\triangle ABC, \triangle ADC$ lần lượt ngoại tiếp hai đường tròn bằng nhau $(I_1), (I_2)$. Đường tròn (O') tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại T và tiếp xúc hai cạnh AB, AD tại E, F . Tiếp tuyến tại A, T cắt nhau tại điểm S . Chứng minh rằng

- Tứ giác $I_1 I_2 CT$ nội tiếp.
- Ba điểm S, I_1, I_2 thẳng hàng.



Lời giải. a) TE, TF cắt (O) tại M, N . TA cắt (O') tại J khác T .

Ta có $JETF$ là tứ giác điều hoà nên $T(JTEF) = -1$. Suy ra $T(ATMN) = -1$, hay $AMTN$ cũng là tứ giác điều hoà, suy tiếp $\frac{TM}{TN} = \frac{AM}{AN}$. (1)

Do (O') tiếp xúc với (O) và AB, AD , nên theo một kết quả quen thuộc thì M, N là trung điểm các cung AB, AD . Kết hợp I_1, I_2 là tâm nội tiếp $\triangle ABC, \triangle ADC$, ta được $MA = MI_1, NA = NI_2$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $\frac{TM}{TN} = \frac{MI_1}{NI_2}$, mà $\angle TMI_1 = \angle TNI_2$, nên $\triangle I_1 TM \sim \triangle I_2 TN$. Suy ra $\angle TI_1 M = \angle TI_2 N$, suy tiếp $\angle TI_1 C = \angle TI_2 C$, hay $I_1 I_2 CT$ nội tiếp.

b) Theo câu a, $AMTN$ là tứ giác điều hoà nên S, M, N thẳng hàng. Do SA là tiếp tuyến nên

$$\frac{SM}{SN} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{\sin \angle MAS}{\sin \angle NAS} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{\sin \angle MCA}{\sin \angle NCA}.$$

Mặt khác, cũng theo câu a, ta có $MI_1 = MA$, $NI_2 = NA$. Và

$$\sin \angle MCA = \frac{r_1}{CI_1}, \sin \angle NCA = \frac{r_2}{CI_2},$$

chú ý rằng $r_1 = r_2$.

Từ đó, dễ dàng suy ra $\frac{SM}{SN} \cdot \frac{I_2N}{I_2C} \cdot \frac{I_1C}{I_1M} = 1$. Theo định lý Menelaus, S, I_1, I_2 thẳng hàng. $\square$

Bài toán 4. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) , ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường thẳng qua I và vuông góc với CI cắt BC và cung nhỏ BC (không chứa A) của đường tròn (O) lần lượt tại U, V . Đường thẳng qua U và song song với AI cắt AV tại X .

Chứng minh rằng nếu hai đường thẳng XI và AI vuông góc với nhau thì đường thẳng XI đi qua trung điểm đoạn AC .

Lời giải. Gọi M, N là giao điểm của IX và AC, AB . UX cắt AB tại Y . Do I là tâm nội $\triangle ABC$ cho nên

$$\angle BIU = \angle BIC - 90^\circ = \angle BAI.$$

Mà $\angle BAI = \angle BYU$ do $UX \parallel AI$, suy ra $\angle BIU = \angle BYU$, hay $BYIU$ nội tiếp. Kết hợp với BI là phân giác $\angle B$, ta được $\triangle IYU$ cân tại I .

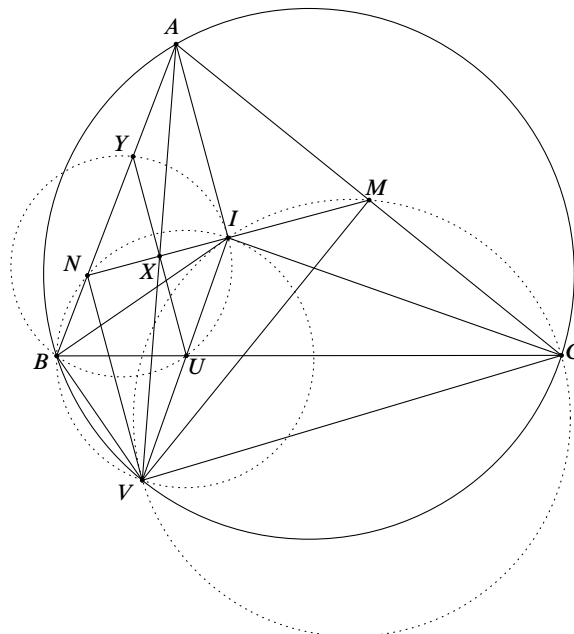
Mặt khác, do $UX \parallel AI$ và $AI \perp XI$ nên $IX \perp UX$, hay X là trung điểm UY . Từ đó, ta có

$$\frac{VX}{VA} = \frac{XU}{AI} = \frac{XY}{AI} = \frac{NX}{NI},$$

hay $VN \parallel AI$. Do đó $\angle BNV = \angle BAI = \angle BIV$, hay $BNIV$ nội tiếp. Suy ra

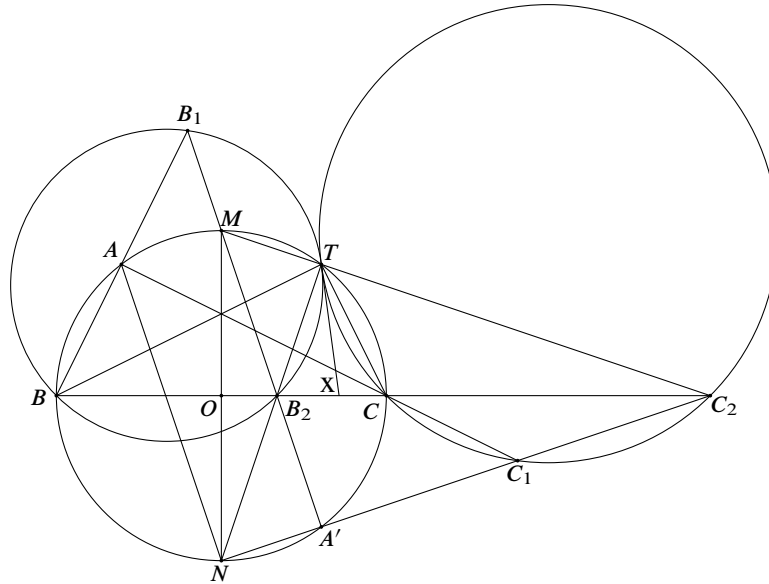
$$\angle IBV = \angle INV = \angle NIA = 90^\circ,$$

do đó BV là phân giác ngoài $\angle B$. Suy ra $\angle VAC = \angle VCA$, hay $\triangle VAC$ cân tại V .



Mặt khác, do $BNIV, ABVC$ nội tiếp nên $\angle MIV = \angle NBV = 180^\circ - \angle MCV$ dẫn đến $IMCV$ nội tiếp. Suy ra $\angle VMC = \angle VIC = 90^\circ$, hay $VM \perp AC$. Từ đó suy ra M là trung điểm AC . $\square$

Bài toán 5. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) và đường kính AA' . Đường thẳng qua điểm A' và song song với phân giác trong góc $\angle BAC$ cắt hai cạnh BA, BC tại B_1, B_2 . Đường thẳng qua điểm A' và song song với phân giác ngoài góc $\angle BAC$ cắt hai cạnh CA, CB tại C_1, C_2 . Chứng minh rằng hai đường tròn $(BB_1B_2), (CC_1C_2)$ tiếp xúc nhau khi và chỉ khi $\triangle ABC$ vuông tại A .



Lời giải. B_1B_2, C_1C_2 lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai M, N . Do B_1B_2, C_1C_2 song song với phân giác trong và ngoài $\angle BAC$ nên chúng vuông góc nhau tại A' . Từ đó MN là đường kính của (O) , hay $AMA'N$ là hình chữ nhật. Suy ra AD là phân giác trong $\angle BAC$ và M, N là trung điểm các cung BC .

Từ đó, ta có $MN \perp BC$, kết hợp với $B_1B_2 \perp C_1C_2$, suy ra B_2 là trực tâm $\triangle MNC_2$, hay $MC_2 \perp NB_2$ tại T . Hơn nữa, do $\angle MTN = 90^\circ$ nên T nằm trên (O) .

Kẻ tiếp tuyến Tx của (BB_1, B_2) . Ta có $\angle BAC = \angle BTC = 90^\circ$ tương đương với

$$\begin{aligned} \angle TBC + \angle TCB &= 90^\circ, \\ \angle B_2Tx + 180^\circ - \angle TCC_2 &= 90^\circ, \\ \angle C_2Tx &= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BC}. \end{aligned}$$

Đẳng thức cuối cùng xảy ra khi và chỉ khi Tx là tiếp tuyến của (CC_1C_2) , hay $(BB_1B_2), (CC_1C_2)$ tiếp xúc nhau tại T . $\square$

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm D thuộc đoạn BC . Đường tròn (I_1) tiếp xúc AD tại X , tiếp xúc BD và tiếp xúc trong với (O) . Đường tròn (I_2) tiếp xúc AD tại Y , tiếp xúc CD và tiếp xúc trong với (O) (X, Y thuộc đoạn AD). Đường thẳng qua X vuông góc với AI_1 cắt đường thẳng qua Y vuông góc với AI_2 tại K . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK, XY .

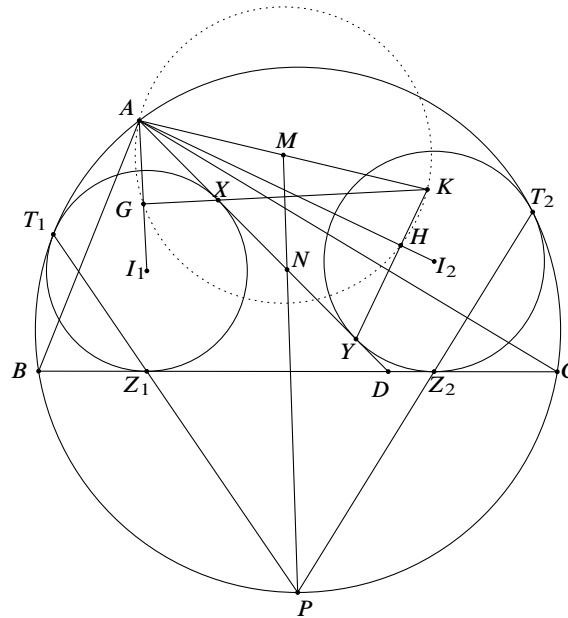
- a) Chứng minh rằng đường tròn đường kính AK trực giao với các đường tròn (I_1) , (I_2) .
- b) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định khi D di động trên đoạn BC .

Lời giải. a) AI_1 vuông góc KX tại G , AI_2 vuông góc KY tại H nên $AGHK$ nội tiếp (M, MA) . Do đó

$$P_{M/(I_1)} = I_1M^2 - I_1X^2 = I_1M^2 - \overline{I_1G} \cdot \overline{I_1A} = I_1M^2 - P_{I_1/(M,MA)} = MA^2.$$

Chứng minh tương tự, ta có $P_{M/(I_2)} = MA^2$. Vậy đường tròn đường kính AK trực giao với (I_1) , (I_2) .

b) Từ câu a), suy ra $P_{M/(I_1)} = P_{M/(I_2)} = MA^2$. Mặt khác, do N là trung điểm XY nên $P_{N/(I_1)} = NX^2 = NY^2 = P_{N/(I_2)}$. Từ đây suy ra MN là trục đẳng phương của (I_1) , (I_2) .



Ta có (I_1) tiếp xúc BD tại Z_1 và tiếp xúc trong với (O) tại T_1 , (I_2) tiếp xúc CD tại Z_2 và tiếp xúc trong với (O) tại T_2 . Theo một kết quả quen thuộc, Z_1T_1, Z_2T_2 đi qua P là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (O) và

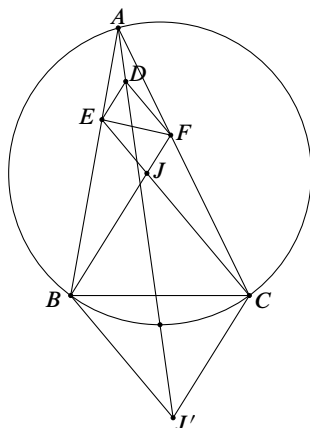
$$P_{P/(I_1)} = \overline{PZ_1} \cdot \overline{PT_1} = PB^2 = PC^2 = \overline{PZ_2} \cdot \overline{PT_2} = P_{P/(I_2)}.$$

Suy ra P nằm trên trục đẳng phương MN của (I_1) , (I_2) , hay MN luôn đi qua điểm P cố định khi D di động trên BC . $\square$

Bài toán 7. Cho đường tròn (O) và dây cung BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC . Các điểm E, F trên tia BA, CA sao cho $BE = CF = BC$. Đường thẳng qua E song song cạnh BF cắt đường thẳng qua điểm F song song cạnh CE tại điểm D . Dựng tam giác đều XBC, YBC .

- a) Chứng minh rằng đường thẳng AD luôn đi qua điểm cố định khi điểm A di chuyển.

Lời giải. a) Gọi J là giao điểm BF, CE (ta xét trường hợp J nằm trong $\triangle ABC$, trường hợp nằm ngoài chứng minh tương tự). Dựng hình bình hành $JB J' C$. Để thấy $JEDF$ cũng là hình bình hành.



Xét tứ giác toàn phần $AEJFBC$, theo định lý Gauss, trung điểm JA, EF, BC thẳng hàng. Mặt khác $JEDF$ và $JB'J'C$ là hình bình hành nên trung điểm EF, BC cũng là trung điểm JD, JJ' . Suy ra trung điểm JA, JD, JJ' thẳng hàng, nên theo định lý Thales, A, D, J' thẳng hàng. Mà J' là tâm bàng tiếp nên AD là phân giác $\angle A$. Do đó AD luôn qua điểm cố định là trung điểm cung BC không chứa A .

Gọi R là giao điểm XQ, YN ; S là giao điểm XM, YP . Gọi I_1, I_2, I_3, I_4 là trung điểm MQ, NP, XY, RS . Xét tứ giác toàn phần $XNYPRS$, theo định lý Gauss, I_2, I_3, I_4 thẳng hàng. (1)

Do (B), (C) bằng nhau nên $\angle XQY = \angle XMY$, suy ra $\angle RQY = \angle SMY$. Kết hợp $\angle NYQ = \angle NXQ = \angle MXP = \angle MYP$, ta được $\triangle YQR \sim \triangle YMS$. Suy tiếp $\angle QRY = \angle MSY$, và $\triangle YPR \sim \triangle YNS$. Từ đó, ta có

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{RY}} \cdot \frac{\overline{RY}}{\overline{RP}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SY}} \cdot \frac{\overline{SY}}{\overline{SN}} = \frac{\overline{SM}}{\overline{SN}} = k.$$

Do I_1, I_2, I_4 là trung điểm MQ, NP, RS nên

$$\overrightarrow{I_4 I_1} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{SM}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{SN}) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \overrightarrow{I_4 I_2}.$$

suy ra I_1, I_2, I_4 thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $I_1 I_2$ luôn đi qua I_3 cố định (trung điểm XY hay BC). $\square$

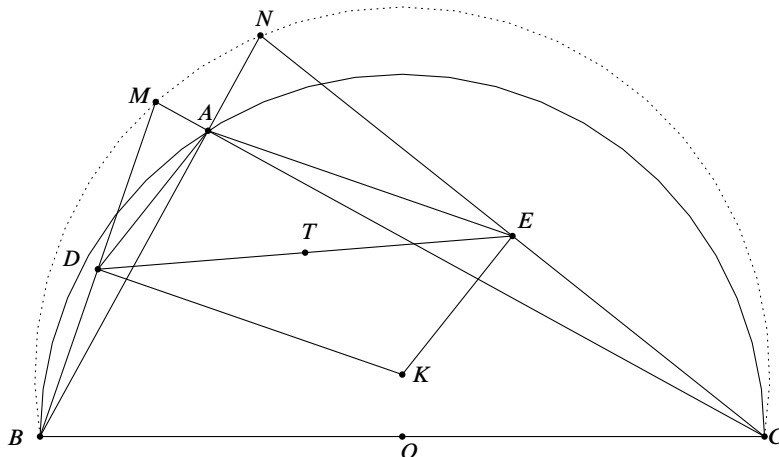
Bài toán 8. Cho nửa đường tròn đường kính BC cố định và điểm A di chuyển trên đó. Hai điểm D và E nằm ngoài tam giác ABC sao cho tam giác DAB cân tại D và tam giác EAC cân tại E . Biết $\angle DAB = \angle EAC = \alpha$ không đổi. Gọi T là trung điểm của đoạn DE . Chứng minh rằng điểm T di chuyển trên đường tròn cố định khi điểm A di chuyển.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của BD, AC và CE, AB . Ta có $\triangle DAB, \triangle EAC$ cân và $\angle DAB = \angle EAC = \alpha$ nên $\angle DBA = \angle ECA = \alpha$, hay $BMNC$ nội tiếp.

Mặt khác, $\angle AMB = 90^\circ - \angle MBA = 90^\circ - \alpha$ không đổi. Suy ra $BMNC$ nội tiếp đường tròn (K) cố định.

Ta có $\triangle AMB$ vuông tại A và $\triangle DAB$ cân tại D nên D là trung điểm BM . Suy ra $KD \perp BM$. Mặt khác, $\angle MBA = \angle EAC = 90^\circ$ và $AB \perp AC$ nên $AE \perp BM$.

Từ hai điều trên, suy ra $KD \parallel AE$. Tương tự, $KE \parallel AD$, hay $ADKE$ là hình bình hành. Do đó, T cũng là trung điểm AK .



Do K cố định và A di chuyển trên đường tròn đường kính BC nên T di chuyển trên đường tròn là ảnh của đường tròn đường kính BC qua phép vị tự tâm K tỷ số $\frac{1}{2}$. $\square$

3. Số học

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên n tồn tại vô hạn cách để viết n dưới dạng

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm k^2,$$

với số nguyên dương k và các dấu $+$, $-$ được chọn phù hợp.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh với $n = 0, 1, 2, 3$ tồn tại ít nhất một cách viết thỏa yêu cầu bài toán.

- Với $n = 0$, ta có $0 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 + 7^2 - 8^2$.
- Với $n = 1$, ta có $1 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 - 5^2 + 6^2$.
- Với $n = 2$, ta có $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$.
- Với $n = 3$, ta có $3 = -1^2 + 2^2$.

Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có các đẳng thức sau

$$4 = (k+1)^2 - (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2, \quad (13)$$

$$0 = (k+1)^2 - (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2 - (k+5)^2 + (k+6)^2 + (k+7)^2 - (k+8)^2. \quad (14)$$

Giả sử với một số tự nhiên n , tồn tại một cách viết dạng

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm k^2,$$

với một cách chọn nào đó số nguyên dương k và các dấu $+$, $-$. Khi đó, thêm vào đẳng thức trên hai vế của (13) ta được

$$n + 4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm k^2 + (k+1)^2 - (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2.$$

Như vậy, nếu n có một cách viết như đề bài thì ta cũng sẽ tìm được một cách viết theo dạng đó cho $n + 4$. Mà với $n = 0, 1, 2, 3$ ta đã tìm được các cách viết, nên mọi số $n \in \mathbb{N}$ đều có ít nhất một cách viết.

Tiếp theo, với mỗi cách viết như trên cho n , thêm 8 số hạng của (14) vào, ta sẽ được một cách viết khác cho n . Do đó với mỗi $n \in \mathbb{N}$ có vô số cách viết theo dạng đã cho. Với mỗi một cách viết như vậy cho $n > 0$, ta thay dấu $+$ bởi dấu $-$ và ngược lại, ta sẽ được một cách viết cho $-n$. Từ đây ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 2. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_0 = 2016$, $a_n = a_{n-1}^2 + 1 \forall n > 0$. Tìm số dư của a_{2016} khi chia cho 2002.

Lời giải. Ta có $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Các số dư của a_n khi chia cho 2 lần lượt là $0, 1, 0, \dots$ Như vậy $a_{2k} \equiv 0 \pmod{2}$, do đó $a_{2016} \equiv 0 \pmod{2}$.

Các số dư của a_n khi chia cho 7 lần lượt là $0, 1, 2, 5, 5, \dots$ Như vậy $a_n \equiv 5 \pmod{7}, \forall n \geq 3$, do đó $a_{2016} \equiv 5 \pmod{7}$.

Các số dư của a_n khi chia cho 11 lần lượt là $3, 10, 2, 5, 4, 5, 4, \dots$ Như vậy $a_n \equiv 4 \pmod{11}$ với mọi $n \geq 4$ và n chẵn, do đó $a_{2016} \equiv 4 \pmod{11}$.

Các số dư của a_n khi chia cho 13 lần lượt bằng $8, 0, 1, 2, 5, 0, \dots$ Như vậy $a_{4k} \equiv 5 \pmod{13}$ với mọi $k \geq 1$, do đó $a_{2016} \equiv 5 \pmod{13}$.

Từ các kết quả trên ta suy ra $a_{2016} \equiv 510 \pmod{2002}$. □

Bài toán 3. Cho dãy số

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

và k là một số nguyên dương lẻ bất kỳ.

a) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương lẻ thì u_k là ước của u_{kn} .

b) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương chẵn thì u_k^2 là ước của $u_{kn} - 2$. Đặc biệt, nếu $n = 2$ thì $u_k^2 = u_{2k} - 2$. Từ đó hãy chứng minh $u_{2k} + 2$ không thể là lũy thừa bậc 5 của bất kỳ số nguyên dương nào.

Lời giải. Công thức tổng quát của dãy số đã cho là $u_n = a^n + b^n$ với $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, chú ý rằng $ab = -1$.

a) Sử dụng công thức tổng quát trên, do n lẻ nên

$$\begin{aligned} u_{kn} &= a^{kn} + b^{kn} \\ &= (a^k + b^k) \left[a^{k(n-1)} - a^{k(n-2)}b + a^{k(n-3)}b^2 - \dots - ab^{k(n-2)} + b^{k(n-1)} \right] \\ &= (a^k + b^k) \left\{ \left[a^{k(n-1)} + b^{k(n-1)} \right] - ab \left[a^{k(n-2)-1} + b^{k(n-2)-1} \right] + \dots + \left[(ab)^k \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\ &= u_k \left[u_{k(n-1)} + u_{k(n-2)-1} + \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Do đó u_k là ước của u_{kn} .

b) Giả sử $n = 2^s \cdot t$, trong đó $s \geq 1$ và t lẻ. Ta xét hai trường hợp

• Nếu $s = 1$ thì

$$\begin{aligned} u_{kn} - 2 &= (a^{kt})^2 + (b^{kt})^2 - 2 \\ &= (a^{kt} + b^{kt})^2. \end{aligned}$$

Do t lẻ nên theo câu a) thì $a^{kt} + b^{kt} = u_{kt}$ chia hết cho u_k . Từ đó suy ra $u_{kn} - 2$ chia hết cho u_k^2 .

- Nếu $s > 1$ thì

$$\begin{aligned} u_{kn} - 2 &= \left(a^{kt \cdot 2^{s-1}}\right)^2 + \left(b^{kt \cdot 2^{s-1}}\right)^2 - 2 \\ &= \left(a^{kt \cdot 2^{s-1}} - b^{kt \cdot 2^{s-1}}\right)^2. \end{aligned}$$

Do $s > 1$ nên $a^{kt \cdot 2^{s-1}} - b^{kt \cdot 2^{s-1}}$ chia hết cho $a^{kt} + b^{kt}$, mà theo câu a) thì $a^{kt} + b^{kt} = u_{kt}$ chia hết cho u_k . Suy ra $u_{nk} - 2$ chia hết cho u_k^2 .

Sử dụng công thức tổng quát của (u_n) , dễ dàng chứng minh $u_k^2 = u_{2k} - 2$ với k lẻ. Từ đó $u_{2k} + 2 = u_k^2 + 4$. Ta chuyển yêu cầu bài toán về việc chứng minh phương trình $x^2 + 4 = y^5$ không có nghiệm nguyên dương. Thật vậy, xét modulo 11 thì các số dư có thể có khi chia $x^2 + 4$ cho 11 là 2, 4, 5, 7, 8, 9, còn các số dư khi chia y^5 cho 11 là 0, 1, 10. Ta thu được điều phải chứng minh, tức là $u_{2k} + 6$ không thể là lũy thừa bậc 5 của bất kỳ số nguyên dương nào. $\square$

Bài toán 4. Cho $p > 2$ là một số nguyên tố và f là đa thức hệ số nguyên có bậc $p - 1$. Giả sử với mọi số nguyên a, b , nếu $a - b$ không chia hết cho p thì $f(a) - f(b)$ cũng không chia hết cho p . Chứng minh rằng hệ số cao nhất của f (tức là hệ số ứng với x^{p-1}) chia hết cho p .

Lời giải. Sử dụng công thức nội suy Lagrange tại p điểm $0, 1, \dots, p - 1$, ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} f(k) \prod_{j \neq i} \frac{x - j}{i - j}.$$

Suy ra hệ số cao nhất của f là

$$a_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p-k-1}}{k!(p-1-k)!} \cdot f(k) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (-1)^k f(k).$$

Tiếp theo, ta chứng minh với mọi $0 \leq k \leq p - 1$ thì

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$

Thật vậy, do $p > 2$ nên $p - 1$ là số chẵn, do đó

$$\begin{aligned} \binom{p-1}{k} &\equiv \frac{(p-1)!}{k!(p-1-k)!} \\ &\equiv \frac{(p-1)!}{k! \cdot (k+1)(k+2) \cdots (p-1) \cdot (-1)^{p-1-k}} \\ &\equiv \frac{1}{(-1)^{p-1-k}} \\ &\equiv (-1)^k \pmod{p}. \end{aligned}$$

Theo định lý Wilson, ta có

$$a_{p-1} \equiv - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} (-1)^k f(k) \equiv - \sum_{k=0}^{p-1} f(k) \pmod{p}.$$

Ta sẽ chứng minh $\{f(0), f(1), \dots, f(p-1)\}$ là hệ thặng dư đầy đủ modulo p . Thật vậy, do $j-i$ không chia hết cho p với mọi $0 \leq i < j \leq p-1$ nên $f(j) - f(i)$ cũng không chia hết cho p . Tập hợp $\{f(0), f(1), \dots, f(p-1)\}$ có p phần tử và các phần tử đôi một không đồng dư với nhau theo modulo p nên đó là hệ thặng dư đầy đủ modulo p .

Từ đó suy ra

$$a_{p-1} \equiv -\sum_{k=0}^{p-1} f(k) \equiv -(1+2+\dots+p-1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 5. Vật chất di truyền ở vi khuẩn *Mathobacterium* là ADN dạng **vòng** gồm n gen (n nguyên dương) đánh số từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ. Enzym Squarase phiên mã theo quy tắc: Phiên mã gen thứ nhất; sau đó trượt tới 4 gen, phiên mã gen đó; tiếp tục trượt tới 9 gen, và phiên mã gen đó (tức là lần lượt phiên mã gen thứ 1, thứ 5, thứ 14, ... và cứ xoay vòng như vậy). Tìm n để vi khuẩn phát triển bình thường (tất cả các gen đều được phiên mã).

Lời giải. Xét dãy số

$$(u_k) : \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{k+1} \equiv u_k + k^2 \pmod{n} \\ u_k \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

Rõ ràng, ở lần phiên mã thứ k , gen được phiên mã nằm ở vị trí u_k . Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm n sao cho dãy (u_k) nhận hết cả n giá trị $\{1, 2, \dots, n\}$.

Đặt $f(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ thì $u_k \equiv f(k) \pmod{n}$.

Ta có các nhận xét sau :

- (1) Nếu $f(a) \equiv f(b) \pmod{n}$ thì $u_a \equiv u_b \pmod{n}$, mà $u_a, u_b \in \{1, 2, \dots, n\}$ nên $u_a = u_b$.
- (2) Nếu $p \mid n$ và n thoả mãn thì p cũng thoả mãn, vì dãy (u_k) chạy qua hết hệ thặng dư đầy đủ của n thì cũng chạy qua hết hệ thặng dư đầy đủ của p . Do đó, nếu p không thoả mãn thì bội số của p cũng không thoả mãn.

Nếu $n \equiv 1, 5 \pmod{6}$ thì $(n+1)(2n+1) \equiv 0 \pmod{6}$, khi đó

$$\begin{aligned} f(k+n) &\equiv \frac{(k+n)(k+n+1)(2k+2n+1)}{6} \pmod{n} \\ &\equiv \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + n \cdot \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6} + k^2 + kn + k \right] \pmod{n} \\ &\equiv \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \equiv f(k) \pmod{n}, \end{aligned}$$

nên theo nhận xét (1) thì $u_{k+n} = u_k$, do đó ta chỉ cần xét $u_1, u_2, \dots, u_n$. Dãy (u_k) nhận hết cả n giá trị $1, 2, \dots, n$ khi và chỉ khi các $u_i, i = \overline{1, n}$ đôi một khác nhau, nhưng

$$f(n) = f(n-1) + n^2 \equiv f(n-1) \pmod{n},$$

nên theo nhận xét (1) thì $u_n = u_{n-1}$, mâu thuẫn.

Vậy, $n \not\equiv 1, 5 \pmod{6}$. Mà các số nguyên tố lớn hơn 3 đều có dạng $6k+1$ hoặc $6k+5$, do đó theo nhận xét (2) thì n chỉ có các ước nguyên tố 2 và 3. Kiểm tra trực tiếp thấy $n = 3, 3^2$ thỏa còn $n = 3^3$ không thỏa, nên n chỉ có thể là một trong các dạng $2^t, 3 \cdot 2^t, 9 \cdot 2^t$.

Ngược lại, theo nhận xét (2) ta chỉ cần chứng minh khi n có dạng $9 \cdot 2^t$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng cách mệnh đề tương đương sau bằng quy nạp theo t .

Với mỗi $t \in \mathbb{N}^*$, luôn tìm được $x_{tr} \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$x_{tr}(x_{tr} + 1)(2x_{tr} + 1) = 2x_{tr}^3 + 3x_{tr}^2 + x_{tr} \equiv 6r \pmod{27 \cdot 2^t},$$

với mọi r thuộc hệ thặng dư đầy đủ modulo $9 \cdot 2^{t-1}$.

Khi $t = 1$, với mọi r thuộc hệ thặng dư đầy đủ modulo 9, ta có

$r \pmod{9}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$6r \pmod{54}$	0	6	12	18	24	30	36	42	58
x_{1r}	13	1	11	4	19	2	8	10	20

Mệnh đề đúng với $t = 1$.

Giả sử mệnh đề đúng với mỗi $t \geq 1$. Tức là, với mọi r thuộc hệ thặng dư đầy đủ modulo $9 \cdot 2^{t-1}$, luôn tìm được $x_{tr} \in \mathbb{N}^*$ sao cho $2x_{tr}^3 + 3x_{tr}^2 + x_{tr} \equiv 6r \pmod{27 \cdot 2^t}$ hay có thể biểu diễn được $2x_{tr}^3 + 3x_{tr}^2 + x_{tr} = 27 \cdot 2^t \cdot q_t + 6r$ với $q_t \in \mathbb{N}$.

Ta sẽ chứng minh mệnh đề cũng đúng với $t+1$. Dễ thấy, khi r chạy hết hệ thặng dư đầy đủ modulo $9 \cdot 2^{t-1}$ thì $\pm r$ sẽ chạy hết hệ thặng dư đầy đủ modulo $9 \cdot 2^t$. Với mỗi r :

- Nếu đặt $x_{(t+1)r} = 27 \cdot 2^t \cdot q_{t+1} + x_{tr}$. Khi đó

$$\begin{aligned} 2x_{(t+1)r}^3 + 3x_{(t+1)r}^2 + x_{(t+1)r} &\equiv 27 \cdot 2^t \cdot q_{t+1} + 2x_{tr}^3 + 3x_{tr}^2 + x_{tr} \pmod{27 \cdot 2^{t+1}} \\ &\equiv 27 \cdot 2^t \cdot (q_{t+1} + q_t) + 6r \pmod{27 \cdot 2^{t+1}}. \end{aligned}$$

Chọn q_{t+1} sao cho $(q_{t+1} + q_t) \vdots 2$, thì ta tìm được $x_{(t+1)r}$ thỏa

$$2x_{(t+1)r}^3 + 3x_{(t+1)r}^2 + x_{(t+1)r} \equiv 6r \pmod{27 \cdot 2^{t+1}}.$$

- Nếu đặt $x_{(t+1)r} = 27 \cdot 2^t \cdot q_{t+1} - x_{tr} - 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} 2x_{(t+1)r}^3 + 3x_{(t+1)r}^2 + x_{(t+1)r} &\equiv 27 \cdot 2^t \cdot q_{t+1} - 2x_{tr}^3 - 3x_{tr}^2 - x_{tr} \pmod{27 \cdot 2^{t+1}} \\ &\equiv 27 \cdot 2^t \cdot (q_{t+1} - q_t) - 6r \pmod{27 \cdot 2^{t+1}}. \end{aligned}$$

Chọn q_{t+1} sao cho $(q_{t+1} - q_t) \vdots 2$, thì ta tìm được $x_{(t+1)r}$ thỏa

$$2x_{(t+1)r}^3 + 3x_{(t+1)r}^2 + x_{(t+1)r} \equiv -6r \pmod{27 \cdot 2^{t+1}}.$$

Việc chọn trên luôn thực hiện được nên mệnh đề đúng với $t + 1$, phép quy nạp hoàn tất.

Vậy vi khuẩn phát triển bình thường khi và chỉ khi n có dạng $2^t, 3 \cdot 2^t, 9 \cdot 2^t$ với $t \in \mathbb{N}$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

4. Tổ hợp

Bài toán 1. Có 32 chiếc đĩa xếp thành nhiều chồng. Ở mỗi bước ta chọn một chồng có k đĩa, sau đó bốc thêm vào chồng này k đĩa nữa lấy từ một chồng khác có không ít đĩa hơn. Hỏi sau hữu hạn bước có thể xếp tất cả đĩa vào một chồng hay không?

Lời giải. Ta sẽ chứng minh có thể xếp tất cả 2^n đĩa vào một chồng sau hữu hạn bước bằng quy nạp theo n .

Dễ thấy kết luận đúng khi $n = 1$. Giả sử ta có thể xếp 2^n đĩa vào một chồng sau hữu hạn bước. Ta chứng minh cho trường hợp 2^{n+1} .

Ta có hai nhận xét:

- (1) Số các chồng đĩa lẻ là số chẵn.
- (2) Sau mỗi bước, hai chồng đĩa nhận được luôn có số đĩa chẵn ở mỗi chồng.

Do đó ta có thể ghép cặp các chồng đĩa lẻ với nhau để sau khi thực hiện việc chuyển đĩa, ta nhận được toàn những chồng đĩa chẵn. Khi đó ở mỗi chồng, ta “gắn” cứ mỗi hai chiếc đĩa thành một chiếc đĩa mới thì tổng số lượng đĩa mới là 2^n . Theo giả thiết quy nạp, ta có thể xếp số đĩa mới này thành một chồng đĩa mới. Kết luận đúng với 2^{n+1} . Ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 2. Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ được nối với nhau bởi một số đoạn thẳng. Hai điểm được gọi là kề nhau nếu có một đoạn thẳng nối chúng. Hệ n điểm gọi là “đủ” nếu hai điểm bất kì hoặc kề nhau hoặc cùng kề với một điểm thứ ba.

- (a) Tìm số đoạn thẳng nhỏ nhất của hệ n điểm đủ.
- (b) Với $n = 6$, cho lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Cần ít nhất bao nhiêu đoạn thẳng nữa để hệ 6 đỉnh của lục giác trở thành đủ?

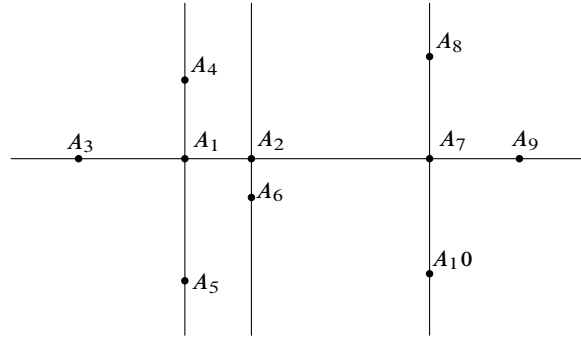
Lời giải. (a) Đồ thị n đỉnh đã cho phải là đồ thị liên thông, do đó có ít nhất $n - 1$ cạnh. Chẳng hạn ta có đồ thị $n - 1$ cạnh là những đoạn thẳng nối $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ với A_n , là “đủ”. Vậy số đoạn thẳng ít nhất là $n - 1$.

(b) Ta gọi bậc của một đỉnh trong đồ thị là số cạnh nối với đỉnh đó. Các cặp đỉnh A_1, A_4 ; A_2, A_5 ; A_3, A_6 không kề nhau cũng không cùng kề một điểm thứ ba. Để đồ thị 6 đỉnh trở thành “đủ”, trong mỗi cặp đỉnh phải có ít nhất một đỉnh tăng bậc, do đỉnh đó cần được nối với đỉnh còn lại hoặc đỉnh kề với đỉnh còn lại.

Do đó tổng số bậc của các đỉnh tăng ít nhất 3, nghĩa là cần nối ít nhất hai cạnh. Ta có thể nối A_1, A_4 ; A_5, A_3 để thỏa yêu cầu đề bài. Vậy cần nối ít nhất hai đoạn thẳng nữa để có hệ 6 điểm đủ. $\square$

Bài toán 3. Có 10 bạn học sinh đang chơi một trò chơi. Biết rằng khoảng cách giữa các bạn là khác nhau và mỗi bạn đều có một quả bóng. Khi có hiệu lệnh của cô giáo, mỗi bạn phải chuyển quả bóng cho bạn đứng gần mình nhất. Gọi A là số bạn có bóng. Tìm giá trị nhỏ nhất của A .

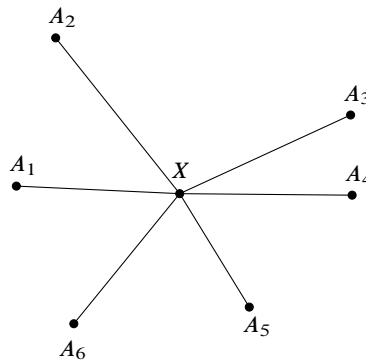
Lời giải. Ta xét cách sắp xếp sau.



Với cách sắp xếp trên, ta thấy sau hiệu lệnh của cô giáo thì chỉ có ba bạn 1, 2, 7 là còn có bóng. Do đó $A \leq 3$.

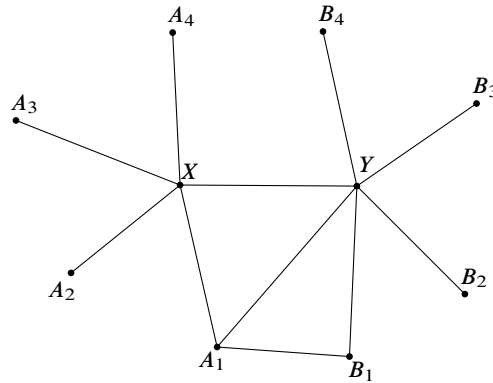
Ta sẽ chứng minh $A \geq 3$. Thật vậy, gọi X, Y là hai bạn có khoảng cách nhỏ nhất thì X sẽ nhận bóng của Y và Y sẽ nhận bóng của X nên có ít nhất hai bạn sẽ có bóng.

Giả sử X nhận ít nhất 6 quả bóng. Gọi $A_1, A_2, \dots, A_6$ là 6 bạn đã đưa quả bóng cho X như hình vẽ



Trong $\triangle A_i A_{i+1} X$ thì $A_i A_{i+1}$ lớn nhất nên $\angle A_i X A_{i+1} > 60^\circ$ ($i = \overline{1, 6}$ và $A_7 \equiv A_1$), suy ra $\sum_{i=1}^6 \angle A_i X A_{i+1} > 360^\circ$ (vô lý).

Do đó, giả sử chỉ có đúng hai bạn X và Y còn bóng thì mỗi bạn sẽ có đúng 5 quả bóng. Gọi A_i, B_i ($i = \overline{1, 4}$) lần lượt là các bạn đưa bóng cho X, Y như hình.



Để thấy $\angle A_i X A_{i+1} > 60^\circ$ ($i = \overline{1, 3}$) nên $\angle A_1 X A_4 < 180^\circ$. Tương tự thì $\angle B_1 Y B_4 < 180^\circ$. Do đó

$$(\angle A_1 X Y + \angle B_1 Y X) + (\angle A_4 X Y + \angle B_4 Y X) < 360^\circ.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử

$$\angle A_1 X Y + \angle B_1 Y X < 180^\circ.$$

$\triangle A_1 X Y$ có XY nhỏ nhất nên $\angle X A_1 Y < \angle X Y A_1$. Tam giác $A_1 B_1 Y$ có $B_1 Y$ nhỏ nhất nên $\angle B_1 A_1 Y < \angle A_1 Y B_1$. Do đó $\angle X A_1 B_1 < \angle X Y B_1$. Tương tự $\angle Y B_1 A_1 < \angle Y X A_1$.

Suy ra $\angle X A_1 B_1 + \angle Y B_1 A_1 < \angle X Y B_1 + \angle Y X A_1 < 180^\circ$ (vô lý). Vậy phải tồn tại ít nhất một bạn nữa cũng có bóng. Do đó $\min A = 3$. $\square$

Bài toán 4. Ở đất nước Panem có tất cả 12 quận. Người ta xây dựng các con đường sao cho với hai quận A, B bất kì, luôn có một đường đi hai chiều nối quận A và quận B . Hai quận C, D được gọi là thông với nhau nếu ta có thể đi từ C đến D mà không phải đi qua quận nào khác. Gọi M là tập hợp tất cả các cặp quận thông với nhau. Biết rằng không tồn tại ba quận X, Y, Z đôi một thông nhau, nghĩa là đồng thời thỏa mãn X thông với Y , Y thông với Z và Z thông với X . Chứng minh rằng $|M| \leq 36$.

Lời giải. Ta phát biểu lại bài toán như sau: Cho G là đồ thị liên thông có $2n$ đỉnh. Biết rằng G không chứa tam giác nào. Chứng minh rằng số cạnh của G không lớn hơn n^2 (*).

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp. Để thấy $n = 1$ thì (*) đúng.

Giả sử (*) đúng tới $n = k$, tức là đồ thị G có $2k$ đỉnh và không chứa tam giác nào thì số cạnh không quá k^2 . Xét $n = k + 1$. Gọi a và b là hai đỉnh tùy ý của đồ thị mà hai đỉnh này được nối với nhau. Ta kí hiệu $d(a)$ và $d(b)$ lần lượt là bậc của a và b , nghĩa là số cạnh nhận a, b là hai đầu mút. Giả sử ta có $d(a) + d(b) \geq 2k + 3$. Khi đó có ít nhất $2k + 1$ cạnh đi từ $2k$ đỉnh còn lại đến a và b . Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một đỉnh c được nối với cả a và b , điều này mâu thuẫn do G không chứa tam giác nào. Do đó ta có $d(a) + d(b) \leq 2k + 2$.

Bây giờ ta xóa đi hai đỉnh a và b và các cạnh có chứa a hoặc b . Theo nguyên lí quy nạp, đồ thị lúc này có $2k$ đỉnh nên số cạnh không quá k^2 . Như vậy, số cạnh của đồ thị $2k + 2$ đỉnh sẽ thỏa mãn

$$M \leq k^2 + d(a) + d(b) - 1 \leq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Theo nguyên lí quy nạp, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 5. Có $2n$ viên sỏi (n nguyên dương cho trước) đang được xếp thành 3 đống. Mỗi lần thực hiện cho phép lấy một nửa số viên sỏi từ đống sỏi có chẵn viên sỏi và chuyển sang đống khác. Chứng minh rằng, dù các đống sỏi ban đầu được xếp thế nào, sau một số hữu hạn bước thực hiện như thế, ta có thể tạo ra một đống sỏi có đúng n viên sỏi.

Lời giải 1. Chú ý là nếu ta thu được tình huống 3 đống sỏi là $(x, 2x, y)$ thì ta có thể thu được $(x, x, x + y)$, khi đó ta có $x + y$ chẵn nên chỉ việc chuyển một nửa sỏi từ đống thứ 3 vào một trong hai đống bằng nhau là xong.

Ta mô tả thuật toán để có thể đưa về trạng thái $(x, 2x, y)$. Vì tổng số sỏi là chẵn nên tồn tại một đống có số sỏi chẵn là $2m$. Chọn đống sỏi này mà một đống sỏi khác có số sỏi là m' , ta được cặp $(2m, m')$. Nếu $m = m'$ thì xong. Nếu $m \neq n$, ta sẽ biến đổi cặp này đảm bảo vẫn còn lại đống sỏi có số chẵn viên, sao cho hoặc tổng số viên sỏi trong cặp sẽ giảm, hoặc giữ nguyên nhưng hiệu $|m - m'|$ giảm.

Ta thực hiện như sau:

- Nếu như m hoặc m' chẵn thì ta chuyển m viên sỏi về đống thứ 3 thì tổng số viên sỏi trong cặp sẽ giảm và trong cặp vẫn có một đống có số chẵn.
- Nếu như m và m' lẻ, ta chuyển lần lượt thành $(m, m + m')$. Khi đó, đống $(m + m')$ có số sỏi chẵn và $\left| \frac{m+m'}{2} - m \right| = \frac{|m-m'|}{2} < |m - m'|$.

Vì số lượng viên sỏi cũng như hiệu $|m - n|$ chỉ có thể giảm hữu hạn lần nên sau hữu hạn bước ta sẽ đạt được trạng thái $m = n$. $\square$

Lời giải 2. (Hồ Quốc Đăng Hưng, Hoàng Đỗ Kiên) Chú ý là nếu ta thu được tình huống 3 đống sỏi là $(x, 2x, y)$ thì ta có thể thu được $(x, x, x + y)$, khi đó ta có $x + y$ chẵn nên chỉ việc chuyển một nửa sỏi từ đống thứ 3 vào một trong hai đống bằng nhau là xong.

Ta chỉ cần xét trường hợp có hai đống sỏi lẻ và một đống sỏi chẵn vì nếu cả ba đều chẵn thì ta chỉ cần cố định một đống rồi chuyển từ hai đống còn lại sang hai đống đó cho đến khi nào có một số lẻ các viên sỏi.

Gọi ba đống sỏi là A, B, C và số sỏi ở thời điểm thứ n là (a_n, b_n, c_n) . Chú ý rằng nếu như $(a_n, b_n, c_n) = (2^k a, b, c)$, trong đó a, b, c lẻ thì với mọi x, y không âm thỏa mãn $x + y = 2^k - 1$, ta đều có thể đưa về $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) = (a, b + ax, c + ay)$ (sử dụng tính chất mọi số nguyên dương đều có biểu diễn nhị phân).

Theo nhận định trên, giả sử ban đầu $(a_0, b_0, c_0) = (2^k a, b, c)$, ta cố định C . Do a, b lẻ nên tồn tại duy nhất $0 \leq x_0 < 2^k$ sao cho $b + ax_0$ chia hết cho 2^k . Biến đổi thành $(a_1, b_1, c_1) = (a, b + ax_0, c + a(2^k - 1 - x_0))$. Lưu ý là $b + ax_0$ có thể chia hết cho 2^{k+1} nhưng do lũy thừa của 2 không thể tăng vô hạn nên ta có thể giả sử k là như nhau ở mọi bước. Ngoài ra $c_1 = c + a(2^k - 1 - x_0) > c_0$. Vậy ở mỗi bước ta thực hiện phép chuyển sỏi như sau: Chuyển từ A hoặc B sang C sao cho với mọi n thì a_n hoặc b_n chia hết cho 2^k và $c_n \geq c_{n-1}$ và c_n lẻ (có thể chứng minh bằng quy nạp). Tất nhiên c_n không thể tăng vô hạn, do đó tồn tại n_0 sao cho

$c_n = c_{n_0}$ với mọi $n \geq n_0$. Giả sử $a_{n_0} = 2^k x_{n_0}$, do ta không chuyển gì cho C nữa nên sau hữu hạn bước, ta sẽ đưa về $(x_{n_0}, 2^k \cdot s, c_{n_0})$.

Giả sử $x_{n_0} > b_{n_0}$ thì do $x_{n_0} + 2^k \cdot s = 2^k \cdot x_{n_0} + b_{n_0}$ nên suy ra $s > b_{n_0}$, cứ tiếp tục như vậy ta sẽ có một dãy số lẻ tăng vô hạn, vô lí. Ngược lại, nếu $x_{n_0} < b_{n_0}$ thì lại suy ra $b_{n_0} > s > x_{n_0}$ và như vậy ta có một dãy số nguyên tăng vô hạn bị chặn, vô lí. Do đó ta có $x_{n_0} = b_{n_0}$ và lúc này ta chuyển về (x_{n_0}, b_{n_0}, c) là xong. $\square$